ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS II.

REDIGIT

Á. CSÁSZÁR

ADIUVANTIBUS

L. FEJÉR, L. FUCHS, G. HAJÓS, F. KÁRTESZI,
R. PÉTER, A. RÉNYI, P. SZÁSZ, P. TURÁN

1959

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO BIOLOGICA
incepit anno MCMLVII
SECTIO CHIMICA
incepit anno MCMLIX
SECTIO GEOLOGICA
incepit anno MCMLVII
SECTIO HISTORICA
incepit anno MCMLVII
SECTIO IURIDICA
incepit aneo MCMLIX
SECTIO MATHEMATICA
incepit anno MCMLVIII
SECTIO PHILOLOGICA
incepit anno MCMLVII

LÉOPOLD FEJÉR
1880—1959

La rédaction des Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica a la douleur de faire savoir que le professeur

LÉOPOLD FEJÉR,

membre de l'Académie des Sciences de Hongrie, membre correspondant de l'Académie Polonaise des Sciences, de l'Académie des Sciences de Göttingen et de l'Académie Bavaroise des Sciences, docteur honoris causa de l'Université Loránd Eötvös de Budapest et de l'Université Brown de Providence, président d'honneur de la Société Mathématique János Bolyai, membre du comité de rédaction de notre revue, est décédé après une longue et douloureuse maladie le 15 octobre 1959.

LÉOPOLD FEJÉR *est né le 9 février 1880 à Pécs. Après avoir fait ses études supérieures à l'Ecole Polytechnique de Budapest et aux Universités de*

Budapest, de Berlin et de Göttingen, il a obtenu le doctorat de la Faculté des lettres et des sciences de l'Université de Budapest. Il travaillait comme assistant de cette même Université jusqu'à 1905, puis comme maître de conférence à l'Université de Kolozsvár. Il a été nommé professeur à l'Université de Budapest en 1911 où il travaillait pendant presqu'un demi-siècle jusqu'à ce que sa maladie s'aggravissante l'empêchait de poursuivre son travail.

Déjà le premier résultat des recherches scientifiques de LÉOPOLD FEJÉR, *son théorème devenu classique sur la sommation des séries de Fourier, acquit une excellente renommée au jeune savant parmi les mathématiciens du monde entier et détermina le début d'une nouvelle période dans la théorie des séries de fonctions. Il enrichit plus tard cette théorie, de même que celles de l'interpolation, de la quadrature approchée et des fonctions analytiques, de nombreux résultats de première importance. Il fut le chef et le maître d'un groupe de nombreux mathématiciens, renfermant non seulement la plupart des mathématiciens contemporains de Hongrie, mais aussi un grand nombre de chercheurs travaillant dans d'autres pays.*

Sa mort frappe d'une perte douloureuse et irréparable les mathématiciens du monde entier, les dépouillant d'un des plus éminents personnages scientifiques de notre époque.

NOTES ON ABELIAN GROUPS. I.

By

L. FUCHS

Mathematical Institute, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received April 7, 1959)

§ 1. Direct summands of completely decomposable torsion free groups

An abelian group[1] G is called completely decomposable if it is a direct sum of groups of rank 1, i. e. of groups which are isomorphic to subgroups of quasicyclic groups or the additive group of all rationals. Completely decomposable torsion free groups were discussed first by R. BAER in his fundamental paper [1]. He proved that

(1) pure subgroups of completely decomposable torsion free groups are again completely decomposable provided the types of the components of rank 1 are the same, and

(2) direct summands of such groups have again the same property whenever the types of the components satisfy the maximum condition.

While simple counterexamples show that (1) does not hold if the hypothesis on the types of the components is omitted, the problem as to whether or not (2) is generally valid, without any assumption on the types, remained open. In 1952 KULIKOV proved [13] that for countable direct summands (2) holds without any hypothesis on the types of the components. Recently, KAPLANSKY [12] has given an elegant proof of the fact that any direct summand of a group which is a direct sum of countable groups is again a direct sum of countable groups[2], leading to the complete result: *A direct summand of a completely decomposable torsion free group is completely decomposable.*

The proof of this nice result was unfortunately too lengthy, since KULIKOV's proof of the countable case needed at least 30—40 pages. Therefore it is desirable to give a short proof of this theorem of KULIKOV and this is what we intend to do here.

[1] Since we shall be concerned with abelian groups only, we shall mean by a group throughout an additively written abelian group. For the basic concepts concerning abelian groups we refer e. g. to [11] or [7].

[2] Let us note that this result of KAPLANSKY can easily be improved: *if* $\mathfrak{m}$ *is an arbitrary infinite cardinal and* G *is a direct sum of groups of cardinality* $\leqq \mathfrak{m}$, *then any direct summand of* G *is again a direct sum of groups of power* $\leqq \mathfrak{m}$.

Let us note that the following method can also be applied to give short proofs for other results of [13], even for those on non-commutative groups, but here we content ourselves with giving a short proof for the mentioned theorem which is the main result of [13]. The main ideas of the following method are essentially contained in [13] sporadically, only its elaboration can be considered to be new.

Thus we want to give a simple proof of the following theorem:

THEOREM. (KULIKOV [13].) *If G is a completely decomposable torsion free group and A is a countable direct summand of G, then A is likewise completely decomposable.*

Write the group G in the form $G=\sum_{\mathfrak{a}} G_{\mathfrak{a}}$ (direct sum of the $G_{\mathfrak{a}}$) where $G_{\mathfrak{a}}$ are direct sums of groups of rank 1 and of the same type $\mathfrak{a}$, and $\mathfrak{a}$ ranges over all different relevant types.

Let $G=A+B$ (direct sum) and $\mathfrak{a}$ some type. Since both[3] $G(\mathfrak{a})$ and $G^*(\mathfrak{a})$ are fully invariant[4] subgroups of G, we have $G(\mathfrak{a})=A(\mathfrak{a})+B(\mathfrak{a})$ and $G^*(\mathfrak{a})=A^*(\mathfrak{a})+B^*(\mathfrak{a})$ where clearly $A(\mathfrak{a})=G(\mathfrak{a})\cap A$ etc. It follows that $A^*(\mathfrak{a})$ is a direct summand of $A(\mathfrak{a})$ and $B^*(\mathfrak{a})$ is that of $B(\mathfrak{a})$, $A(\mathfrak{a})=A_{\mathfrak{a}}+$ $+A^*(\mathfrak{a})$, $B(\mathfrak{a})=B_{\mathfrak{a}}+B^*(\mathfrak{a})$. Hence $G(\mathfrak{a})=G_{\mathfrak{a}}+G^*(\mathfrak{a})=A_{\mathfrak{a}}+B_{\mathfrak{a}}+G^*(\mathfrak{a})$, that is, any $G_{\mathfrak{a}}$ can be replaced by $A_{\mathfrak{a}}+B_{\mathfrak{a}}$ in the decomposition $G=\sum_{\mathfrak{a}} G_{\mathfrak{a}}$. Moreover, such a replacement can be performed for a finite number of the $G_{\mathfrak{a}}$ as well, say, for $G_{\mathfrak{a}_1},\ldots,G_{\mathfrak{a}_n}$, since we can apply this changing process first to a $G_{\mathfrak{a}_j}$ with a minimal $\mathfrak{a}_j$ in the set $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$, then to a $G_{\mathfrak{a}_k}$ with a minimal $\mathfrak{a}_k$ in the set $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_{j-1},\mathfrak{a}_{j+1},\ldots,\mathfrak{a}_n$ (note that after the first substitution the decomposition of $G_{\mathfrak{a}_k}$ as the direct sum of the $G_{\mathfrak{a}}$ with $\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{a}_k$ does not alter) etc. Finally, we obtain $G=A_{\mathfrak{a}_1}+\cdots+A_{\mathfrak{a}_n}+B_{\mathfrak{a}_1}+\cdots+B_{\mathfrak{a}_n}+$ $+\sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}_i} G_{\mathfrak{a}}$ whence

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&A=A_{\mathfrak{a}_1}+\cdots+A_{\mathfrak{a}_n}+A(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n)\\
&\text{with}\quad A(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n)=A\cap[B_{\mathfrak{a}_1}+\cdots+B_{\mathfrak{a}_n}+\sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}_i} G_{\mathfrak{a}}],\\
&B=B_{\mathfrak{a}_1}+\cdots+B_{\mathfrak{a}_n}+B(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n)\\
&\text{with}\quad B(\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n)=B\cap[A_{\mathfrak{a}_1}+\cdots+A_{\mathfrak{a}_n}+\sum_{\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}_i} G_{\mathfrak{a}}].
\end{aligned}
$$

[3] Recall that $G(\mathfrak{a})$ denotes the subgroup consisting of all elements of type $\geqq\mathfrak{a}$ in G, while $G^*(\mathfrak{a})$ is the subgroup generated by the elements of type $>\mathfrak{a}$ in G. In the present case $G(\mathfrak{a})$ is the direct sum of the $G_{\mathfrak{b}}$ with $\mathfrak{b}\geqq\mathfrak{a}$ and $G^*(\mathfrak{a})$ is the direct sum of the $G_{\mathfrak{b}}$ with $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$.

[4] Note that if H is fully invariant in a direct sum $G=A+B$, then $H=(A\cap H)+$ $+(B\cap H)$.

Since $G(\mathfrak{a}) \cap (A_{\mathfrak{a}_i} + B_{\mathfrak{a}_i}) = 0$ or $\sim A_{\mathfrak{a}_i} + B_{\mathfrak{a}_i}$, furthermore since $G(\mathfrak{a})$ is a fully invariant subgroup of G, we conclude that $G(\mathfrak{a})$ is a direct sum of some of $A_{\mathfrak{a}_1} + B_{\mathfrak{a}_1}, \ldots, A_{\mathfrak{a}_n} + B_{\mathfrak{a}_n}$ and of $G(\mathfrak{a}) \cap A(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, $G(\mathfrak{a}) \cap B(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. As above it follows that we can put back successively $G_{\mathfrak{a}_i}$ in the place of $A_{\mathfrak{a}_i} + B_{\mathfrak{a}_i}$ in the decomposition of G, and then we get

$$G = G_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + G_{\mathfrak{a}_n} + A(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) + B(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n).$$

Hence

$$A = A(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) + [A \cap (G_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + G_{\mathfrak{a}_n} + B(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n))]$$

where, by (3), the second summand is isomorphic to $A_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + A_{\mathfrak{a}_n}$. Therefore we may write

$$(3') \qquad A = C_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + C_{\mathfrak{a}_n} + A(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \quad \text{with} \quad C_{\mathfrak{a}_i} \cong A_{\mathfrak{a}_i}$$

where $A \cap (G_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + G_{\mathfrak{a}_n}) \subseteq C_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + C_{\mathfrak{a}_n}$.

Let $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ be an enumeration of the elements of the countable group A. For a fixed k, consider a finite direct sum $G_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + G_{\mathfrak{a}_n}$ containing all of $a_1, \ldots, a_k$. In the corresponding decomposition (3′) of A, the direct sum $C_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + C_{\mathfrak{a}_n}$ contains the subgroup $A \cap (G_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + G_{\mathfrak{a}_n})$ and hence the elements $a_1, \ldots, a_k$. Take the next element a_{k+1} of A and denote its $A(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$-component in (3′) by a'_{k+1}. By what has been proved it follows that the direct summand $A(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ of G has a direct summand of the form $C_{\mathfrak{a}_{n+1}} + \cdots + C_{\mathfrak{a}_{n+m}}$ (with $C_{\mathfrak{a}_{n+j}} \sim A_{\mathfrak{a}_{n+j}}$) containing a'_{k+1}. Then the first $k+1$ elements of A belong to $C_{\mathfrak{a}_1} + \cdots + C_{\mathfrak{a}_{n+m}}$. Continuing this process, we obtain a (finite or) countable sequence of direct summands $C_{\mathfrak{a}_s}$ of A such that they generate their direct sum $\sum_s C_{\mathfrak{a}_s}$ and every element of A belongs to this direct sum, i.e. $A = \sum_{\mathfrak{a}} C_{\mathfrak{a}}$.

To finish the proof, observe that $C_{\mathfrak{a}_s}$ is isomorphic to $A_{\mathfrak{a}_s}$, i.e. to a direct summand of $A_{\mathfrak{a}_s} + B_{\mathfrak{a}_s} \sim G(\mathfrak{a}_s)/G^*(\mathfrak{a}_s) \cong G_{\mathfrak{a}_s}$ to which group we can apply (1) to conclude that every $C_{\mathfrak{a}_s}$ and so A itself is completely decomposable. Q. e. d.

§ 2. On the tensor product

The notion of tensor product of (abelian)[5] groups was introduced by WHITNEY [15]. He and later DIEUDONNÉ [5] obtained several results concerning the dependence of the properties of the tensor product on those of the

[5] The definition of tensor product may be given for arbitrary groups, but it is the same as the tensor product of the factor commutator groups, so that the problem automatically reduces to the commutative case. Therefore we may restrict ourselves a priori to abelian groups.

factors.[6] In the case of groups without operators, the first structure theorem on tensor product seems to have been obtained by the present author [6] who proved that the tensor product of any two torsion groups is the direct sum of finite cyclic groups. A further result may be found in [7] where the structure of the tensor product of a p-group and a torsion free group is completely determined.

In [7] I have stated the problem of finding the structure of the tensor product of a torsion group and a mixed group. Our principal aim here is to give the solution of this problem.[6a] In the most general case, namely when the groups are both mixed, we succeed only in determining the maximal torsion subgroup of the tensor product of the two groups. Our discussions show that the torsion free case is the most difficult one, and until we are not in possession of a powerful tool of characterizing torsion free groups by suitable invariants, we can hardly hope that the tensor product of two torsion free groups can adequately be described.

We shall also consider the group of pairings of two groups U and V into a third one, W. This group will be proved to be isomorphic to the group of all homomorphisms of the tensor product $U \otimes V$ into W. The most important case is when W is the group of reals modulo 1. In this special case the results obtained for tensor products can be applied in order to give explicitly the structure of the group of pairings for arbitrary groups U and V.

Let U and V be arbitrary (abelian) groups and X the free group generated by the free generators (u, v) for all $u \in U$ and $v \in V$. The tensor product $U \otimes V$ of U and V is defined as the factor group X/Y of X with respect to the subgroup Y generated by the elements of the form $(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v)$, $(u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2)$. If the coset of (u, v) in X/Y is denoted by $u \otimes v$, then $U \otimes V$ consists of all finite sums of the form $\sum (u_i \otimes v_i)$ with $u_i \in U$, $v_i \in V$, subject to the rules

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v, \quad u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2.$$

Obviously, $U \otimes V \cong V \otimes U$.

The tensor product has the following properties which we shall need in the sequel.[7]

(a) If $f(u, v)$ is a bilinear function of the variables $u \in U$ and $v \in V$

[6] Dieudonné considered more generally the tensor product of modules. For a detailed study of tensor products of modules we refer to Bourbaki [3] and Cartan—Eilenberg [4].

[6a] (Added in the proof.) Independently, D. K. Harrison (Two of the problems of L. Fuchs, *Publicationes Math., Debrecen*) obtained a solution by means of homological methods.

[7] See [15], [3], [5], [4], [7].

with values in some group G, then there exists a homomorphism η of $U \otimes V$ into G such that $(u \otimes v)\eta = f(u, v)$.

(b)[8] If $n|u$ and $m|v$, then $nm|u \otimes v$; if $nu = 0$ and $mv = 0$, then $(n, m)(u \otimes v) = 0$; if $n|u$ and $nv = 0$, then $u \otimes v = 0$.

(c)[9] If $V = \mathcal{C}(\infty)$, then $U \otimes V \cong U$, and if $V = \mathcal{C}(n)$, then $U \otimes V \cong U/nU$.

(d) If the groups U and V are direct sums, $U = \sum_\lambda U_\lambda$ and $V = \sum_\mu V_\mu$, then $U \otimes V = \sum_\lambda \sum_\mu (U_\lambda \otimes V_\mu)$.

(e) If S is a subgroup of U and T is a subgroup of V, then the subgroup W of $U \otimes V$ generated by all elements $u \otimes v$ of $U \otimes V$ such that $u \in S$, $v \in T$ is in general a homomorphic (and not necessarily an isomorphic) image of $S \otimes T$. But if S and T are pure subgroups of U and V, respectively, then the natural mapping of $S \otimes T$ into $U \otimes V$ is an isomorphism.[10] The same conclusion holds whenever U and V are torsion free (then S and T need not be pure subgroups).

(f) If in the tensor product $U \otimes V$ we have $\sum_{i=1}^{n} (u_i \otimes v_i) = 0$, then there exist finitely generated subgroups U_1 of U and V_1 of V such that $u_i \in U_1$, $v_i \in V_1$ and the sum $\sum_{i=1}^{n} (u_i \otimes v_i)$, considered as an element of $U_1 \otimes V_1$, is vanishing.

(g) Let S be a subgroup of U, T a subgroup of V, and let $\Gamma(S, T)$ denote the subgroup of $U \otimes V$ that is generated by all $u \otimes v$ with $u \in S$, $v \in V$ and all $u \otimes v$ with $u \in U$, $v \in T$. Then $U/S \otimes V/T \cong (U \otimes V)/\Gamma(S, T)$.

Now we take up the problem of determining the structure of the tensor product of two groups U and V.

Let the groups U and V be given by means of generators and defining relations: $U = A/B$ where[11] $A = \sum_\varkappa \{a_\varkappa\}$ is a free group and B is generated by the elements $b_\lambda = \sum_\varkappa m_{\lambda\varkappa} a_\varkappa$ $(\lambda \in \Lambda)$; $V = C/D$ where $C = \sum_\mu \{c_\mu\}$ is free and D is generated by the elements $d_\nu = \sum_\mu n_{\nu\mu} c_\mu$ $(\nu \in \mathrm{N})$. From (g) it follows that $U \otimes V$ is isomorphic to $(A \otimes C)/\Gamma(B, D)$. Since A and C are torsion free,

[8] $n|u$ denotes that $u \in U$ is divisible by the integer n, i.e. there exists an $x \in U$ such that $nx = u$.

[9] $\mathcal{C}(\infty)$ denotes the infinite cyclic group and $\mathcal{C}(n)$ the cyclic group of order n.

[10] S is called pure in U if $nS = S \cap nU$ for every natural integer n. — Clearly, the natural mapping of $S \otimes T$ into $U \otimes V$ sends $u \otimes v \in S \otimes T$ $(u \in S,\ v \in T)$ into $u \otimes v \in U \otimes V$. [$u \otimes v$ has different meanings in the two cases !]

[11] $\{\cdots\}$ denotes the subgroup generated by the elements $\cdots$.

in view of (e) we get that $A\otimes D$ and $B\otimes C$ are subgroups of $A\otimes C$, and so $\Gamma(B, D)=\{A\otimes D, B\otimes C\}$. Denoting $a_\varkappa\otimes c_\mu\ (\in A\otimes C)$ by $x_{\varkappa\mu}$, on account of (d) we have $A\otimes C=\sum_{\varkappa,\mu}\{x_{\varkappa\mu}\}$, further $B\otimes C$ is generated by $\sum_\varkappa m_{\lambda\varkappa}x_{\varkappa\mu}$ $(\lambda\in\Lambda)$ and $A\otimes D$ is generated by $\sum_\mu n_{\nu\mu}x_{\varkappa\mu}$ $(\nu\in\mathrm{N})$. Hence the tensor product $U\otimes V$ can easily be described in terms of generators and defining relations. This description gives, however, no possibility of getting a more detailed information on the dependence of the structure of $U\otimes V$ on those of U and V. Therefore this is of small practical value.

Nevertheless in case one of the factors is a torsion group, we can completely discover the structure of the tensor product.

Let U be a torsion group and V an arbitrary group. From (d) we know that $U\otimes V$ is the direct sum of the groups $U_p\otimes V$ where U_p runs over all p-components of U. (b) implies that $U_p\otimes V$ is a p-group. Again from (b) it results that in $U_p\otimes V$ the group U_p annihilates every q-component (q is a prime different from p) of the maximal torsion subgroup of V, and therefore from (g) we conclude that $U_p\otimes V\sim U_p\otimes(V/V_p')$ where V_p' denotes the direct sum of the q-components $(q\neq p)$ of the maximal torsion subgroup of V. Consequently, if we want to characterize the structure of the tensor product of a torsion group and a mixed group, then it suffices to consider the case covered by the next theorem.

THEOREM 2. 1. *Let U be a p-group and V a mixed group whose maximal torsion subgroup T is a p-group (with the same prime p). If*[12] $B=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{m}_i}\mathcal{C}(p^i)$ *is a basic subgroup of T and $\mathfrak{r}$ denotes the rank of V^*/pV^* where $V^*\sim V/T$, then*

$$U\otimes V\sim\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{m}_i}U/p^iU+\sum_{\mathfrak{r}}U. \tag{1}$$

Choose a basis $[a_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ of B and a maximal independent set $[x_\mu^*]_{\mu\in\mathrm{M}}$ of V^* mod pV^*. If $x_\mu\in V$ is an arbitrary element in the coset x_μ^*, then the set $[a_\lambda, x_\mu]$ is a basis of V mod p^iV $(i=1, 2, \ldots)$. Indeed, this is an immediate consequence of the fact that $[a_\lambda]$ is a basis of T mod p^iT and $[x_\mu^*]$ is a basis of V^* mod p^iV^* for every $i\geqq 1$.

Let v be an arbitrary element of V. If v is divisible by every power of p, then because of (b) we have $u\otimes v=0$ for every $u\in U$. If $v\in p^kV$, $\notin p^{k+1}V$,

[12] By $\sum_{\mathfrak{m}}G$ with a cardinal $\mathfrak{m}$ we denote the direct sum of $\mathfrak{m}$ copies of G. The symbol $\sum^*$ will mean complete direct sum.

then there exists a relation

$$v = m_1 a_1 + \cdots + m_r a_r + n_1 x_1 + \cdots + n_s x_s + p^l w$$

with integers m_i, n_j and a prescribed $l > k$, for some $w \in V$. Now if $u \in U$ and p^l is greater than the order of u, then we have clearly

$$u \otimes v = \sum (u \otimes m_i a_i) + \sum (u \otimes n_j x_j) + u \otimes p^l w = \sum (m_i u \otimes a_i) + \sum (n_j u \otimes x_j)$$

(the term $u \otimes p^l w$ vanishes by (b)), and therefore the elements of the tensor product $U \otimes V$ may be written in the form

$$\sum_{i=1}^{r} (u_i \otimes a_i) + \sum_{j=1}^{s} (u_j \otimes x_j) \tag{2}$$

with u_i, $u_j \in U$ and a_i, x_j in the chosen subset of V (note that addition and subtraction may be carried out on the u_i, u_j, keeping the a_i and the x_j fixed). We have to examine when an element of the form (2) vanishes. Observe that any finite direct summand $\{a_1\} + \cdots + \{a_r\}$ of B is a direct summand of V as well, $V = \{a_1\} + \cdots + \{a_r\} + V'$ where V' may be assumed to contain $x_1, \ldots, x_s$ occurring in (2). Hence if (2) vanishes, then by (d) so does every $u_i \otimes a_i$, and we have to consider only the case $\sum_{j=1}^{s} (u_j \otimes x_j) = 0$. By (f) there exists a finitely generated subgroup V_1 of V such that V_1 contains $x_1, \ldots, x_s$ and in the tensor product $U \otimes V_1$ the element $\sum (u_j \otimes x_j)$ vanishes. Because the x_j are independent and of infinite order, by (d) there is no loss of generality in assuming that V_1 is again torsion free of the same rank, $V_1 = \{v_1\} + \cdots + \{v_s\}$ with $x_j = \sum_{k=1}^{s} m_{jk} v_k$ where m_{jk} are rational integers. Now $0 = \sum_j (u_j \otimes x_j) = \sum_k \left(\sum_j m_{jk} u_j \otimes v_k\right)$ holds in the tensor product $U \otimes V_1$ whence $\sum_j m_{jk} u_j = 0$ $(k = 1, \ldots, s)$. By the choice of the x_μ, the factor group V_1/X with $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$ has a finite order prime to p, and therefore the determinant of the m_{jk} is prime to p. Therefore from the homogeneous system of linear equations obtained for the u_j we get $u_1 = \cdots = u_s = 0$. We infer that every element of $U \otimes V$ may be written uniquely in the form (2) which shows that

$$U \otimes V \cong \sum_\lambda (U \otimes \{a_\lambda\}) + \sum_\mu (U \otimes \{x_\mu\}).$$

Hence (c) implies that (1) holds, in fact.

Let us mention the obvious corollary: *If U is a torsion group and V is a mixed group whose maximal torsion subgroup is denoted by T, then*

$$U \otimes V \cong U \otimes (V/T) + U \otimes T.$$

As we have mentioned, we cannot clear up entirely the structure of the tensor product of two arbitrary groups, not even in the case when their maximal torsion subgroups vanish. The most that we are able to prove now is the structural characterization of the maximal torsion subgroup of the tensor product of two arbitrary groups U and V.

Let S and T denote the maximal torsion subgroup of U and V, respectively, and S_p (T_p) the p-component of S (T). From (b) it is obvious that in $U \otimes V$ the subgroup $\Gamma(S, T)$ is a torsion group. Because of (e) the tensor product of two torsion free groups is again torsion free, and so $(U/S) \otimes (V/T) \cong (U \otimes V)/\Gamma(S, T)$ is torsion free. We conclude that $\Gamma(S, T)$ is the maximal torsion subgroup of $U \otimes V$. S and T are pure subgroups of U and V, respectively, thus $S \otimes V$ and $U \otimes T$ are (in the natural way) subgroups of $U \otimes V$, and evidently they generate $\Gamma(S, T)$. By virtue of $S \otimes V = \sum_p (S_p \otimes V)$ and $U \otimes T = \sum_p (U \otimes T_p)$ we see that the p-component of $\Gamma(S, T)$ is generated by the subgroups $S_p \otimes V$ and $U \otimes T_p$ of $U \otimes V$. As above we can infer that it suffices to consider the case when the maximal torsion subgroups of U and V are p-groups belonging to the same prime p.

THEOREM 2.2. *Let U and V be mixed groups whose maximal torsion subgroups S and T are p-groups belonging to the same prime p. Let $B = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_i} \mathcal{C}(p^i)$ be a basic subgroup of T and let $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}$ denote the rank of V^*/pV^*, U^*/pU^*, where $V^* = V/T$, $U^* = U/S$. Then*[13]

$$\text{(3)} \quad \text{Maximal torsion subgroup of } U \otimes V \sim \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_i} S/p^i S + \sum_{\mathfrak{r}} S + \sum_{\mathfrak{s}} T.$$

Let $[a_\lambda]$ and $[x_\mu]$ have the same meaning as in the proof of Theorem 2.1, and define correspondingly the elements $[c_\nu]$ and $[y_\varrho]$ of U. In the same way as in the proof of Theorem 2.1 it can be shown that every element of $S \otimes V$ has the form

$$\sum (u_i \otimes a_i) + \sum (u_j \otimes x_j) \qquad \text{with} \qquad u_i, u_j \in S,$$

and every element of $U \otimes T$ has the form

$$\sum (c_k \otimes v_k) + \sum (y_l \otimes v_l) \qquad \text{with} \qquad v_k, v_l \in T.$$

It must be observed that both $\sum (u_i \otimes a_i)$ and $\sum (c_k \otimes v_k)$ represent elements of $S \otimes T$ and may be written in the form $\sum m_{qt} (c_q \otimes a_t)$ with integers m_{qt}.

[13] Formula (3) is not symmetric in U and V, but it can be made so by giving a more explicit form to the first summand.

Thus the elements of the maximal torsion subgroup of $U \otimes V$ are of the form

$$\sum m_{qt}(c_q \otimes a_t) + \sum (u_j \otimes x_j) + \sum (y_l \otimes v_l) \qquad (u_j \in S,\ v_l \in T). \tag{4}$$

By making use of a similar reasoning at that applied in the proof of Theorem 2.1, it follows easily that (4) vanishes if and only if all the terms $m_{qt}(c_q \otimes a_t)$, $u_j \otimes x_j$ and $y_l \otimes v_l$ vanish. Consequently, we are led to the isomorphism

$$\Gamma(S, T) \cong \sum_{\nu} \sum_{\lambda} \{c_\nu \otimes a_\mu\} + \sum_{\mu} (U \otimes \{x_\mu\}) + \sum_{\varrho} (\{y_\varrho\} \otimes V)$$

whence we obtain immediately the desired isomorphism (3). Q. e. d.

If the groups U and V are torsion free, then $U \otimes V$ is again torsion free. In this case we can establish certain cardinal invariants of $U \otimes V$ in terms of the corresponding invariants of U and V. Although these invariants do not provide any good information on the group structure, for certain purposes it will suffice to know them (cf. the end of this §).

Let G be a torsion free group and p a fixed prime. Let $\mathfrak{k}_p(G)$ denote the rank of G/pG and let $[a_\varkappa]$ be a maximal independent system of G mod pG. If G^p is the pure subgroup of G that is spanned by the $a_\varkappa$,[14] then G/G^p is torsion free and satisfies $p(G/G^p) = G/G^p$. In fact, any $g \in G$ may be written in the form $g = n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k + ph$ for some $h \in G$ and integers n_i. This shows that $ph \equiv g \pmod{G^p}$ and thus any element of G is divisible by p mod G^p. By making use of this notation we get

THEOREM 2. 3. *Let U and V be torsion free groups. Then $U \otimes V$ is again torsion free and for any prime p one has*

$$\mathfrak{k}_p(U \otimes V) = \mathfrak{k}_p(U)\, \mathfrak{k}_p(V). \tag{5}$$

Let $[a_\lambda]$ be a basis of U mod pU, $[b_\mu]$ a basis of V mod pV, and let U^p, V^p have the same meaning as G^p above. By (d) and (c) we know that $(U \otimes V)/\Gamma(pU, pV) \cong (U/pU) \otimes (V/pV)$ is a direct sum of cyclic groups of order p and the set $[a_\lambda \otimes b_\mu]$ forms a basis of $U \otimes V$ mod $\Gamma(pU, pV)$. Take into account that $\Gamma(pU, pV) = \{pU \otimes V, U \otimes pV\}$ must belong to $p(U \otimes V)$, and therefore $\Gamma(pU, pV) = p(U \otimes V)$. This shows that $[a_\lambda \otimes b_\mu]$ is a basis of $U \otimes V$ mod $p(U \otimes V)$, proving (5).

Application: the structure of the group of pairings. Let U, V and W be any groups. Recall that by a pairing of U and V into W we mean a bilinear function $f(u, v)$ defined for all $u \in U$ and all $v \in V$ with values in W. Thus

[14] Thus G^p depends on the special choice of the $a_\varkappa$, but its rank is the same for every choice of $a_\varkappa$. Put $\mathfrak{k}_p = r(G/G^p)$; this is in general no invariant of G.

$f(u, v)$ $(\in W)$ satisfies

$$f(u_1+u_2, v)=f(u_1, v)+f(u_2, v), \quad f(u, v_1+v_2)=f(u, v_1)+f(u, v_2).$$

Our task is to study the set of all pairings of U and V into W in case the groups U, V and W are fixed. The sum $f(u, v)$ of two pairings $f_1(u, v)$ and $f_2(u, v)$ of U and V into W is defined in the obvious manner:

$$f(u, v)=f_1(u, v)+f_2(u, v).$$

This is again a pairing, and it follows readily that under this rule of composition the pairings of U and V into W form an abelian group which we call *the group of pairings of U and V into W*, and we denote it by Pair $(U, V; W)$. The neutral element of this group is obviously the pairing $f(u, v)=0$ for all $u \in U, v \in V$.[15]

In order to describe the structure of the group of pairings, we verify:

THEOREM 2. 4. *The following isomorphisms hold:*[16]

$$\text{Pair } (U, V; W) \sim \text{Hom } (U \otimes V, W), \tag{7}$$

$$\text{Pair } (U, V; W) \cong \text{Hom } (U, \text{Hom } (V, W)). \tag{8}$$

The proof is immediate. The correspondence $(u, v) \to f(u, v)$ $(u \in U, v \in V)$ is a bilinear function of U and V into W, hence by (a) there exists a homomorphism η of $U \otimes V$ into W such that $(u \otimes v)\eta = f(u, v)$. The correspondence $f(u, v) \to \eta$ is easily seen to be an isomorphism between the two groups in (7).

If $f(u, v)$ is a pairing, then for a fixed $u \in U$ the map $v \to f(u, v)$ is a homomorphism χ_u of V into W. The correspondence $u \to \chi_u$ is a homomorphism of U into Hom (V, W). It follows readily that this is in fact an isomorphism between the two groups in (8).

By means of Theorem 2. 4 it is not hard to establish several statements on the structure of Pair $(U, V; W)$. Instead of doing so, we turn ourselves immediately to the most important special case in which W is the additive group I of real numbers mod 1.

Let us note that the homomorphism group of an arbitrary group G into I has been completely determined in terms of certain cardinal invariants of G.[17] These invariants of G are the following: the cardinals $\mathfrak{m}_{pi}$ in a direct

[15] If $U=V=W=G$, then the group of pairings reduces to the group of multiplications on G introduced in [7].

[16] Hom (G, H) is the group of all homomorphisms of G into H. It is a well-known result that the groups on the right members of (7) and (8) are isomorphic.

[17] See [8]. In this case Hom (G, I) is nothing else than the character group of the discrete group G, considered without topology. (Cf. HULANICKI [9] and [10].)

decomposition $B_p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_{pi}} \mathcal{C}(p^i)$ of a basic subgroup B_p of the p-component T_p of the maximal torsion subgroup T of G; the final rank[18] $\mathfrak{m}_p$ of T_p; the ranks $\mathfrak{k}_p$ and $\mathfrak{l}_p$ of G/T as defined above. (Cp. footnote [14].) Then

$$\mathrm{Hom}(G, I) \cong \sum_p{}^* \left[\sum_{\mathfrak{k}_p}{}^* \mathcal{C}(p^\infty) + \sum_{\mathfrak{l}_p}{}^* \mathcal{H} + \sum_{\mathfrak{m}_p}{}^* \mathcal{J} + \sum_{i=1}^{\infty}{}^* \sum_{\mathfrak{m}_{pi}}{}^* \mathcal{C}(p^i) \right].$$

Now if we set $G = U \otimes V$, then the mentioned invariants of G can be calculated from those of U and V, by making use of Theorems 2. 2 and 2. 3. The invariants obtained being of a rather complicated form, we omit to state the exact result and content ourselves with the formulation of

THEOREM 2. 5. *The group of pairings of any two groups U and V into the group of reals mod* 1 *can completely be determined by means of cardinal invariants of U and V. The group of pairings is in this case a complete direct sum of finite cyclic groups, quasicyclic groups, groups of p-adic integers and groups of p-adic numbers.*

§ 3. Pure subgroups and Hom, Ext, $\otimes$, Tor.

In Homological Algebra, the groups of homomorphisms, the groups of extensions, the tensor and torsion products play an important rôle. (See [4].) Here we consider some applications of pure[19] subgroups to these groups.

It is a familiar result that if

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \tag{1}$$

is an exact[20] sequence, then, for any groups U and V, the sequences

$$0 \to \mathrm{Hom}(U, A) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(U, B) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(U, C), \tag{2}$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, V) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(B, V) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(A, V), \tag{3}$$

$$\mathrm{Ext}(U, A) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}(U, B) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}(U, C) \to 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{Ext}(C, V) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}(B, V) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}(A, V) \to 0, \tag{5}$$

$$A \otimes V \xrightarrow{\alpha} B \otimes V \xrightarrow{\beta} C \otimes V \to 0, \tag{6}$$

$$0 \to \mathrm{Tor}(U, A) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Tor}(U, B) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}(U, C) \tag{7}$$

[18] The final rank of T_p is the minimum of the ranks of $p^i T_p$ $(i = 1, 2, \ldots)$. — $\mathcal{C}(p^\infty)$ denotes a quasicyclic group, $\mathcal{J}$ the group of p-adic integers, and $\mathcal{H}$ the group of all p-adic numbers.

[19] For the needed properties of pure subgroups we refer to [7].

[20] $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ is an exact sequence of groups A, B, C and homomorphisms α, β if the image of A under α coincides with the kernel of β. For the quoted results see [4] or [7].

are again exact under the induced homomorphisms which may be denoted again by α, β. Here Hom (U, V) denotes the group of all homomorphisms of U into V, Ext (U, V) the group of all (abelian) extensions of V by U, $U \otimes V$ the tensor product and Tor (U, V) the torsion product of U and V. Now we shall consider the case when $A\alpha$ is a *pure* subgroup of B and intend to show what more can be stated of the exact sequences (2)—(7) in this case.

First of all we state two useful lemmas on pure subgroups.

LEMMA 1. *A subgroup S of a group G is pure if and only if, for every natural integer n, S/nS is a direct summand of G/nS.*

For the proof we refer to [7], p. 81.

LEMMA 2. *S is a pure subgroup of G if and only if S is a direct summand of*[21] *$n^{-1}S$, for every natural n.*

Since $n(n^{-1}S) \subset S$, the factor group $(n^{-1}S)/S$ is bounded and therefore a direct sum of cyclic groups. Thus, by a known theorem[22], S is a direct summand of $n^{-1}S$ whenever it is a pure subgroup of G (and hence of $n^{-1}S$). Conversely, if S is a direct summand of every $n^{-1}S$, then in each coset (of finite order) of G mod S we can select an element of the same order as this coset. By a theorem of PRÜFER[22], this implies purity.

Now we turn our attention to (2) and (3). Recall that if α is a homomorphism of A into B, then $\eta \to \eta\alpha$ (with $\eta \in \mathrm{Hom}(U, A)$) is a homomorphism of Hom (U, A) into Hom (U, B) and $\chi \to \alpha\chi$ (with $\chi \in \mathrm{Hom}(B, V)$) is a homomorphism of Hom (B, V) into Hom (A, V). Both homomorphisms may be denoted again by α. We prove:

THEOREM 3.1. *If* (1) *is an exact sequence such that $A\alpha$ is pure in B, then* (2) *and* (3) *are exact sequences such that Hom $(U, A)\alpha$ is pure in* Hom (U, B) *and* Hom $(C, V)\beta$ *is pure in* Hom (B, V). *Conversely, if* (1) *is an exact sequence such that* Hom $(U, A)\alpha$ *is pure in* Hom (U, B) *for every U or else* Hom $(C, V)\beta$ *is pure in* Hom (B, V) *for every V, then $A\alpha$ is pure in B.*

We have to verify only the purity. Let $\eta \in \mathrm{Hom}(U, B)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, A)$, and $n\eta = \varphi\alpha$ for some natural n. Then $n\eta$ maps U into $A\alpha$, η maps nU into $A\alpha$, and so η maps U into $n^{-1}(A\alpha)$. By assumption and Lemma 2, $n^{-1}(A\alpha) = A\alpha + H$ for some subgroup H of B. We define a homomorphism χ of U into $A\alpha$ by putting $u\chi$ $(u \in U)$ equal to the $A\alpha$-component of $u\eta$ in this decomposition of $n^{-1}(A\alpha)$. Then there exists a $\theta \in \mathrm{Hom}(U, A)$ such

[21] $n^{-1}S$ denotes the set of all $x \in G$ such that $nx \in S$.

[22] See e. g. [7], p. 82.

that $\theta\alpha = \chi$, and clearly $n\theta\alpha = n\chi = n\eta = \varphi\alpha$. Therefore $\mathrm{Hom}(U, A)\alpha$ is pure in $\mathrm{Hom}(U, B)$.

Next[23] let $\eta \in \mathrm{Hom}(B, V)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, V)$, and $n\eta = \beta\varphi$. The kernel of $n\eta = \beta\varphi$ contains $A\alpha$, and since the kernel of η contains n-times the kernel of $n\eta$, it follows that the kernel of η contains $n(A\alpha)$. By hypothesis and Lemma 1, we have $B/n(A\alpha) = (A\alpha)/n(A\alpha) + H/n(A\alpha)$ for some subgroup H of B. Define a new homomorphism χ of B into V by putting χ equal to η on H and $\chi = 0$ on $A\alpha$. Since the kernel of χ contains $A\alpha$, there exists a homomorphism θ of C into V such that $\chi = \beta\theta$. Then $n(\beta\theta) = n\chi = n\eta = \beta\varphi$, and therefore $\mathrm{Hom}(C, V)\beta$ is a pure subgroup of $\mathrm{Hom}(B, V)$, in fact.

If $\mathrm{Hom}(U, A)\alpha$ is pure in $\mathrm{Hom}(U, B)$ for every U, then choosing $U = \mathcal{C}(\infty)$ (when $\mathrm{Hom}(U, A)$ is isomorphic to A and $\mathrm{Hom}(U, B)$ is isomorphic to B in the natural way) we obtain that $A\alpha$ is pure in B.

Assume that $\mathrm{Hom}(C, V)$ is pure in $\mathrm{Hom}(B, V)$ for every V and put $V \simeq B/n(A\alpha)$. Then $\mathrm{Hom}(A, V)$ is a bounded group and hence, by (3), the factor group of $\mathrm{Hom}(B, V)$ with respect to its pure subgroup $\mathrm{Hom}(C, V)\beta$ is a direct sum of cyclic groups. Therefore $\mathrm{Hom}(B, V) = \mathrm{Hom}(C, V)\beta + K$. In particular, the natural homomorphism η of B onto $B/n(A\alpha)$ has a representation $\eta = \xi\beta + \zeta$ with $\xi \in \mathrm{Hom}(C, V)$ and $\zeta \in K$. This ζ maps B onto $A\alpha/n(A\alpha)$ and agrees on $A\alpha$ with the natural homomorphism of $A\alpha$ onto $A\alpha/n(A\alpha)$. This implies that $A\alpha/n(A\alpha)$ is a direct summand of $B/n(A\alpha)$ for every n, therefore, by Lemma 1, we are ready with the proof of Theorem 3. 1.

Now we proceed to (4) and (5). Remember that the elements of $\mathrm{Ext}(U, V)$ may be represented by factor sets $f(u_1, u_2) \in V$ $(u_i \in U)$, and two factor sets represent the same element of $\mathrm{Ext}(U, V)$ if and only if they differ by a transformation set (then they are called equivalent). If α is a homomorphism of A into B, then the mapping $f(b_1, b_2) \to f(a_1\alpha, a_2\alpha)$ $(a_i \in A, b_i \in B, f \in V)$ is a homomorphism of $\mathrm{Ext}(B, V)$ into $\mathrm{Ext}(A, V)$ and $f(u_1, u_2) \to f(u_1, u_2)\alpha$ $(u_i \in U, f \in A)$ is a homomorphism of $\mathrm{Ext}(U, A)$ into $\mathrm{Ext}(U, B)$. These are denoted again by the same symbol α.

THEOREM 3. 2. *If* (1) *is an exact sequence where* $A\alpha$ *is pure in* B, *then* (4) *and* (5) *are exact sequences such that* $\mathrm{Ext}(U, A)\alpha$ *is pure in* $\mathrm{Ext}(U, B)$ *and* $\mathrm{Ext}(C, V)\beta$ *is pure in* $\mathrm{Ext}(B, V)$.

Let $f(u_1, u_2) \in A$ $(u_i \in U)$ be an element of $\mathrm{Ext}(U, A)$, $g(u_1, u_2) \in B$ an element of $\mathrm{Ext}(U, B)$, and $ng(u_1, u_2) = f(u_1, u_2)\alpha$. The values $ng(u_1, u_2)$ belong to $A\alpha$, thus $g(u_1, u_2)$ belong to $n^{-1}(A\alpha)$ which may be written as

[23] For this part of Theorem 3.1 cf. [8].

$n^{-1}(A\alpha) = A\alpha + H$ for some $H \subseteq B$. Define $h(u_1, u_2)\,(\in A)$ as the inverse image of the $A\alpha$-component of $g(u_1, u_2)$ in this decomposition. Then $h(u_1, u_2)\alpha$ and so $h(u_1, u_2)$ is a factor set, and clearly it represents an element of $\mathrm{Ext}(U, A)$. Furthermore it is evident that $nh(u_1, u_2)\alpha = ng(u_1, u_2) = f(u_1, u_2)\alpha$ and therefore $\mathrm{Ext}(U, A)\alpha$ is pure in $\mathrm{Ext}(U, B)$.

Assume that $f(b_1, b_2) \in V$ $(b_i \in B)$ is an element of $\mathrm{Ext}(B, V)$, $g(c_1, c_2) \in V$ $(c_i \in C)$ is an element of $\mathrm{Ext}(C, V)$ and $nf(b_1, b_2) = g(c_1, c_2)\beta = g(b_1\beta, b_2\beta)$. It is easily seen that $nf(b_1, b_2)$ and $f(nb_1, nb_2)$ represent the same element of $\mathrm{Ext}(B, V)$. The equality $f(nb_1, nb_2) = g(b_1\beta, b_2\beta)$ shows that $f(nb_1, nb_2)$ is a transformation set for $nb_1, nb_2 \in n(A\alpha)$, i. e. in the considered extension G of V by B the subextension of V by $n(A\alpha)$ is splitting. Note that $B/n(A\alpha) = A\alpha/n(A\alpha) + H/n(A\alpha)$ and so G may be considered as an extension of $V + n(A\alpha)$ by $A\alpha/n(A\alpha) + H/n(A\alpha)$. Take elements x_λ, y_μ of G which form a complete set of representatives of the cosets $A\alpha/n(A\alpha)$ and $H/n(A\alpha)$, respectively; then the elements of the form $x_\lambda + y_\mu + a$ with $a \in n(A\alpha)$ constitute a complete system of representatives of G mod V. The corresponding factor set $f^*(b_1, b_2)$ is obtained by the rule $f^*(b_1, b_2) = (x_1 + y_1 + a_1) + (x_2 + y_2 + a_2) - (x_3 + y_3 + a_3)$, if the elements in the parentheses are in turn the representatives of b_1, b_2 and $b_1 + b_2$. This $f^*(b_1, b_2)$ is equivalent to $f(b_1, b_2)$. We get again a factor set if we put $h(b_1, b_2) = (y_1 + a_1) + (y_2 + a_2) - (y_3 + a_3)$; indeed, the values of $h(b_1, b_2)$ agree with those of $f(b_1, b_2)$ on H, and so they belong to V, and it may be readily verified that $h(b_1, b_2) + h(b_1 + b_2, b_3) = h(b_1, b_2 + b_3) + h(b_2, b_3)$ for any $b_i \in B$. Thus $h(b_1, b_2)$ represents an extension of V by B in which the subextension of V by $A\alpha$ is direct whence $h(b_1, b_2) \in \mathrm{Hom}(C, V)\beta$. Since $nh(b_1, b_2)$ is equivalent to $h(nb_1, nb_2) = f^*(nb_1, nb_2)$ which is equivalent to $nf^*(b_1, b_2)$ and hence to $nf(b_1, b_2)$, we may infer that $\mathrm{Hom}(C, V)\beta$ is actually pure in $\mathrm{Hom}(B, V)$. (Note that the converse statement is not true: take a divisible resp. a free group for B.)

Next we consider (6). A homomorphism α of A into B induces a homomorphism of $A \otimes V$ into $B \otimes V$, namely, $a \otimes v \to a\alpha \otimes v$. This is denoted again by α.

THEOREM 3. 3. *If in the exact sequence* (1) *the group* $A\alpha$ *is pure in* B, *then the sequence*

$$0 \to A \otimes V \xrightarrow{\alpha} B \otimes V \xrightarrow{\beta} C \otimes V \to 0 \tag{8}$$

is exact for any group V *and* $(A \otimes V)\alpha$ *is pure in* $B \otimes V$. *Moreover, if the exactness of* (1) *implies that* $(A \otimes V)\alpha$ *is always pure in* $B \otimes V$ *whatever* V *is, then* $A\alpha$ *is pure in* B *and* (6) *can be imbedded in the exact sequence* (8).

That the exactness of (1) and the purity of $A\alpha$ in B imply the exactness of (8) has been proved in [7], p. 253. Thus we have only to show that $(A\otimes V)\alpha$ is pure in $B\otimes V$. Assume that

$$n\sum_i (b_i\otimes v_i)=\sum_j (a_j\otimes w_j)\alpha \qquad (b_i\in B,\ a_j\in A,\ v_i, w_j\in V). \tag{9}$$

Then there exists a finitely generated subgroup D of B such that b_i, $a_j\alpha\in D$ and (8) holds in $D\otimes V$. In view of the purity of $A\alpha$ in B, $A\alpha$ is a direct summand of $\{A\alpha, D\}$, $\{A\alpha, D\}=A\alpha+E$. Since (9) holds in the tensor product $(A\alpha+E)\otimes V=(A\otimes V)\alpha+E\otimes V$, the $(A\otimes V)\alpha$-component of $\sum_i (b_i\otimes v_i)$ satisfies (9), establishing the claimed purity.

The proof of the converse assertion is immediate: take $V=\mathcal{C}(\infty)$, then $A\otimes V\cong A$ and $B\otimes V\cong B$ under natural isomorphisms whence by hypothesis $A\alpha$ is pure in B.

Let us note that even a somewhat sharper assertion holds: if $0\to A\xrightarrow{\alpha}B$ and $0\to U\xrightarrow{\omega}V$ are exact sequences such that $A\alpha$ is pure in B and $U\omega$ is pure in V, then $0\to A\otimes U\xrightarrow{(\alpha,\omega)}B\otimes V$ is again an exact sequence where $A\alpha\otimes U\omega$ is pure in $B\otimes V$.

Finally, we consider (7). Remember that if $U=F/H$, F a free group, then the identity mapping of H into F induces a homomorphism of $H\otimes A$ into $F\otimes A$ whose kernel is defined as $\operatorname{Tor}(U, A)$. If $A\xrightarrow{\alpha}B$, then α induces a homomorphism $H\otimes A\to H\otimes B$ under which $\operatorname{Tor}(U, A)$ is mapped into $\operatorname{Tor}(U, B)$; if this is denoted again by α, then we have:

THEOREM 3. 4. *If* (1) *is an exact sequence with $A\alpha$ pure in B, then the sequence*

$$0\to \operatorname{Tor}(U, A)\xrightarrow{\alpha}\operatorname{Tor}(U, B)\xrightarrow{\beta}\operatorname{Tor}(U, C)\to 0 \tag{10}$$

is, for every U, exact and $\operatorname{Tor}(U, A)\alpha$ *is pure in* $\operatorname{Tor}(U, B)$.

It is known [4] that $0\to\operatorname{Tor}(U, A)\to\operatorname{Tor}(U, B)\to\operatorname{Tor}(U, C)\to U\otimes A\to\to U\otimes B\to U\otimes C\to 0$ is an exact sequence. Now if $A\alpha$ is pure in B, then by (8) we conclude that (10) is likewise exact. Let $y\in\operatorname{Tor}(U, B)$; then — as an element of $H\otimes B$ — it has the unique form $y=\sum_i (h_i\otimes b_i)$ where $b_i\in B$ and the h_i belong to a basis of the free group H. Put $h_i=\sum_j m_{ij}g_j$ where the g_j belong to a basis of F. The assumption that $y\in\operatorname{Tor}(U, B)$ means that $\sum_i(\sum_j m_{ij}g_j)\otimes b_i\,(\in F\otimes B)$ vanishes, i. e. $\sum_j(g_j\otimes\sum_i m_{ij}b_i)=0$ and thus $\sum_i m_{ij}b_i=0$ for every j. Assume that for some $x=\sum_i(h_i\otimes a_i)\in\operatorname{Tor}(U, A)$ we have $ny\quad x\alpha$, i. e.

$$n\sum_i (h_i\otimes b_i)=\sum_i (h_i\otimes a_i\alpha).$$

The left and right members are elements of $H \otimes B$ and the h_i belong to a basis of H, therefore equality implies $nb_i = a_i\alpha$ for each i. Now we have the following system of equations:

$$(11) \qquad nx_i = a_i\alpha, \quad \sum_i m_{ij} x_i = 0 \qquad \text{(for every } i, j)$$

with a finite number of unknowns x_i which is satisfied by $x_i = b_i$, that is, (11) is solvable in B. Because of the purity of $A\alpha$ in B, the system (11) has a solution $x_i = d_i\alpha$ with $d_i \in A$ (cf. [7], Theorem 25.5). Since α is an isomorphism between A and $A\alpha$, we have $\sum_i m_{ij} d_i = 0$, thus $z = \sum_i (h_i \otimes d_i)$ $(\in H \otimes A)$ belongs to $\mathrm{Tor}(U, A)$, and it clearly satisfies $n(z\alpha) = x\alpha$. This completes the proof.

§ 4. Hom, Ext and algebraic compactness

Here we intend to show that in certain cases the groups $\mathrm{Hom}(U, V)$ and $\mathrm{Ext}(U, V)$ are algebraically compact. Recall that an abelian group A is called algebraically compact (in the sense of KAPLANSKY [11]) if it is of the form $A = A_0 + \sum_p^* A_p$ where A_0 is a divisible group and, for each prime p, A_p is a module over the p-adic integers without elements of infinite height and is complete in its p-adic topology. BALCERZYK [2] proved:[24] an equivalent definition of an algebraically compact group is that it is a direct summand of every group that contains it as a pure subgroup. By ŁOŚ [14], a group is algebraically compact if and only if it is isomorphic to a direct summand of a complete direct sum of groups $\mathcal{C}(p^k)$ $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$.

First we consider the group Hom.

THEOREM 4.1. *If U is a torsion group, then* $\mathrm{Hom}(U, V)$ *is an algebraically compact reduced group, for every group V.*

The reducedness of $\mathrm{Hom}(U, V)$ can be shown by taking a direct sum F of cyclic p-groups such that $F \to U \to 0$ is exact, whence $0 \to \mathrm{Hom}(U, V) \to \mathrm{Hom}(F, V)$ is again exact and the last group is a complete direct sum of bounded groups.

$\mathrm{Hom}(U, V)$ being the complete direct sum of $\mathrm{Hom}(U_p, V)$ with U_p running over all p-components of U, it suffices to prove[25] that, for a p-group U, $\mathrm{Hom}(U, V)$ is a module over the p-adic integers which contains no

[24] Cf. also Łoś [14]. p-adic topology means that the subgroups $p^k G$ $(k = 1, 2, \ldots)$ of G are taken as neighborhoods of 0.

[25] A complete direct sum of groups is algebraically compact if and only if every component is algebraically compact.

elements ($\neq 0$) divisible by every power of p and which is complete in its p-adic topology. By the preceding paragraph, $A = \mathrm{Hom}(U, V)$ is a subgroup of a complete direct sum of bounded p-groups, thus it contains no elements ($\neq 0$) divisible by every power of p. If π is an arbitrary p-adic integer and $\eta \in A$, then $\pi\eta$ is again a homomorphism of U into V acting according to the rule: $u(\pi\eta) = (\pi u)\eta$ for every $u \in U$. In order to establish completeness, take a Cauchy sequence $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ in A. By definition, to every natural integer k there exists an integer $m(k)$ such that $\eta_n - \eta_{n'} \in p^k A$ whenever $n, n' \geqq m(k)$. Hence the homomorphisms η_n $(n > m(k))$ have the same effect on $U[p^k]$.[26] Now define η as the mapping of U into V which agrees with $\eta_{m(k)}$ on $U[p^k]$, for every k. Then η is a homomorphism of U into V and is obviously the limit of the given Cauchy sequence. Q. e. d.[27]

Let us mention the following consequences.

1°. *If U is a torsion group and W a pure subgroup of V, then* $\mathrm{Hom}(U, W)$ *is a direct summand of* $\mathrm{Hom}(U, V)$. In fact, since $0 \to W \to V$ is an exact sequence, and W is pure in V, the sequence $0 \to \mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Hom}(U, V)$ is exact and $\mathrm{Hom}(U, W)$ is pure in $\mathrm{Hom}(U, V)$ (cf. Theorem 3. 1). Theorem 4. 1 implies the algebraic compactness of $\mathrm{Hom}(U, W)$ whence the statement. — In particular, if V is a p-group and $W = B$ is a basic subgroup of V, then for $U = B$ resp. $U = V$ we get that $\mathrm{Hom}(B, B)$ is a direct summand of $\mathrm{Hom}(B, V)$ resp. $\mathrm{Hom}(V, B)$ is that of $\mathrm{Hom}(V, V)$.

2°. Without making use of the general theory of algebraically compact groups it can be shown immediately that $\mathrm{Hom}(U, V)$ is a direct summand of a complete direct sum of cyclic p-groups whenever U is a torsion group. Indeed, every torsion group U can be imbedded in an exact sequence $0 \to H \to F \to U \to 0$ where F is a direct sum of cyclic p-groups and H is pure in F. Hence we have the exact sequence $0 \to \mathrm{Hom}(U, V) \to \mathrm{Hom}(F, V) \to \to \mathrm{Hom}(H, V)$ where $\mathrm{Hom}(U, V)$ is pure in, hence, by Theorem 4.1, a direct summand of $\mathrm{Hom}(F, V)$. Here $\mathrm{Hom}(F, V)$ is the complete direct sum of $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(p^k), V) \cong V[p^k]$ whence the assertion.

Evidently, if we omit the hypothesis of U being a torsion group, then Theorem 4.1 remains no longer valid [counterexample: $U \cong \mathcal{C}(\infty)$]. But if V is algebraically compact, then so is $\mathrm{Hom}(U, V)$:

THEOREM 4. 2. *If V is algebraically compact, then for any group U,* $\mathrm{Hom}(U, V)$ *is likewise algebraically compact.*

[26] $U[n]$ denotes the set of the elements $u \in U$ satisfying $nu = 0$.

[27] By making use of the results of Homological Algebra, Theorem 4. 1 can be proved by showing that every extension of $\mathrm{Hom}(U, V)$ by the full rational group is splitting and that $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(p^\infty), \mathrm{Hom}(U, V))$ contains no element ($\neq 0$) divisible by every natural integer. (Cf. [7].)

In view of hypothesis there exists a group W such that $V+W=C$ is a complete direct sum of groups of type $\mathcal{C}(p^r)$ $(1 \leqq r \leqq \infty)$. Then

$$\mathrm{Hom}(U, V)+\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, C) \cong \sum{}^{*} \mathrm{Hom}(U, \mathcal{C}(p^r))$$

where $\mathrm{Hom}(U, \mathcal{C}(p^r))$ is p^r-bounded if $r<\infty$ and $\mathrm{Hom}(U, \mathcal{C}(p^\infty))$ is algebraically compact.[28] Since a complete direct sum of algebraically compact groups is algebraically compact and the same holds for a direct summand of an algebraically compact group, we are ready with the proof.

The following consequence may be of some interest:

3°. *If V is an algebraically compact group and B is pure in U, then*

$$\mathrm{Hom}(U, V) \cong \mathrm{Hom}(B, V)+\mathrm{Hom}(U/B, V).$$

By Theorems 3.1 and 4.2 it suffices to verify the exactness of

$$0 \to \mathrm{Hom}(U/B, V) \to \mathrm{Hom}(U, V) \to \mathrm{Hom}(B, V) \to 0.$$

Taking W as in the proof of Theorem 4.2, we see that the exactness has to be proved only for $V \cong \mathcal{C}(p^r)$ $(1 \leqq r \leqq \infty)$. For $r=\infty$ this is a well-known fact. For $r<\infty$ observe that $p^r B$ surely belongs to the kernel of any homomorphism of U into $\mathcal{C}(p^r)$ (and of B into $\mathcal{C}(p^r)$) whence $\mathrm{Hom}(U, \mathcal{C}(p^r)) \cong \mathrm{Hom}(U/p^r B, \mathcal{C}(p^r)) \cong \mathrm{Hom}(U/B+B/p^r B, \mathcal{C}(p^r)) \cong \mathrm{Hom}(U/B, \mathcal{C}(p^r))+\mathrm{Hom}(B/p^r B, \mathcal{C}(p^r)) \cong \mathrm{Hom}(U/B, \mathcal{C}(p^r))+\mathrm{Hom}(B, \mathcal{C}(p^r))$ (cf. Lemma 1).

Now we proceed to the group Ext and prove:

THEOREM 4.3. $\mathrm{Ext}(U, V)$ *is algebraically compact if V is torsion free.*

Let T denote the maximal torsion subgroup of U and put $U/T=W$. Then the exact sequence $0 \to T \to U \to W \to 0$ implies the exactness of

$$\mathrm{Hom}(T, V) \to \mathrm{Ext}(W, V) \to \mathrm{Ext}(U, V) \to \mathrm{Ext}(T, V) \to 0.$$

Here $\mathrm{Hom}(T, V)=0$ and $\mathrm{Ext}(W, V)$ is a divisible group whence

$$\mathrm{Ext}(U, V) \cong \mathrm{Ext}(W, V)+\mathrm{Ext}(T, V).$$

Thus we have only to prove the algebraic compactness of $\mathrm{Ext}(T, V)$. By a known result of EILENBERG and MACLANE,[29] $\mathrm{Ext}(T, V) \cong \mathrm{Hom}(T, D/V)$ where D denotes a minimal divisible group containing the torsion free group V. By Theorem 4.1 (or 4.2), $\mathrm{Hom}(T, D/V)$ is algebraically compact, q. e. d.

If V is not torsion free, then $\mathrm{Ext}(U, V)$ is in general no algebraically compact group. For instance, if U is a torsion group, but no direct sum of

[28] See e. g. [8].

[29] Cf. e. g. [4] or [7].

cyclic groups, then for an appropriate direct sum of cyclic p-groups V it is true that $\mathrm{Ext}(U, V)$ is reduced and contains non-zero elements divisible by every natural integer. However, if we assume that V is algebraically compact, then we have the analogous result:

THEOREM 4.4. *If V is algebraically compact, then so is* $\mathrm{Ext}(U, V)$ *for any group U.*

Proof as that of Theorem 4.2, on using the fact that $\mathrm{Ext}(U, \mathcal{C}(p^r))$ is 0 if $r = \infty$ and is p^r-bounded if $r < \infty$.

In the same way as in 3° we obtain the corollary:

4°. *If V is algebraically compact and B is a pure subgroup of U, then*

$$\mathrm{Ext}(U, V) \sim \mathrm{Ext}(B, V) + \mathrm{Ext}(U/B, V).$$

It is an open question which algebraically compact groups may occur as $\mathrm{Hom}(U, V)$ for a torsion group U or as $\mathrm{Ext}(U, V)$ for a torsion free group V.

Remark. The second part of the present paper will appear in *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959).

References

[1] R. BAER, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. Journ.*, **3** (1937), 68—122.

[2] S. BALCERZYK, On algebraically compact groups of I. Kaplansky. *Fundamenta Math.*, **44** (1957), 91—93.

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chap. III. Algèbre multilinéaire (Paris, 1948).

[4] H. CARTAN—S. EILENBERG, *Homological algebra* (Princeton, 1956).

[5] J. DIEUDONNÉ, Sur les produits tensoriels, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **64** (1948), 101—117.

[6] L. FUCHS, Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen, *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), 29—32.

[7] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).

[8] L. FUCHS, On character groups of discrete abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 133—140.

[9] A. HULANICKI, Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies, *Fundamenta Math.*, **44** (1957), 192—197.

[10] A. HULANICKI, Algebraic structure of compact abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **6** (1958), 71—73.

[11] I. KAPLANSKY, *Infinite abelian groups* (Ann Arbor, 1954).

[12] I. KAPLANSKY, Projective modules, *Annals of Math.*, **68** (1958), 372—377.

[13] Л. Я. Куликов, О прямых разложениях групп, Укр. Мат. Журн., **4** (1952), 230—275 and 347—372.

[14] J. ŁOŚ, Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups, *Fundamenta Math.*, **44** (1957), 84—90.

[15] H. WHITNEY, Tensor products of abelian groups, *Duke Math. Journ.*, **4** (1938), 485—520.

NOTE ON CONVEX FUNCTIONS

By

M. KUCZMA (Kraków)[1]

(Received February 19, 1959)

At first, to fix the terminology, I shall give two definitions:

DEFINITION I. We call a function $f(x)$ convex if the inequality:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

holds for every x and y.

DEFINITION II. We call a set F midpoint-convex if together with points x and y it contains also their arithmetic mean $\frac{x+y}{2}$, i. e.:

$$x \in F,\ y \in F \cdot \supset \cdot \frac{x+y}{2} \in F.$$

I shall prove the following

THEOREM. *A convex function bounded from above on a set E is also bounded from above (by the same constant) on the smallest midpoint-convex set containing the set E.*

PROOF. Given an arbitrary set A, we shall denote by A^* the set of numbers of the form $\frac{x+y}{2}$, where $x \in A$ and $y \in A$. Evidently $A \subset A^*$. If a convex function $f(x)$ is bounded from above by a constant M on a set A, then it is also bounded from above by M on the set A^*. In fact, for $u \in A^*$ there exist numbers x and y belonging to A such that $u = \frac{x+y}{2}$. Hence

$$f(u) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2} \leqq \frac{M+M}{2} = M,$$

what proves that $f(x) \leqq M$ on A^*.

Now let us assume that a function $f(x)$ is convex and

$$f(x) \leqq M \quad \text{for} \quad x \in E.$$

[1] I want to express here my thanks to prof. Á. CSÁSZÁR for his valuable remarks.

We put

$$E_0 \overset{\mathrm{df}}{=} E,$$

$$E_{n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} E_n^*, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

and

$$J(E) \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Evidently

$$f(x) \leqq M \quad \text{for} \quad x \in J(E).$$

To prove our theorem we need only to show that $J(E)$ is the smallest midpoint-convex set containing the set E.[2]

Let x and y be two arbitrary elements of the set $J(E)$. Since the sequence $\{E_n\}$ is increasing, there exists an index N such that $x \in E_N$ and $y \in E_N$. Consequently

$$\frac{x+y}{2} \in E_N^* = E_{N+1} \subset J(E).$$

Thus the set $J(E)$ is midpoint-convex. On the other hand, from the fact that for any midpoint-convex set F and for an arbitrary set $A \subset F$, also $A^* \subset F$, follows that $J(E)$ is the smallest midpoint-convex set containing E. This completes the proof.

COROLLARY. If the smallest midpoint-convex set containing a set E has positive inner measure, then every convex function bounded from above on the set E is continuous.

This corollary follows immediately from the above theorem and from the fact that every convex function bounded from above on a set of positive inner measure is continuous.[3]

[2] See J. W. GREEN—W. GUSTIN, Quasiconvex sets, *Canadian J. Math.*, **2** (1950), 489—507, Th. 1. 1.

[3] A. OSTROWSKI, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, *Jahresb. Deutsch. Math. Ver.*, **38** (1929), 54—62.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES POLYNOMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES

Par

J. ACZÉL

Institut de Mathématique, Université Louis Kossuth, Debrecen

Dédié amicalement à Monsieur le Professeur G. ALEXITS *à l'occasion de son 60-me anniversaire*

(Reçu le 23 février 1959.)

1. Dans une note [2] publiée dans ces Annales, M. ÁKOS CSÁSZÁR déduit de l'équation différentielle

$$Q(x)w'(x) = L(x)w(x), \qquad (Q(x) \neq 0) \tag{1}$$

des poids $w(x)$ des polynomes orthogonaux classiques $p_n(x)$ (où $L(x)$ est un polynome de premier et $Q(x)$ un de second degré au plus) d'abord la formule explicite

$$p_n(x) = w_n^{(n)}(x)/w(x), \qquad (w(x) \neq 0) \tag{2}$$

des p_n, où

$$w_n(x) = w(x)Q(x)^n, \tag{3}$$

et puis leur équation différentielle

$$Q(x)p_n''(x) + (L(x) + Q'(x))p_n'(x) + c_n p_n(x) = 0 \tag{4}$$

par l'intermédiaire du fait qu'aussi les dérivées $p_n'(x)$ forment une suite orthogonale. Les suppositions de M. CSÁSZÁR sont: la positivité de $Q(x)$ et de $w(x)$ à l'intérieur de l'intervalle d'orthogonalité (a, b) fini ou infini et puis

$$\int_a^b w(x)dx < \infty, \quad \lim_{x \to a+0} w(x)Q(x)p(x) = \lim_{x \to b-0} w(x)Q(x)p(x) = 0$$

pour tout polynome $p(x)$.

De cette occasion, faisant suite à l'invitation aimable de Monsieur CSÁSZÁR, nous décrivons ici la voie par laquelle nous déduisons dans nos cours universitaires depuis 1953 l'équation différentielle (4) des formules (1), (2), (3) (cf. aussi [1], [6]). Nous ne supposerons rien de plus que (1), (2), (3), nous n'avons même pas besoin du fait que les p_n sont des polynomes et qu'ils forment une suite orthogonale. — De notre raisonnement il ne résulte pas que les $p_n'(x)$ sont orthogonaux, mais nous ne ferons usage de ce fait non plus. D'autre part nous obtiendrons directement la valeur explicite de la constante c_n dans (4).

2. Nous démontrons en effet le suivant

THÉORÈME. *Toute fonction $p_n(x)$ donnée par la formule* (2), *où les équations* (1) *et* (3) *subsistent pour $w(x)$ et $w_n(x)$, satisfait à l'équation différentielle*

$$Q(x)p_n''(x)+(L(x)+Q'(x))\,p_n'(x)+c_n p_n(x)=0,$$

$$\left(c_n=-nL'(x)-\binom{n+1}{2}Q''(x)\right).$$

DÉMONSTRATION. Nous remarquons tout d'abord qu'il s'ensuit de (1) que $w(x)$ (et d'après (3) $w_n(x)$ aussi) a des dérivées d'ordres arbitraires et (en dérivant) nous avons

$$Q(x)w''(x)+Q'(x)w'(x)=L(x)w'(x)+L'(x)w(x). \tag{5}$$

Nous dérivons maintenant l'équation (3):

$$w_n'(x)=w'(x)Q(x)^n+nw(x)Q(x)^{n-1}Q'(x)$$

et prenons (1) et (3) en considération:

$$Q(x)w_n'(x)=(L(x)+nQ'(x))\,w_n(x).$$

— En prenant la $(n+1)$-ième dérivée de cette dernière équation nous obtenons en vertu de la règle de LEIBNIZ, $L(x)$ étant de premier et $Q(x)$ de deuxième degré au plus,

$$Q(x)w_n^{(n+2)}(x)+(n+1)Q'(x)w_n^{(n+1)}(x)+\binom{n+1}{2}Q''(x)w_n^{(n)}(x)=$$

$$=(L(x)+nQ'(x))w_n^{(n+1)}(x)+(n+1)\;(L'(x)+nQ''(x))\,w_n^{(n)}(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&Q(x)w_n^{(n+2)}(x)-(L(x)-Q'(x))\,w_n^{(n+1)}(x)-\\&-\left((n+1)L'(x)+\binom{n+1}{2}Q''(x)\right)w_n^{(n)}(x)=0.\end{aligned} \tag{6}$$

D'autre part (2) entraîne

$$w_n^{(n)}(x)=w(x)\,p_n(x),\quad w_n^{(n+1)}(x)=w'(x)\,p_n(x)+w(x)\,p_n'(x),$$

$$w_n^{(n+2)}(x)=w''(x)\,p_n(x)+2w'(x)p_n'(x)+w(x)p_n''(x).$$

Ainsi (6) se transforme en

$$\begin{aligned}&Q(x)w(x)p_n''(x)+(2Q(x)w'(x)-L(x)w(x)+Q'(x)w(x))\,p_n'(x)+\\&+(Q(x)w''(x)-L(x)w'(x)+Q'(x)w'(x)-(n+1)L'(x)w(x)-\\&-\binom{n+1}{2}Q''(x)w(x))\,p_n(x)=0\end{aligned}$$

d'où, en prenant (1) et (5) en considération et en divisant par $w(x)$, nous arrivons à

$$Q(x)p_n''(x)+(L(x)+Q'(x))\,p_n'(x)-\left(nL'(x)+\binom{n+1}{2}Q''(x)\right)p_n(x)=0,$$

c. q. f. d.

3. Nous saisissons l'occasion pour compléter la bibliographie de la note [2] de M. CSÁSZÁR par les travaux [3], [4], [5] qui caractérisent les polynomes orthogonaux classiques comme les seules polinomes orthogonaux qui satisfont à des équations différentielles linéaires homogènes de second ordre dont les coefficients, excepté celui du terme d'ordre zéro, sont indépendantes de n.

Bibliographie

[1] J. ACZÉL, Eine Bemerkung über die Charakterisierung der "klassischen" orthogonalen Polynome, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 315—321.

[2] Á. CSÁSZÁR, Sur les polynomes orthogonaux classiques, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **1** (1958), 33—39.

[3] L. FELDMANN, Über durch STURM—LIOUVILLLESche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polynomsysteme, *Publicationes Math. Debrecen*, 3 (1954), 297—304.

[4] L. FELDMANN, On a characterisation of the classical orthogonal polynomals, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), 129—133.

[5] M. MIKOLÁS, A JACOBI-, LAGUERRE- és HERMITE-féle polinomok együttes jellemzéséről, *Mat. Lapok*, **7** (1956), 238—248.

[6] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций. Москва-Ленинград, 1949. §§ VI. 1, 2, VIII. 3, 4.

BEMERKUNGEN ZU DEN GRUNDKONSTRUKTIONEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Von

J. MOLNÁR

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 6. März 1959.)

Es war J. BOLYAI der erste der sich, in seinem berühmten Appendix,[1] mit den geometrischen Konstruktionen der hyperbolischen Geometrie befaßte. Besonders bemerkenswert sind seine Resultate über die Quadratur des Kreises,[2] sowie seine Verfahrungen zu folgenden beiden Grundkonstruktionen der hyperbolischen Ebene:[3]

I. Zu einem vorgegebenen Parallelabstand den Parallelwinkel,

II. Zu einem vorgegebenen Parallelwinkel den Parallelabstand zu konstruiren.

BOLYAIs zweite Konstruktion erscheint in Verhältnis zu der ersten kompliziert, obwohl der Grundgedanke einfach ist: An einem Schenkel des gegebenen Winkels den der Ecke korrespondierende Punkt zu konstruiren. BOLYAI geht in dieser zweiten Grundkonstruktion von einem $\triangle$ Parallelabstand aus, der zu einem größeren Winkel gehört als der vorgegebene.[4] V. F. KAGAN betrachtet, in der russischen Ausgabe des Appendix, die Findung eines solchen Abstandes als ein Tasten.[5] Er weist an die von diesem Mangel freie Konstruktion von F. ENGEL hin, die auf den Engel-Lobatschefskischen Zyklen berüht.[6]

Wir wollen hier zeigen, daß das von KAGAN eingewandte Tasten in einfacher Weise eliminiert werden kann. Anderseits wollen wir eine leicht bemerkbare Form des Engelschen Konstruktionsresultat angeben.

[1] J. BOLYAI, *Appendix. Scientiam spatii veram exibens, etc.*, Marosvásárhely, 1832.

[2] In der hyperbolischen Ebene läßt sich die Quadratur des Kreises für gewisse Kreise ausführen. S. auch H. M. Несторович, О квадратуре круга и циркулатуре квадрата на плоскости Лобаческого, ДАН **63**, 6 (1948).

[3] J. BOLYAI a. a. O.[1] § 34—35. Auf Grund gewisser stereometrischer Überlegungen hat auch F. KÁRTESZI die beidem Grundkonstruktionen gelöst (Két szerkesztési feladat megoldása a hiperbolikus síkon, *Mat. Lapok*, **4** (1953), 87—91). Es sei bemerkt, daß seine zweite Konstruktion, bei geeigneter Reihenfolge der zu konstruirenden Elemente, auch auf das erste Grundkonstruktion angewendet werden kann.

[4] Es sei α der vorgegebene Winkel und $\triangle(\alpha)$ der zugehörige Parallelabstand, so ist $\triangle < \triangle(\alpha)$.

[5] Янош Боляи, *Appendix.* Приложение, Москва—Ленинград 1950, 118.

[6] F. ENGEL, *N. I. Lobatschefskij.* Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers, Leipzig, 1898—1899, 256.

1. Es sei α ein vorgegebener Winkel und $\triangle(\alpha)$ der zugehörige Parallelabstand. Wir wollen einen Abstand $\triangle < \triangle(\alpha)$ konstruiren.

Wir betrachten einen Winkel α mit der Ecke O. A sei ein beliebiger Punkt auf einem Schenkel dieses Winkels und B seine Projektion auf den anderen Schenkel (Fig. 1). Der Abstand $\triangle = OB$, leistet der Ungleichung $\triangle < \triangle(\alpha)$ offenbar Genüge.

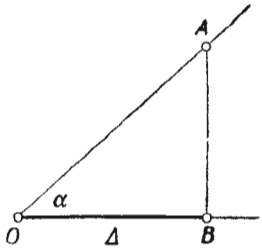


Fig. 1

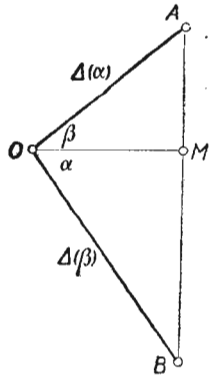


Fig. 2

2. Das Konstruktionsresultat von ENGEL, läßt sich offenbar auch folgendermaßen aussprechen[7]:

Es seien $\triangle(\alpha) = OA$ und $\triangle(\beta) = OB$ die Parallelabstände der Winkel $\alpha = \sphericalangle MOB$ bzw. $\beta = \sphericalangle MOA$. Behauptung: $AB \parallel OM$ (Fig. 2).

[7] Vgl. В. Ф. Каган, Основания геометрии I. Москва—Ленинград, 1949, 226, Н. М. Несторович, Геометрические построения в плоскосте Лобачевского. Москва—Ленинград, 1951, 238—239. Die erste Lösung der Aufgabe 160.

UNTERDECKUNG UND ÜBERDECKUNG DER EBENE DURCH KREISE

Von

J. MOLNÁR

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 31. März 1959.)

Prof. Dr. O. VARGA anläßlich seines 50-ten Geburtstages gewidmet

Setzen wir voraus, daß wir über einen unerschöpflichen Vorrat von Kreisen verfügen deren Radien in einem vorgegebenen Interval $(q, 1)$ liegen. Wir wollen die Ebene mit Hilfe dieses Vorrats am dichtesten unterdecken und am dünnsten überdecken. Wie muss man die Kreise auswählen und anordnen und was ist der Wert der größmöglichen Unterdeckungsdichte $d(q)$ und der kleinstmöglichen Überdeckungsdichte $D(q)$?

In einem mit FEJES TÓTH gemeinsam geschriebenen Aufsatz[1] haben wir für die Funktion $d(q)$ $(0<q\leqq 1)$ eine obere und für $D(q)$ eine untere Schranke $s(q)\,(\geqq d(q))$, bzw. $S(q)\,(\leqq D(q))$ angegeben. Wir werden in diesem Aufsatz für $0{,}12\leqq q\leqq 1$ gute Unterdeckungen und für $0{,}18\leqq q\leqq 1$ gute Überdeckungen konstruiren und dadurch für d eine untere und für D eine obere Schranke δ, bzw. Δ erhalten.[2] In dieser Weise werden in den angegebenen Intervalen die Dichtigkeiten d und D zwischen sehr engen Schranken eingeschlossen (Fig. 1, 2).

Betrachten wir zunächst das Unterdeckungsproblem. Wir legen unseren Konstruktionen gewisse ausgezeichnete Unterdeckungen zu Grunde, die wir mit I, II, ..., XIII bezeichnen (Fig. 3). In der dichtesten Unterdeckung von kongruenten Kreisen $(q=1)$ wird jeder Kreis durch sechs andere berührt (I). Diese Unterdeckung von der Dichte $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ scheint auch für $0{,}645\ldots\leqq q\leqq 1$ die dichteste zu sein. Für $q=0{,}645\ldots$ wird die Dichte $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ auch von der Unterdeckung II erreicht. Von dieser Unterdeckung können wir durch stetige Verkleinerung der „kleinen" Kreise auf die Unterdeckung III übergehen, während die Dichte $\delta(q)$ streng zunimmt. Ebenso wie I und II haben auch die Unterdeckungen III und IV, V und VI, VII und VIII, IX und X, XI und XII

[1] L. FEJES TÓTH—J. MOLNÁR, Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachrichten*, **18** (1958), 236—243.

[2] Auf diese Probleme hat L. FEJES TÓTH meine Aufmerksamkeit gerichtet.

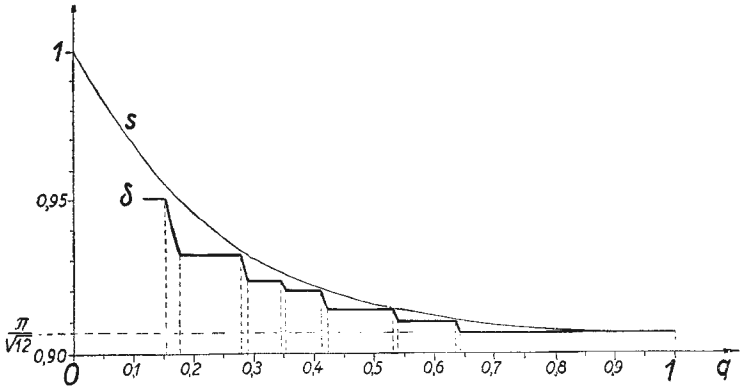

1
0,95
0,90
$\frac{\pi}{\sqrt{12}}$
s
δ
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
q

Fig. 1

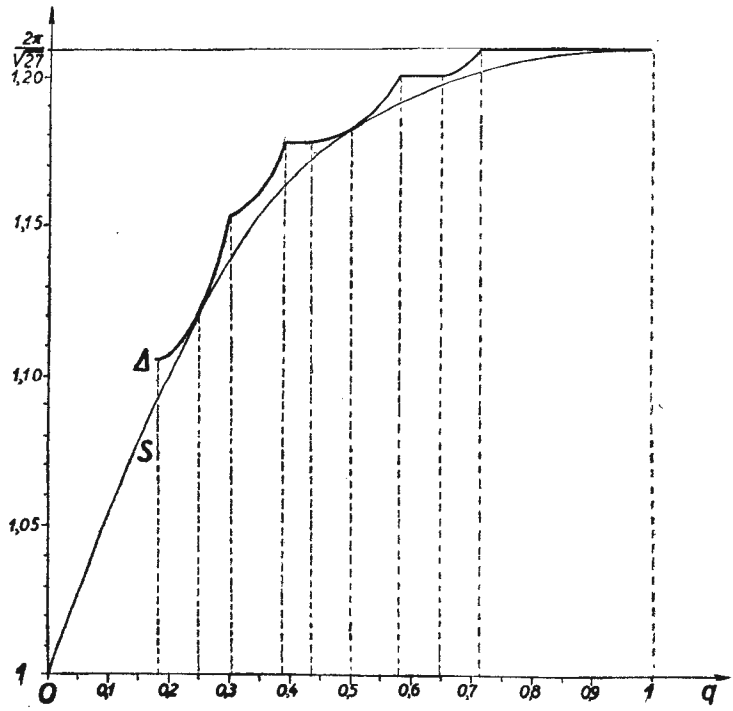
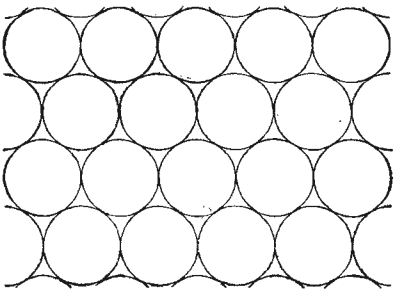
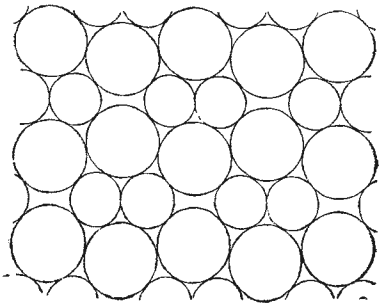

$\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$
1,20
1,15
1,10
1,05
1
Δ
S
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
q

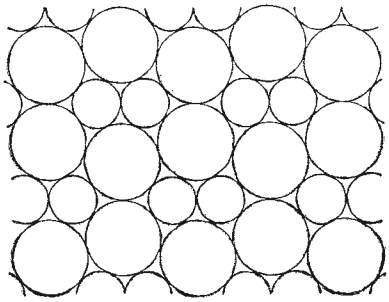
Fig. 2



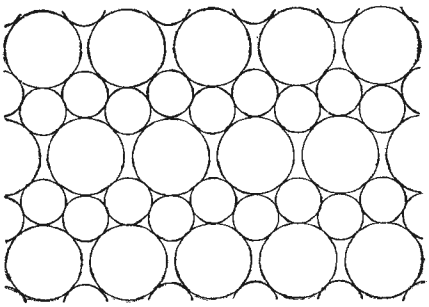
I



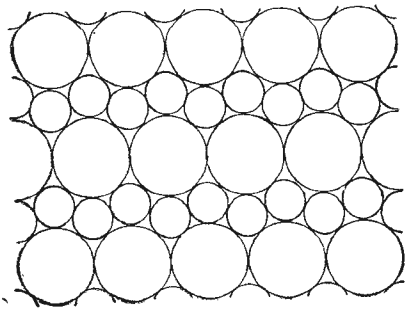
II



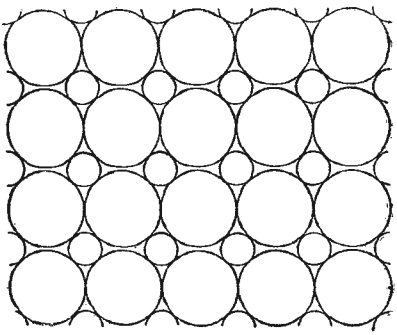
III



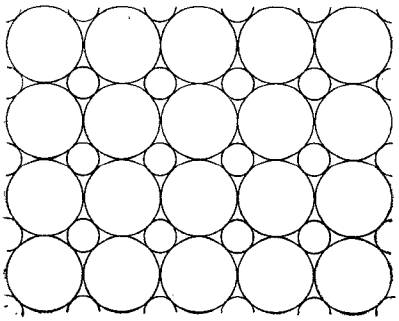
IV



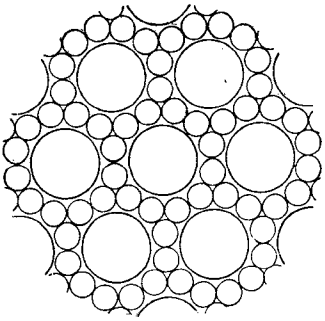
V



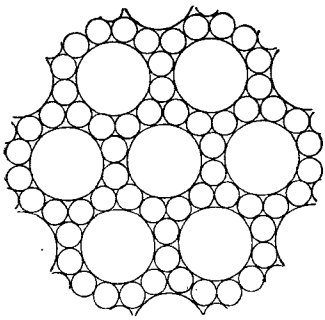
VI



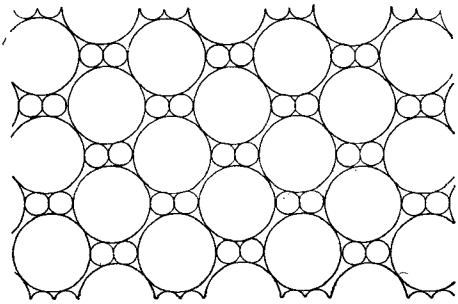
VII



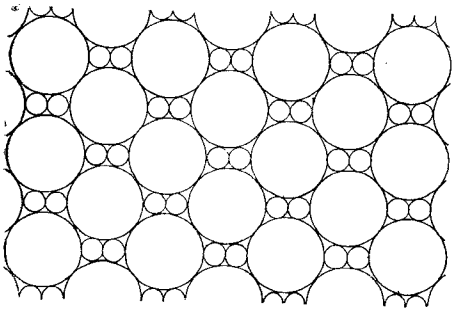
VIII



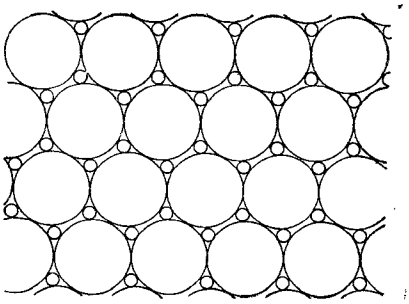
IX



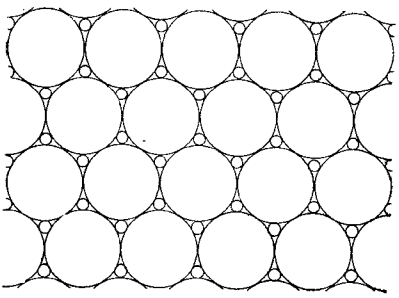
X



XI



XII



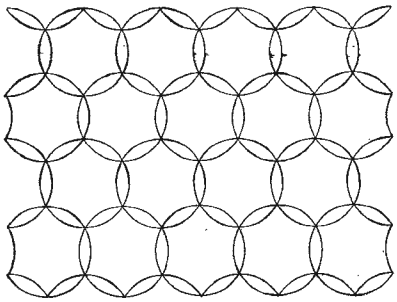
XIII

Fig. 3

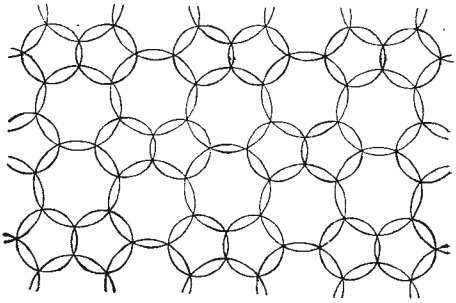
gleiche Dichten. Der Übergang von II zu III, von IV zu V, usw. leuchtet ein. Die folgende Tabelle stellt die Werte von q, $s(q)$ und $\delta(q)$ für die Unterdeckungen I, III, ..., XIII dar.

q	1	0,637...	0,533...	0,414...	0,349...	0,280...	0,154...
$s(q)$	0,9069...	0,9107...	0,9143...	0,9208...	0,9246...	0,9381...	0,9538...
$\delta(q)$	0,9069...	0,9103...	0,9142...	0,9203...	0,9236...	0,9319...	0,9503...

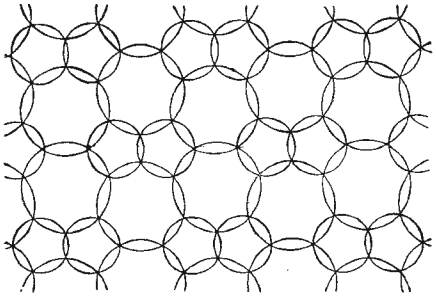
Wenden wir uns jetzt dem Überdeckungsproblem zu. Wir betrachten auch hier gewisse Überdeckungen I, II, ..., IX (Fig. 4). Wir gehen von der dünnsten Überdeckungen durch kongruente Kreise aus (I) bei der jeder Kreis von den anderen in den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks geschnitten wird. Vermutlich ist diese Überdeckung, von der Dichte $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$, auch für $0{,}712\ldots \leqq q \leqq 1$ extremal. Für $q = 0{,}712\ldots$ wird die Dichte $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$ auch von der Überdeckung II



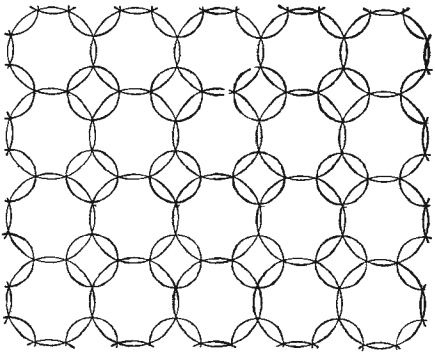
I



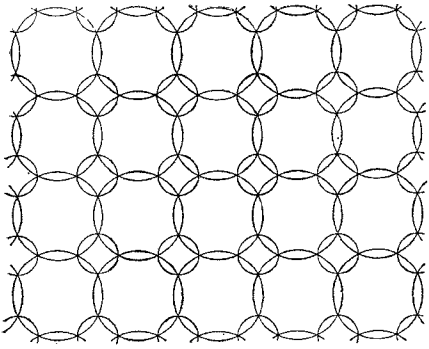
II



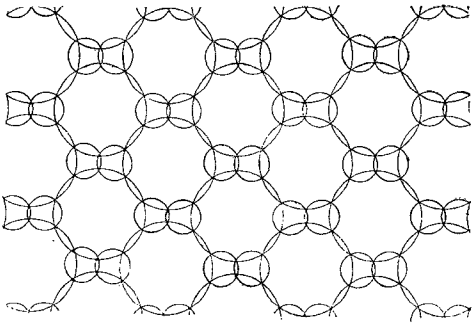
III



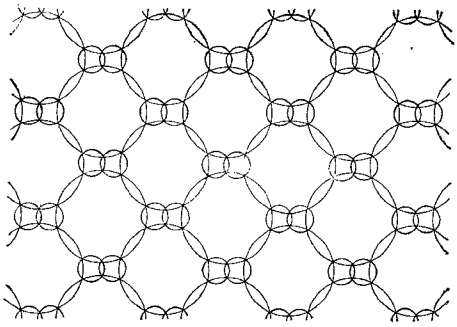
IV



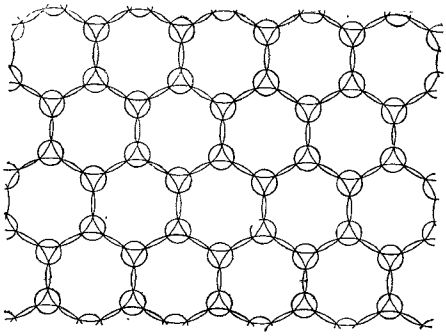
V



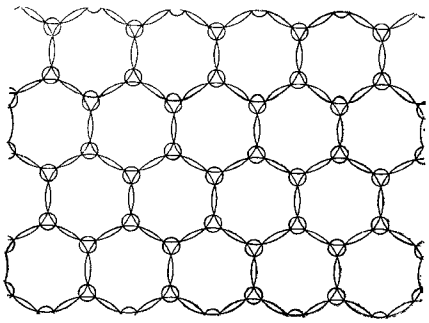
VI



VII



VIII



IX

Fig. 4

erreicht. Von dieser Überdeckung können wir durch stetige Verkleinerung der „kleinen" Kreise auf die Überdeckung III übergehen, während die Dichte $\Delta(q)$ streng abnimmt. In Weiteren ist der einzige Unterschied zwischen der Unterdeckung und Überdeckung, daß unsere Funktion $\Delta(q)$ für $q < 0{,}381\ldots$ streng monoton ist. Es ist beachtenswert, daß $0 \leqq \Delta(0{,}5) - S(0{,}5) < 10^{-5}$ und $0 \leqq \Delta(0{,}25) - S(0{,}25) < 10^{-5}$ und es ist nicht ausgeschlossen, daß für $q = 0{,}5$ und $q = 0{,}25$

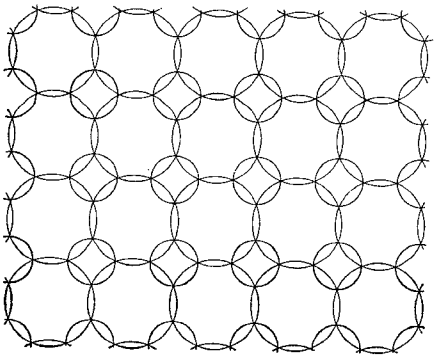


Fig. 5

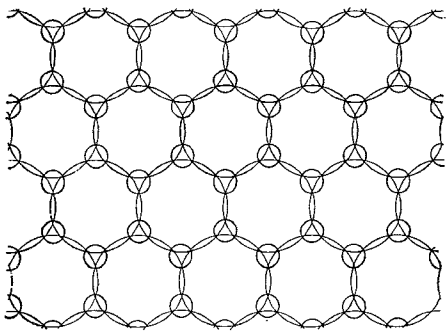


Fig. 6

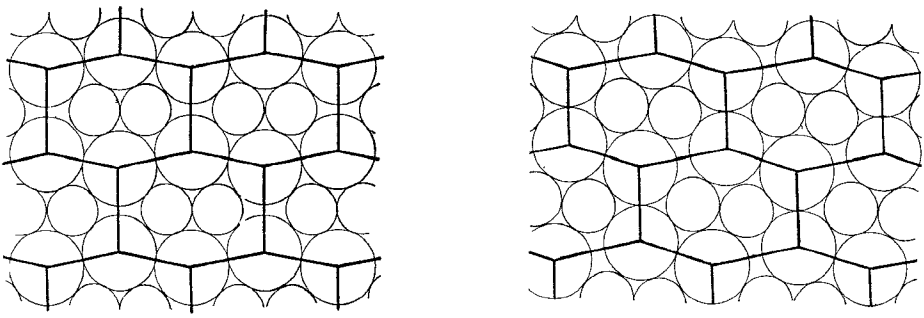


Fig. 7

unsere Konstruktionen (Fig. 5,6) exakte Schranken liefern, daß also $D(0{,}5) = \Delta(0{,}5) = S(0{,}5)$ und $D(0{,}25) = \Delta(0{,}25) = S(0{,}25)$ ausfällt.[3] Man bemerke dagegen, daß die den Überdeckungen vom Typus IV, V, VIII, IX entsprechende Überdeckungen bei unseren Konstruktionen nicht auftreten, da die Überdeckungen von Typus III, IV, V, VI sich als bessere erweisen. Deshalb führt

[3] Die entsprechenden Überdeckungen stimmen nicht mit dem System der Flächenumkreise des halbregulären Mosaiks (4, 8, 8) und (3, 12, 12) überein. In diesen Fällen ist nämlich $q = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 0{,}535\ldots$ und $q = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}} = 0{,}298\ldots$.

das Unterdeckungsproblem in den untersuchten Intervalen zu manigfaltigeren Kreisanordnungen als das Überdeckungsproblem. Die folgende Tabelle stellt die Werte von q, $S(q)$, $\Delta(q)$ für die Überdeckungen I, III, V, VII (VIII) und für die zu $q=0{,}5$ und $q=0{,}25$ gehörige Überdeckungen dar.

q	1	0,649...	0,5	0,435...	0,306...	0,25
$S(q)$	1,2091...	1,197...	1,18180...	1,170...	1,1344...	1,12164...
$\Delta(q)$	1,2091...	1,2007...	1,18180...	1,1780...	1,1522...	1,12164...

Zum Schluß sei bemerkt, daß die Kreisanordnungen, die die Dichten $\delta(q)$ und $\Delta(q)$ ergeben im allgemeinen nicht eindeutig sind. So haben z. B. die Unterdeckungen I und II oder etwa die Überdeckungen VI und VII gleiche Dichten. Ein weiteres Beispiel ist in Fig. 7 dargestellt. Diese Figur zeigt, daß die Unterdeckung II durch eine andere eben so gute ersetzt werden kann.

ÜBER DIE PARTIELL-REKURSIVITÄT DER DURCH GRAPHSCHEMATA DEFINIERTEN ZAHLENTHEORETISCHEN FUNKTIONEN

Von

R. PÉTER

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 13. März 1959.)

1. Ich erhielt die beehrende Aufforderung, für das Heft „Festschrift für Prof. Bernays" der *Dialectica* einen Beitrag zu senden. Aus diesem Anlaß schickte ich eine Arbeit ein, worin ich bewiesen habe, daß die partiell-rekursiven Funktionen identisch sind mit den durch „Normalschemata" definierbaren zahlentheoretischen Funktionen, wobei unter Normalschema ein einfacher Spezialfall der durch Л. А. Калужнин eingeführten Graphschemata zu verstehen ist. Daraus ergaben sich auch manche für die Grundlagenforschung interessante Folgerungen.

Inzwischen hatte ich Gelegenheit mit А. П. Ершов über dieses Thema persönlich zu sprechen, und ich habe von ihm erfahren, daß auch von ihm eine Arbeit im Erscheinen ist, die in gewissen wesentlichen Punkten mit meiner Arbeit übereinstimmt. Jedoch ihm ist nicht vollkommen gelungen zu jeder beliebigen zahlentheoretischen Funktion $\mathfrak{G}$, welche durch eines der bei ihm verwendeten Graphschemata definiert wird, eine damit identische partiell-rekursive Funktion vorzuzeigen; nur eine solche Funktion φ, die an allen Stellen, wo $\mathfrak{G}$ definiert ist, denselben Wert als $\mathfrak{G}$ annimmt.

Ich habe meinen Beweis aus diesem Gesichtspunkt noch einmal durchgesehen, und konstatiert, daß bei mir (abgesehen von einem gleich zu erwähnenden Mangel)

$$\mathfrak{G} \simeq \varphi$$

gilt; d. h. φ ist genau an denselben Stellen definiert als $\mathfrak{G}$, und überall, wo beide definiert sind, nehmen sie denselben Wert an. In meinem Beweis entdeckte ich aber einen aus Versehen stammenden Mangel: den „Mathematischen Ecken" meiner Normalschemata habe ich gewisse zahlentheoretische Funktionen zugeordnet, aber ich habe vergessen, dasselbe auch bei den „logischen Ecken" zu tun. Ich schrieb darüber den Herausgebern des Festschriftes, sie waren aber nicht geneigt, diese kurze Verbesserung zu meiner bereits umgebrochenen Arbeit hinzuzufügen. Deshalb möchte ich in dieser Arbeit den verbesserten Beweis wiederholen.

Betreffend der grundsätzlichen Kentnisse über rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch *Rekursive Funktionen*, (Budapest, Akademischer Verlag, 1957), 2., erweiterte Auflage.

2. Ein Normalschema ist ein endlicher, zusammenhängender, gerichteter Graph, mit zwei ausgezeichneten Knotenpunkten (die Knotenpunkte werde ich kurz „Ecken" nennen): in die Ecke E (Eingang) läuft keine Kante hinein; aus der Ecke A (Ausgang) läuft keine Kante hinaus; zu jeder anderen Ecke gehören sowohl einlaufende als auch hinauslaufende Kanten. Genauer gehört zu jeder Ecke ausser A genau eine hinauslaufende Kante, oder es gehören zu ihr genau zwei hinauslaufende Kanten; die ersteren Ecken und auch A werden *mathematische Ecken* genannt, die letzteren *logische Ecken*. Einer der beiden Kanten, die aus einer logischen Ecke hinauslaufen, wird der logische Wert $\uparrow$ (wahr) zugeordnet, der anderen der logische Wert $\downarrow$ (falsch).

Jeder mathematischen Ecke ist eine mathematische Funktion, eine sogenannte *Ausgangsfunktion* zugeordnet. Eine Ausgangsfunktion ist für ein gewisses l für l-tupeln natürlicher Zahlen definiert, und nimmt auch als Werte natürliche Zahlentupeln an; sie ist von der Form

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r})$$

oder

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, 0)$$

oder

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, n'_{i_{r+1}}),$$

wobei jede der Variablen $n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, n_{i_{r+1}}$ eine bestimmte der Variablen $n_1, \ldots, n_l$ ist, und m' die auf m folgende natürliche Zahl bedeutet. Jeder logischen Ecke ist mit einem bestimmten l eine logische Funktion der Form

$$\Gamma(n_1, \ldots, n_l) \equiv n_u = n_v$$

zugeordnet, wo für $n_1, \ldots, n_l$ wiederum natürliche Zahlen gesetzt werden können, und n_u, n_v bedeuten je eine bestimmte der Variablen $n_1, \ldots, n_l$. Die Funktionen werden hier immer als einstellig betrachtet, wobei aber die Variable natürliche Zahlentupeln durchläuft.

Nun liefert das ganze Graphschema $\mathfrak{G}$, falls die der Ecke A zugeordnete Funktion natürliche Zahlen (1-tupeln) als Werte annimmt, die Werte einer für gewisse k-tupeln $m = (n_1, \ldots, n_k)$ definierten zahlentheoretischen Funktion $\mathfrak{G}(m)$, und zwar auf folgende Weise: Sei $m = (n_1, \ldots, n_k)$ eine bestimmte natürliche Zahlen-k-tupel. Ist E eine mathematische Ecke, zu welcher die Ausgangsfunktion α gehört, und ist $\alpha(m) = m_1$, so ordnen wir dieser Ecke den Wert m_1 zu und gehen auf der einzigen aus E hinauslaufenden Kante weiter; und in der nächsten Ecke verfahren wir ähnlich mit m_1 statt m. Ist E eine logische Ecke, und nimmt die ihr zugeordnete logische Funktion

Γ an der Stelle m einen der logischen Werte $\uparrow$ und $\downarrow$ an, so ordnen wir dieser Ecke den Wert m zu und gehen auf jener Kante weiter, welcher der Wert $\Gamma(m)$ zugeordnet wurde; in der nächsten Ecke verfahren wir dann ähnlich mit m. Usw. Gelangen wir zu einer Ecke, welcher bereits früher ein Wert zugeordnet wurde, dann soll dieser Wert im Sinne der vorangehenden Vorschrift abgeändert werden. Es ist möglich, daß das Verfahren irgendwo, noch bevor man A erreicht, stecken bleibt: z. B. gleich bei dem ersten Schritt, wenn m nicht zum Definitionsbereich von α bzw. Γ gehört (d. h. wenn diese für l-tupeln definiert ist, wobei $l \neq k$). Es kann auch vorkommen, daß in der Fortsetzung des Verfahrens ein Kreisweg unendlich oft beschrieben wird. Falls aber das Verfahren in endlich vielen Schritten zur Ecke A führt, mit einem Wert, für den die zu A gehörige mathematische Funktion definiert ist (hier muß das Verfahren stecken bleiben, da aus A keine Kante hinausführt), so erhalten wir eindeutig einen zu A geordneten Wert n. In diesem Fall sagen wir, daß $\mathfrak{G}(m)$ an der Stelle $m = (n_1, \ldots, n_k)$ definiert ist, und den Wert n annimmt.

Ich habe in meiner genannten Arbeit bewiesen, daß sämtliche partiell-rekursive Funktionen durch Normalschemata von ähnlicher topologischer Struktur definiert werden können. In den Folgenden gehe ich ausführlich auf den Beweis der Umkehrung dieser Behauptung ein.

3. Sei also durch ein Graphschema $\mathfrak{G}$ eine k-stellige zahlentheoretische Funktion definiert; ich werde eine partiell-rekursive Funktion $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ konstruieren, die damit identisch ist.

Die Ausgangsfunktionen, die den Ecken

$$E = E_1, E_2, \ldots, E_s = A$$

von $\mathfrak{G}$ zugeordnet sind, sind für gewisse l-tupeln natürlicher Zahlen definiert, wobei $l = 1, 2, 3, \ldots$ sein kann, und auch als Werte nehmen sie gewisse l-tupeln natürlicher Zahlen an. Sei M die Menge sämtlicher l-tupeln natürlicher Zahlen für $l = 1, 2, 3, \ldots$

Den l-tupeln können ein-eindeutig die natürlichen Zahlen zugeordnet werden, und zwar in primitiv-rekursiver Weise. Es gibt nämlich für alle l primitiv-rekursive Funktionen

$$\sigma^{(l)}(n_1, \ldots, n_l), \quad \varrho_1^{(l)}(n), \ldots, \varrho_l^{(l)}(n)$$
$$(\text{dabei ist } \sigma^{(1)}(n_1) = n_1 \quad \text{und} \quad \varrho_1^{(1)}(n) = n),$$

wo dem l-tupel $(n_1, \ldots, n_l)$ der Wert $\sigma^{(l)}(n_1, \ldots, n_l)$ zugeordnet werden kann, wobei die natürliche Zahl n dem l-tupel $(\varrho_1^{(l)}(n), \ldots, \varrho_l^{(l)}(n))$ zugeordnet wird, so daß

$$\sigma^{(l)}(\varrho_1^{(l)}(n), \ldots, \varrho_l^{(l)}(n)) = n$$

und

$$\varrho_1^{(l)}(\sigma^{(l)}(n_1, \ldots, n_l)) = n_1, \ldots, \varrho_l^{(l)}(\sigma^{(l)}(n_1, \ldots, n_l)) = n_l$$

gilt.

Nun soll $M = (a_1, a_2, \ldots)$ diejenige Anordnung der Elemente von M bedeuten, wobei

$$n = a_{2n+1}, \quad (n_1, n_2) = a_{2(2\sigma^{(2)}(n_1, n_2)+1)},$$

$$(n_1, n_2, n_3) = a_{2^2(2\sigma^{(3)}(n_1, n_2, n_3)+1)}, \ldots$$

gilt.

Den mathematischen Ecken von $\mathfrak{S}$ können nun folgenderweise zahlentheoretische Funktionen zugeordnet werden: gehört zu einer solchen Ecke die mathematische Funktion α, dann ordnen wir dieser Ecke die zahlentheoretische Funktion

$$\beta(n) = \begin{cases} m, & \text{falls } \alpha(a_n) = a_m \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls } \alpha(a_n) \text{ nicht definiert ist} \end{cases}$$

zu.

Da a_n nur für $n > 0$ definiert ist, ist $\beta(0) = 0$, und für alle n, für welche $\alpha(a_n)$ definiert ist, ist $\beta(n) > 0$. Es gilt also dann und nur dann $\beta(n) \neq 0$, wenn $\alpha(a_n)$ definiert ist.

$\beta(n)$ ist primitiv-rekursiv. Denn nehmen wir an, daß α für l-tupeln definiert ist. Dann bedeutet die Fallunterscheidung in der Definition von $\beta(n)$, daß n genau durch die $l-1$-te Potenz von 2 teilbar ist, oder nicht; und dies ist bekanntlich je eine primitiv-rekursive Beziehung. Als Ausgangsfunktion kann α von einer der folgenden Formen sein:

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}),$$

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, 0)$$

oder

$$\alpha(n_1, \ldots, n_l) = (n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, n'_{i_{r+1}}),$$

wobei jede der Variablen $n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}, n_{i_{r+1}}$ eine bestimmte der Variablen $n_1, \ldots, n_l$ ist. Aus $a_n = (n_1, \ldots, n_l)$, also $n = 2^{l-1}(2\sigma^{(l)}(n_1, \ldots, n_l) + 1)$ erhält man für jedes l

$$\sigma^{(l)}(n_1, \ldots, n_l) = \frac{\frac{n}{2^{l-1}} - 1}{2} = \left[\frac{\left|\left[\frac{n}{2^{l-1}}\right] - 1\right|}{2}\right]$$

(wobei $[a]$ die größte, a nicht übersteigende natürliche Zahl bedeutet), als eine primitiv-rekursive Funktion $\delta^{(l)}(n)$ von n. Im ersten Fall ist dann

$$\beta(n) = \begin{cases} 2^{r-1}(2\sigma^{(r)}(\varrho_{i_1}^{(l)}(\delta^{(l)}(n)), \ldots, \varrho_{i_r}^{(l)}(\delta^{(l)}(n))) + 1), & \text{falls } 2^{l-1} | n \text{ und } 2^l \nmid n \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

im zweiten Fall

$$\beta(n)=\begin{cases} 2^r(2\sigma^{(r+1)}(\varrho_{i_1}^{(l)}(\delta^{(l)}(n)),\ldots,\varrho_{i_r}^{(l)}(\delta^{(l)}(n)),0)+1), & \text{falls } 2^{l-1}|n \text{ und } 2^l\nmid n \\ 0 \quad \text{sonst}; \end{cases}$$

und im dritten Fall

$$\beta(n)=\begin{cases} 2^r(2\sigma^{(r+1)}(\varrho_{i_1}^{(l)}(\delta^{(l)}(n)),\ldots,\varrho_{i_r}^{(l)}(\delta^{(l)}(n)),(\varrho_{i_{r+1}}^{(l)}(\delta^{(l)}(n)))')+1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls } 2^{l-1}|n \text{ und } 2^l\nmid n \\ 0 \quad \text{sonst}; \end{cases}$$

und diese Definitionen ergeben $\beta(n)$ in jedem Fall als eine primitiv-rekursive Funktion.

Ähnlich sei einer logischen Funktion Γ, welche für l-tupeln definiert ist, die primitiv-rekursive Funktion

$$\gamma(n)=\begin{cases} n, & \text{falls } 2^{l-1}|n \text{ und } 2^l\nmid n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zugeordnet. So gilt $\gamma(n)\neq 0$ dann und nur dann, wenn $\Gamma(a_n)$ definiert ist.

4. Sei nun $a_n=(n_1,\ldots,n_k)$ ein k-tupel, für das $\mathfrak{G}(a_n)$ definiert ist. Das Graphschema $\mathfrak{G}$ liefert also in endlich vielen Schritten den Wert $\mathfrak{G}(a_n)=\mathfrak{G}(n_1,\ldots,n_k)$. Seien die Indizes der dabei benutzten mathematischen Ecken, in der Reihenfolge ihrer Verwendung

$$j_1, j_2, \ldots, j_t = s.$$

Dann ist

$$\mathfrak{G}(n_1,\ldots,n_k)=\alpha_{j_t}(\ldots\alpha_{j_2}(\alpha_{j_1}(n_1,\ldots,n_k))\ldots),$$

wobei jede der auftretenden Funktionen α_j definiert ist an der betrachteten Stelle. Der Wert der rechten Seite, als ein Wert einer zahlentheoretischen Funktion, muß eine natürliche Zahl m sein. In unserer Anordnung ist

$$m=a_{2m+1} \quad \text{und} \quad (n_1,\ldots,n_k)=a_{2^{k-1}(2\sigma^{(k)}(n_1,\ldots,n_k)+1)}.$$

Nach der Definition der entsprechenden Funktionen β gilt also

$$\beta_{j_t}(\ldots\beta_{j_2}(\beta_{j_1}(2^{k-1}(2\sigma^{(k)}(n_1,\ldots,n_k)+1)))\ldots)=2m+1=2\mathfrak{G}(n_1,\ldots,n_k)+1$$

(dabei ist der Wert jeder auftretenden Funktion β_j an der betrachteten Stelle von 0 verschieden), und daher

$$\mathfrak{G}(n_1,\ldots,n_k)=\left[\frac{|\beta_{j_t}(\ldots\beta_{j_2}(\beta_{j_1}(2^{k-1}(2\sigma^{(k)}(n_1,\ldots,n_k)+1)))\ldots)-1|}{2}\right].$$

Um $\mathfrak{G}(n_1,\ldots,n_k)$ zu erhalten, muß hier noch die Folge

$$j_1, j_2, \ldots, j_t$$

bestimmt werden. Dazu muß aber das ganze Wirken von $\mathfrak{G}$, auch in den logischen Ecken, näher betrachtet werden.

5. Zu jeder der logischen Ecken E_i gehört eine logische Funktion der Form

$$\Gamma_i(n_1, \ldots, n_{l_i}) \equiv n_{u_i} = n_{v_i}.$$

(Wegen der späteren Anwendung bemerke ich, daß hier für $a_n = (n_1, \ldots, n_{l_i})$

$$n = 2^{l_i - 1}(2\sigma^{(l_i)}(n_1, \ldots, n_{l_i}) + 1) \quad \text{und daher} \quad \sigma^{(l_i)}(n_1, \ldots, n_{l_i}) = \delta^{(l_i)}(n)$$

ist, also

$$\Gamma_i(a_n) = \varrho_{u_i}^{(l_i)}(\delta^{(l_i)}(n)) = \varrho_{v_i}^{(l_i)}(\delta^{(l_i)}(n)).$$

Da i hier nur endlich viele (höchstens $s-1$) Werte annehmen kann, so lassen sich $\sigma^{(l_i)}(n_1, \ldots, n_{l_i})$, $\delta^{(l_i)}(n)$, $\varrho_{u_i}^{(l_i)}(n)$ und $\varrho_{v_i}^{(l_i)}(n)$ auch in Abhängigkeit von l_i als primitiv-rekursive Funktionen definieren.)

Dabei ist $0 < u_i, v_i \leqq l_i$; und $l(i) = l_i$, $u(i) = u_i$ und $v(i) = v_i$ lassen sich hier als primitiv-rekursive Funktionen definieren, da sie von endlich vielen Fallunterscheidungen abhängig sind.

Aus demselben Grund sind auch

$$\nu(i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < i \leqq s \text{ und } E_i \text{ eine mathematische Ecke ist} \\ 1, & \text{falls } 0 < i \leqq s \text{ und } E_i \text{ eine logische Ecke ist} \\ \text{und etwa } 2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\tau(i) = \begin{cases} j, & \text{falls } \nu(i) = 0 \text{ und eine Kante von } E_i \text{ nach } E_j \text{ führt} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\varkappa(i) = \begin{cases} j, & \text{falls } \nu(i) = 1 \text{ und eine mit } \uparrow \text{ bezeichnete Kante von } E_i \text{ nach } E_j \text{ führt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\lambda(i) = \begin{cases} j, & \text{falls } \nu(i) = 1 \text{ und eine mit } \downarrow \text{ bezeichnete Kante von } E_i \text{ nach } E_j \text{ führt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursive Funktionen von i.

Nach unserer Annahme gibt es nun zu $(n_1, \ldots, n_k)$ ein Weg über gewisse Ecken

$$E_1 = E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r} = E_s,$$

auf welcher der Wert $\mathfrak{G}(n_1, \ldots, n_k)$ sukzessiv berechnet wird; und damit kann die Berechnung unseres

$$(*) \qquad \beta_{j_t}(\ldots \beta_{j_2}(\beta_{j_1}(2^{k-1}(2\sigma^{(k)}(n_1, \ldots, n_k) + 1))) \ldots)$$

parallel laufen. Die „Zwischenwerte" von (*), die bei der sukzessiven Berechnung vorkommen, seien durch

$$\omega(m, n_1, \ldots, n_k)$$

bezeichnet. Sei also zuerst

$$\omega(0, n_1, \ldots, n_k) = 2^{k-1}(2\sigma^{(k)}(n_1, \ldots, n_k) + 1).$$

Mit diesem Wert kommen wir an $E_1 = E_{i_1}$ heran; hier wird $\omega(1, n_1, \ldots, n_k)$ gebildet, usw. Zu $E_{i_{m+1}}$ gelangen wir also mit dem Wert $\omega(m, n_1, \ldots, n_k)$, und hier wird daraus $\omega(m+1, n_1, \ldots, n_k)$ folgenderweise gebildet:

$$\omega(m+1, n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} \beta_{i_{m+1}}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k)), & \text{falls} \quad \nu(i_{m+1}) = 0 \\ \gamma_{i_{m+1}}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k)), & \text{falls} \quad \nu(i_{m+1}) = 1 \\ \text{und etwa } 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist der mit (*) bezeichnete Wert $\omega(r, n_1, \ldots, n_k)$.

Sei

$$\beta(i, n) = \begin{cases} \beta_i(n), & \text{falls} \quad \nu(i) = 0 \\ \text{und etwa } 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \gamma(i, n) = \begin{cases} \gamma_i(n), & \text{falls} \quad \nu(i) = 1 \\ 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

so sind $\beta(i, n)$ und $\gamma(i, n)$ primitiv-rekursiv; und in der vorherigen Definition kann $\beta_{i_{m+1}}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k))$ durch $\beta(i_{m+1}, \omega(m, n_1, \ldots, n_k))$ und $\gamma_{i_{m+1}}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k))$ durch $\gamma(i_{m+1}, \omega(m, n_1, \ldots, n_k))$ ersetzt werden. Nun haben wir noch i_m, das auch von $n_1, \ldots, n_k$ abhängt, als eine Funktion $\iota(m, n_1, \ldots, n_k)$ zu definieren. Da i_0 nicht eingeführt wurde, kann dabei $\iota(0, n_1, \ldots, n_k)$ beliebig z. B. als

$$\iota(0, n_1, \ldots, n_k) = 0$$

definiert werden. Ferner ist für alle $n_1, \ldots, n_k$

$$\iota(1, n_1, \ldots, n_k) = 1,$$

und für $m \geqq 1$, wenn i_m wieder als Abkürzung für $\iota(m, n_1, \ldots, n_k)$ verwendet wird:

$$\iota(m+1, n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} \tau(i_m), & \text{falls} \quad \nu(i_m) = 0 \\ \varkappa(i_m), & \text{falls} \quad \nu(i_m) = 1 \quad \text{und} \\ & \varrho^{(l(i_m))}_{u(i_m)}(\delta^{(l(i_m))}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k))) \\ & = \varrho^{(l(i_m))}_{v(i_m)}(\delta^{(l(i_m))}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k))) \\ \lambda(i_m), & \text{falls} \quad \nu(i_m) = 1 \quad \text{und} \\ & \varrho^{(l(i_m))}_{u(i_m)}(\delta^{(l(i_m))}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k))) \neq \\ & \neq \varrho^{(l(i_m))}_{v(i_m)}(\delta^{(l(i_m))}(\omega(m, n_1, \ldots, n_k))) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

So erhält man für $\iota(m, n_1, \ldots, n_k)$ und $\omega(m, n_1, \ldots, n_k)$ simultane Rekursionen, woraus sich beide Funktionen als primitiv-rekursive Funktionen ergeben.

6. Das Wirken von $\mathfrak{G}$ wurde derart festgelegt, daß man auf dem geschilderten Weg ein einziges mal zu E_s gelangt, mit einem Wert, für den die zu E_s gehörige Funktion definiert ist (und hier stecken bleibt). Es gibt also zu $(n_1, \ldots, n_k)$ ein einziges r, so daß die Beziehung

$$\mathrm{B}(r, n_1, \ldots, n_k) = (\iota(r, n_1, \ldots, n_k) = s \quad \text{und} \quad \omega(r, n_1, \ldots, n_k) \neq 0)$$

gilt. Nach den Vorherigen ist das eine primitiv-rekursive Beziehung. Das kleinste (hier das einzige) solche r wird durch

$$\mu_r[\mathrm{B}(r, n_1, \ldots, n_k)]$$

bezeichnet. Und nach den Vorherigen ist

$$\mathfrak{G}(n_1, \ldots, n_k) = \left[\frac{|\omega(\mu_r[\mathrm{B}(r, n_1, \ldots, n_k)], n_1, \ldots, n_k) - 1|}{2}\right].$$

Das gilt für alle k-tupeln $(n_1, \ldots, n_k)$, für welche $\mathfrak{G}(n_1, \ldots, n_k)$ definiert wird. Für k-tupeln, für welche $\mathfrak{G}(n_1, \ldots, n_k)$ nicht definiert wird, ist auch $\mu_r[\mathrm{B}(r, n_1. \ldots, n_k)]$ nicht definiert. Nun ist aber

$$(**) \qquad \varphi(n_1, \ldots, n_k) \simeq \left[\frac{|\omega(\mu_r[\mathrm{B}(r, n_1, \ldots, n_k)], n_1, \ldots, n_k) - 1|}{2}\right]$$

eine partiell-rekursive Funktion. Wird $\mathfrak{G}(n_1, \ldots, n_k)$ für alle k-tupeln $(n_1, \ldots, n_k)$ definiert, so gibt es zu jedem k-tupel $(n_1, \ldots, n_k)$ ein r, für welches $\mathrm{B}(r, n_1, \ldots, n_k)$ besteht; und so wird $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ durch $(**)$ mit $=$ statt $\simeq$ als eine allgemein-rekursive Funktion definiert.

Damit ist die Behauptung bewiesen: *die partiell-rekursiven Funktionen stimmen mit den durch Normalschemata definierbaren zahlentheoretischen Funktionen überein; und darunter die allgemein-rekursiven Funktionen $\varphi(n_1, \ldots, n_k)$ mit solchen, deren Werte durch ein Normalschema für alle natürlichen Zahlen-k-tupeln angegeben werden.*

Auf allgemeinere Graphschemata, die in meiner erwähnten Arbeit auch diskutiert wurden, gehe ich hier nicht ein.

ÜBER EIN ELEMENTARGEOMETRISCHES PROBLEM

Von

F. KÁRTESZI

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 31. März 1959.)

Die Vorliegende Arbeit bezieht sich auf eine Fragestellung des Verfassers im Rahmen seines elementargeometrischen Seminars (im Studienjahr 1958/59).

Unter einer Stützgeraden eines konvexen Polygons verstehen wir eine Gerade, die mindestens einen Punkt des Polygons enthält, aber eine der von ihr erzeugten zwei offenen Halbebenen keinen Punkt desselben aufweist. Unter einem Stützstreifen eines konvexen Polygons verstehen wir den von zwei parallelen Stützgeraden begrenzten Streifen. Der größte gemeinsame Teil zweier auf einander senkrechter Stützstreifen ist ein *Stützrechteck* des Polygons; ist dies speziell ein Quadrat, dann soll es *Stützquadrat* heißen. Wenn eine Seite des Stützrechtecks eine Seite des Polygons enthält, nennen wir es ein *osculierendes Stützrechteck;* wir sagen, daß ein solches Rechteck die genannte Seite des Polygons osculiert.

Nehmen wir nun auf einen Moment anstatt des Polygons ein begrenztes konvexes Bereich, dann können wir ein Bereich konstanter Breite so charakterisieren, daß alle seine Stützrechtecke kongruente Quadrate sind.[1] Auf die Kongruenz Verzicht leistend und nur bei jener Forderung bestehend, daß sämtliche Stützrechtecke Quadrate seien, kommen wir zu einer Verallgemeinerung des Begriffes eines Bereiches konstanter Breite: Zum Begriffe der *mit Quadraten umhüllten Bereiche.* Das Quadrat als Beispiel beweist die Existenz eines mit Quadraten umhüllten Bereichs, sogar Polygons, das nicht konstanter Breite ist. (Es ist bekannt, daß ein Bereich konstanter Breite kein Polygon sein kann, weil die Grenze eines solchen Bereiches keine geradlinige Strecke enthalten kann.) Es ist klar, daß die osculierenden Stützrechtecke eines mit Quadraten umhüllten Polygons, ebenfalls Quadrate sind, und das Polygon ist der größte gemeinsame Teil der osculierenden Quadraten.

Im Folgenden wollen wir zeigen, wie die mit Quadraten umhüllten Polygone aus größten gemeinsamen Teilen von Quadraten darstellbar sind.

[1] Die gleichwinkligen Stütz-n-Ecke eines konvexen Bereiches konstanter Breite sind in den Fällen $n > 4$ nicht unbedingt regelmäßige n-Ecke; im Falle $n = 3$ aber sind sie wohl regelmäßige, doch nicht unbedingt kongruente Dreiecke.

Wir werden sehen, daß die mit Quadraten umhüllten Sechsecke in vier Klassen einreihbar sind; symbolisch $4\{6\}=4$. Wir charakterisieren die einzelnen Klassen durch die Anzahl der osculierenden Quadrate des Polygons und aus deren gegenseitigen Lage. Wir werden alle möglichen Formen des mit Quadraten umhüllten n-Ecks bestimmen, wenn $n=3, 4, 5, 6$ ist. Zur Darstellung aller dieser Formen werden wir eine eindeutige Konstruktionsanweisung geben. Wir werden beweisen, daß $4\{5\}=1$, $4\{6\}=4$ ist.

Wir werden die einfachsten Methoden der Elementargeometrie anwenden, und — um den Umfang der Arbeit nicht allzusehr zu vergrößen — die Beweisfürung auf das Wesentliche des Gedankenganges hinweisend, lieber nur andeuten.

1. Im Folgenden werden wir die Eckpunkte der Polygone mit $1, 2, 3, \ldots$ oder $A, B, C, \ldots$ immer in derselben Umgehungsrichtung bezeichnen. Dies wollen wir später nicht mehr betonen.

SATZ 1. *Die* MINKOWSKI-*sche Summe mit Quadraten umhüllter Bereiche ist ebenfalls ein mit Quadraten umhülltes Bereich.*

Dieser Satz ist eine Folge des folgenden wohlbekannten Satzes: Sind **A** und **B** konvexe Bereiche, dann ist es auch $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$; sind **L, M, N** beliebige, aber mit einander parallele Stützstreifen jener Bereiche, dann ist $\mathbf{L}+\mathbf{M}=\mathbf{N}$. (Hier bedeutet $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ die MINKOWSKI-sche Summe von **A** und **B**.)

Auf diesen Satz, und darauf, daß das Quadrat eine mit Quadraten umhüllbare Figur ist, kann der Beweis einer neueren Behauptung gegründet werden: *Das regelmäßige* 4k-*Eck ist ein mit Quadraten umhülltes Polygon.* Es ist klar, daß ein solches Polygon 4k osculierende Quadrate besitzt.

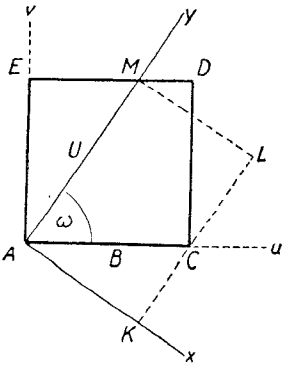


Fig. 1

SATZ 2. *Ein mit Quadraten umhülltes Polygon hat keinen spitzwinkeligen Eckpunkt.*

Nehmen wir zum Gegenteil an: Das mit Quadraten umhüllte Polygon **P** besitze einen spitzen Winkel $BAU=\omega$, und es sei $AB \geqq AU$. Fig. 1 stellt das an der Seite AB des Polygons **P** osculierende Quadrat $ACDE$ dar, sowie das durch die Gerade $y=AU$ und das genannte Quadrat eindeutig bestimmte Rechteck $AKLM$. Vom Begriff des Stützquadrates — und den Schnittpunkt M beachtend folgt $\omega \geqq 45°$, sowie, daß die Seite des durch x, y begrenzten osculierenden Quadrats nicht größer als AK und nicht kleiner als AM sein kann. Aber $AK < AC < AM$ ist. Diese absurde Folge unserer Ausgangsannahme beweist die Richtigkeit des Satzes.

Aus unserem SATZ 2 ergibt sich unmittelbar folgendes

KOROLLARIUM. *Es gibt kein mit Quadraten umhülltes Dreieck. Ein mit Quadraten umhülltes Viereck kann nur ein Quadrat sein.*

Nun wollen wir die gegenseitige Lage der Stützquadraten eines mit Quadraten umhüllten Polygons studieren, sowie die relative Lage der osculierenden Quadrate zum Polygon.

Seien $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}^*$ zwei Stützquadrate des Polygons $\mathbf{P}$. Beide Quadrate haben offenkundig einen gemeinsamen inneren Punkt. Wir wollen annehmen, die hätten auch einen gemeinsamen Eckpunkt A, und daß auch ihre Umgehungsrichtungen übereinstimmen, und es sei $\mathbf{Q}=ABCD$ und $\mathbf{Q}^*$ $AB^*C^*D^*$. Wenn die Quadrate kongruent sind, dann kann durch eine Drehung um A von $0° < \omega < 90°$ $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{Q}^*$ überführt werden. Aus dem ist klar, daß B^* ein innerer Punkt des Quadrates $\mathbf{Q}$, und D ein solcher des $\mathbf{Q}^*$ ist. Wenn aber $\mathbf{Q} < \mathbf{Q}^*$, oder $\mathbf{Q} > \mathbf{Q}^*$ ist, dann ist noch eine Vergrößerung, oder Verminderung um das A als Zentrum anzuwenden um aus $\mathbf{Q}$ zu $\mathbf{Q}^*$ zu gelangen. Diese Ähnlichkeitstransformation ändert aber nichts daran, daß D in $\mathbf{Q}^*$ bezw. B^* in $\mathbf{Q}$ innere Punkte sind. Aus der Unhaltbarkeit der folgenden allgemeineren Annahme wird die Unmöglichkeit der letzten Folgerung klar werden. $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}^*$ seien zwei beliebige Stützquadrate von $\mathbf{P}$. Nehmen wir an, daß ein Eckpunkt von $\mathbf{Q}$ im Inneren des Quadrates $\mathbf{Q}^*$ sei.

In diesem Falle — wie es leicht einzusehen ist — kann leicht eine durch den genannten Eckpunkt gehende Gerade gefunden werden, die das Quadrat $\mathbf{Q}$ von einer Seite des Quadrates $\mathbf{Q}^*$ abtrennt. Dies ist aber Absurd, weil $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ und das Polygon $\mathbf{P}$ auch auf der genannten Seite des Stützquadrates $\mathbf{Q}^*$ einen Punkt hat.

Unsere Feststellungen können folgenderweise zusammengefaßt werden:

SATZ 3. *Ein Eckpunkt eines Stützquadrates in einem mit Quadraten unhüllten Polygon kann weder in einem Eckpunkte, noch im Inneren eines anderen Stützquadrats sein.*

Betrachten wir nun zwei Quadrate mit gemeinsamen inneren Punkten, die aber keinen gemeinsamen Eckpunkt und keinen Eckpunkt im Inneren des anderen haben. Es ist leicht einzusehen, daß die Figuren 2—7 alle möglichen Konfigurationen erschöpfen. Bezeichnen wir diese Konfigurationen in der Reihenfolge der Figuren $\{4,4\}$, $\{4,3\}$, $\{4,2\}$, $\{3,3\}$, $\{3,2\}$, $\{4,0\}$. In der Bezeichnung $\{k, l\}$ bedeuten k und l die Anzahl jener Seiten von $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ in denen sich jene Quadrate an das Polygon $\mathbf{S} = \mathbf{Q}_1 \cap \mathbf{Q}_2$ anschmiegen. Das Polygon $\mathbf{S}$ ist ein konvexes $(k+l)$-Eck.

Wenn wir nun die gegenseitige Lage des mit Quadraten umhüllten Polygons **P** und des ihm angehörigen Stützquadrates **Q** studieren wollen, werden uns folgende Bemerkungen beihilflich sein:

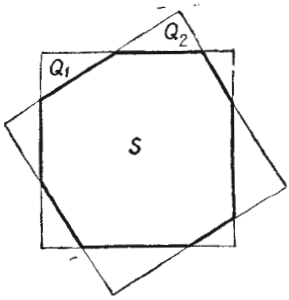


Fig. 2

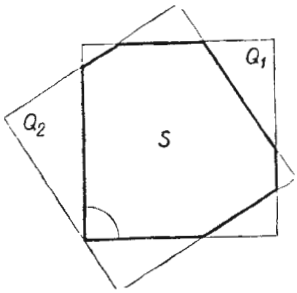


Fig. 3

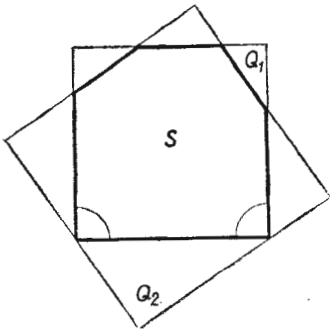


Fig. 4

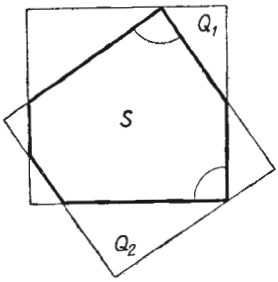


Fig. 5

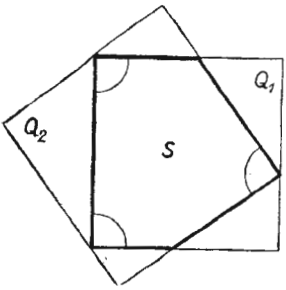


Fig. 6

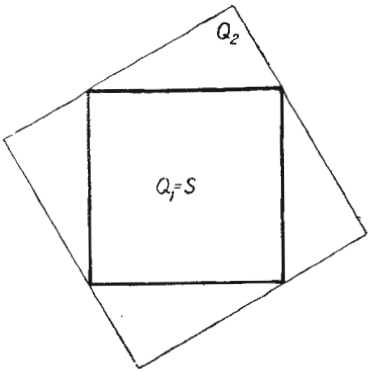


Fig. 7

Es seien die Diagonalen $A_1 A_h$ und $A_j A_k$ des konvexen Polygons $A_1 \ldots A_n = \mathbf{P}$ gleich und auf einander senkrecht. (Fig. 8.) Wir wollen eine durch A_1 gehende Stützgerade t einer Drehung unterwerfen und das hierdurch veränderliche Stützrechteck $\mathbf{Q}(t)$ betrachten, dessen Stützpunkte die Eckpunkte A_1, A_j, A_h, A_k sind. Die Drehung soll von der Stellung t_1 zu t_2 derart erfolgen, daß inzwischen $\mathbf{Q}(t)$ nirgens osculierend werde. Aus dem von den Diagonalen gesagten folgt, daß während der Drehung $\mathbf{Q}(t)$ beständig ein Quadrat ist. Aus der initialen Annahme aber, daß die Umhüllungen des Vierecks $A_1 A_j A_h A_k$ $\mathbf{Q}(t_1)$ und $\mathbf{Q}(t_2)$ Qudarate sind, wobei während der Drehung von t_1 bis t_2 $\mathbf{Q}(t)$ nicht osculierend wird, folgt, daß *die Diagonalen $A_1 A_h$ und $A_j A_k$ auf einander senkrecht stehen und gleich sind.*

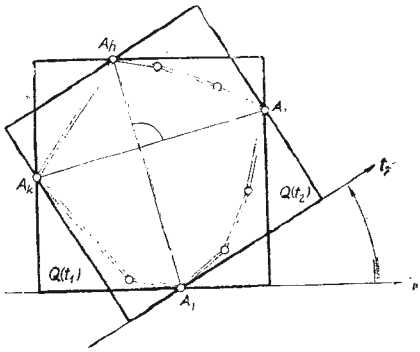


Fig. 8

Fig. 9 veranschaulicht sämtliche osculationsmöglichkeiten des osculierenden Stützquadrates: Die auffallend bezeichneten strecken und Punkte a, b, c, d sind jene Seiten und Ecken des Polygons $\mathbf{P}$, die an der Grenze von $\mathbf{Q}$ liegen (den trivialen Fall $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ haben wir natürlich weggelassen). Bei sämtlichen Mustern sind auch je vier Diagonalen dargestellt, die paarweise gleich und aufeinander senkrecht sind. Dies ist mit Hilfe der obigen Bemerkung und des Satzes 2 leicht zu beweisen. Aus der gegenseitigen Lage und der Längenangabe der vier Diagonalen folgt sogleich der Zusammenhang:

$$a + c = b + d,$$

und zwar in sämtlichen Fällen. Es ist der Mühe wert, folgende Bemerkungen hervorzuheben: 1. *Zwei diamentral entgegengesetzte rechte Winkel von* $\mathbf{Q}$ *können nur dann rechtwinklige Ecken von* $\mathbf{P}$ *sein, wenn* $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ *ist.* 2. $\mathbf{Q}$ *osculiert mit mindestens zwei Nachbarseiten an je eine Seite von* $\mathbf{P}$. (Die genannten Fälle der Osculationsverhältnisse können als spezielle Variationen des ersten Falles betrachtet werden.)

Sollten wir aber von jener Annahme ausgehen, daß das keinen Spitzwinkel enthaltende konvexe Polygon $\mathbf{P}$ ein irgendeinem Muster der Fig. 9 entsprechendes osculierendes Quadrat $\mathbf{Q}$ besitzt, dann können wir leicht die Richtigkeit folgender Feststellungen einsehen:

Rollen wir die die Strecke a entheltende Gerade t an der Periferie von $\mathbf{P}$ — und dies soll sowohl in positiver, als auch in negativer Umdrehungsrichtung geschehen — und betrachten wir das durch Änderung von t bedingte geänderte Stützrechteck $\mathbf{Q}(t)$! Das Rollen in beiden Richtungen soll nur soweit

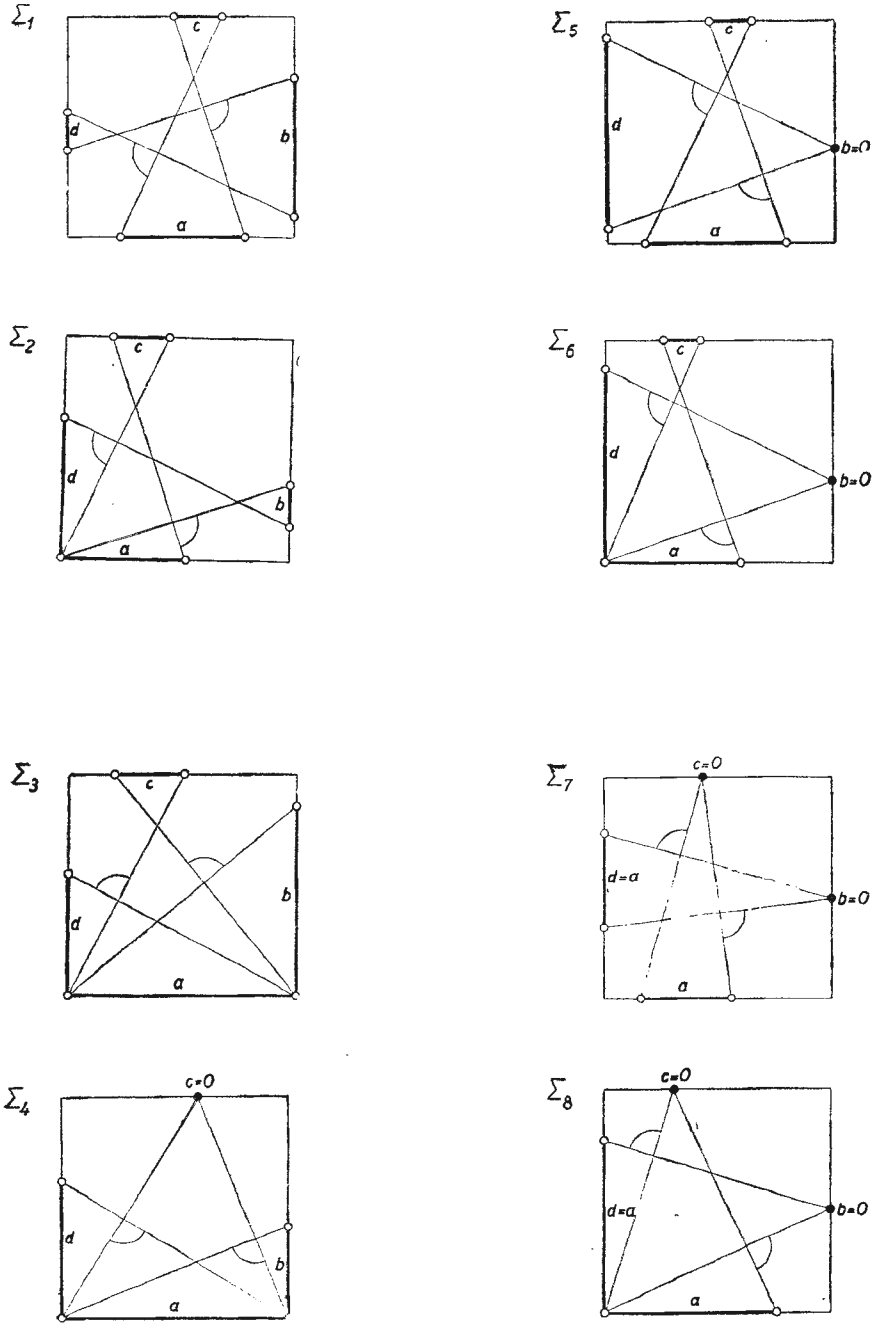

Σ_1
c
d
b
a
Σ_2
c
d
b
a
Σ_3
c
d
b
a
Σ_4
c=0
d
b
a
Σ_5
c
d
b=0
a
Σ_6
c
d
b=0
a
Σ_7
c=0
d=a
b=0
a
Σ_8
c=0
d=a
b=0
a

Fig. 9

dauern, bis mindestens eine Seite von $\mathbf{Q}(t)$ wieder osculierende Gerade von $\mathbf{P}$ wird. So haben wir die Änderung des Stützrechteckes $\mathbf{Q}(t)$ zwischen zwei Grenzen eingeengt, und nur in einer Zwischenlage können wir ein osculierendes Quadrat erhalten, sobald t die Strecke a enthält. Aus dem von den Diagonalen der Fig. 9 gesagten folgt aber, daß $\mathbf{Q}(t)$ zwischen den genannten Grenzen immer ein Quadrat bleibt. Wenn also die Grenze des keinen Spitzwinkel enthaltenden Polygons $\mathbf{P}$ aus solchen Teilen zusammengesetzt erscheint, wie die der Fig. 9, so ist das Polygon $\mathbf{P}$ ein mit Quadraten umhülltes.

$\sum$ nennen wir die Grenze eines Polygons $\mathbf{P}$, und derenden in der Fig. 9 entsprechende Teile $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_8$.

SATZ 4. *Das durch die Konfiguration $\{k, l\}$ (vorausgesetzt, daß $n, l \leqq 4$) erzeugte Polygon* $\mathbf{S}$ *ist ein mit Quadraten eingehülltes $(k+l)$ seitiges Polygon.*

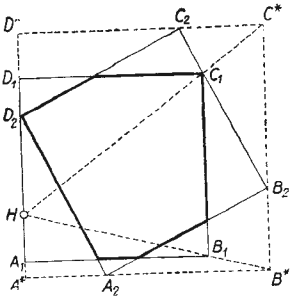


Fig. 10

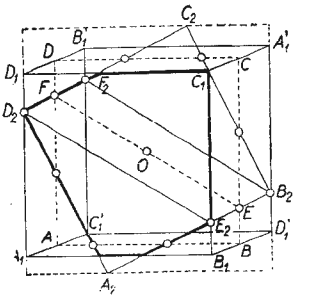


Fig. 11

Im Falle $\{4, 0\}$ ist der Satz trivial. Für die weiteren fünf Fälle wollen wir eine Beweisführung gleichen Gedankenganges skizzieren.

Vorerst wollen wir bemerken, daß aus der in Fig. 7 gegebenen Konfiguration, jene der Fig. 2—6 durch geeignete zentrale Verminderung des Quadrates $\mathbf{Q}_2$ abgeleitet werden können. (Das Zentrum H der Verminderung ist im Falle der Fig. 2 im Inneren von $\mathbf{Q}_2$, im Falle der Figuren 3 und 5 am Rande von $\mathbf{Q}_2$, im Falle der Figuren 4 und 6 im Eckpunkte desselben zu wählen; im Falle der Fig. 6 kann aber auch Ecke von $\mathbf{Q}_1$ gewählt werden. Bei den zwei Ableitungen der Fig. 6, sowie im Falle der Fig. 5 bestimmt freilich der Punkt H sogleich eindeutig das Verhältnis der Verminderung.) Fig. 10 veranschaulicht eben die Ableitung von $\{3,3\}$.

Um die Umgehülltheit mit Quadraten zu beweisen, betrachten wir die Konfiguration $\{3,3\}$ der Fig. 11, wo $\mathbf{Q}_1 = A_1 B_1 C_1 D_1$ und $\mathbf{Q}_2 = A_2 B_2 C_2 D$ und O der Mittelpunkt von $\mathbf{Q}_2$ sind. Das Spiegelbild von $\mathbf{Q}_1$ durch O ist das Quadrat $\mathbf{Q}'_1 = A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$. Die den Punkt A_1 in C'_1 überführende Translation vereint $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}'_1$. Eine halbgroße Translation überführt $\mathbf{Q}_1$ in das Quadrat. $\mathbf{Q} = ABCD$; es ist evident, daß O zugleich Zentrum von $\mathbf{Q}$ ist. Hieraus

folgt, daß das $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Q}_2$ Achteck zentralsymmetrisch ist, und daß es eine rechteckige Drehung um O in sich selbst zurückführt. Es entspricht daher den Voraussetzungen über die Diagonalen des 1. Musters der Fig. 9, jene Diagonalen treffen sich sogar in O. Die betrachteten Diagonalen — so z. B. die Diagonale EF der Fig. 11 — enden auf gegenüberliegenden Seiten von $\mathbf{Q}_2$; wird $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}_1$ (oder nach $\mathbf{Q}_2$) verschoben, dann degeneriert das Achteck $\mathbf{S} = \mathbf{Q}_1 \cap \mathbf{Q}_2$ (bzw. $\mathbf{S}' = \mathbf{Q}_1' \cap \mathbf{Q}_2$) in ein Sechseck, und gleichzeitig wird die Diagonale EF sich an die genannten gegenüberliegenden Seiten anlehnend in die Diagonale $E_2 D_2$ (bzw. $B_2 F_2$) des Sechsecks $\mathbf{S}$ (bzw. $\mathbf{S}'$). Es ist daher evident, daß die Diagonalen des Sechsecks $\mathbf{S}$ den Voraussetzungen über jene Σ_3 entsprechen. Da wir aber die Grenzlinie von $\mathbf{S}$ durch $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ auf zwei Σ_6-Teile zerlegten, ist es wirklich ein mit Quadraten umhülltes Sechseck.

Zur Ergänzung wollen wir noch bemerken, daß die Zweiteilungen der durch die Konfigurationen $\{4,4\}$, $\{4,3\}$, $\{4,2\}$, $\{3,3\}$, $\{3,2\}$ erzeugten Polygone $\mathbf{S}$ der Reihe nach folgende sind:

$$\sum_1' \cup \sum_1'', \quad \sum_2' \cup \sum_5'', \quad \sum_3' \cup \sum_6'', \quad \sum_6' \cup \sum_6'', \quad \sum_4' \cup \sum_8''$$

(Das obere einfache und doppelte Komma verweist auf die Grenze von $\mathbf{Q}_1$ bezw. $\mathbf{Q}_2$).

SATZ 5. *Jedes mit Quadraten umhülltes Fünfeck kann als größter gemeinsamer Teil von Quadraten der Konfiguration* $\{3,2\}$ *dargestellt werden.* Um unsere Behauptung zu beweisen, müssen wir uns nur darauf berufen, daß ein osculierendes Quadrat sich einem mit Quadraten umhüllten Polygon in dessen mindestens zwei Seiten anschmiegt, und daß zwei osculierende Quadrate keine gemeinsamen Seiten haben. Deshalb hat ein solches Fünfeck genau zwei osculierende Quadrate; zwei osculierende Quadrate liefern aber nur im Falle der Konfiguration $\{3,2\}$ ein Fünfeck, und zwar ein mit Quadraten umhülltes Fünfeck.

SATZ 6. *Es sei die Anzahl der osculierenden Quadraten eines mit Quadraten umhüllten n-Ecks* ν, *ferner sei* $n = 4p + r = 2q + s$, *wo* $p = 1, 2, \ldots$; $r = 1, 2, 3, 4$ *und* $q = 2, 3, \ldots$; $s = 1, 2$, *dann ist* $p + 1 \leqq \nu \leqq q + 1$.

Die Behauptung des Satzes gibt offenbar Orientierung über die möglichen Werte von ν im Falle $n > 5$, wir wissen doch schon, daß im Falle $n = 5p + 1 = \nu < q + 1$ gilt. Ein osculierendes Quadrat schmiegt sich überhaupt in höchstens vier, aber mindestens in zwei Seiten dem in Rede stehenden n-Eck an, ferner auch an das durch die Konfiguration $\{k, l\}$ entstandene $(k+l)$-Eck denkend, ist es klar, daß in der Relation $p + 1 \leqq \nu$ auch die Gleichheit möglich ist, im Falle des Sechseckes aber werden wir sehen, daß auch in der Relation $\nu \leqq q + 1$ die Gleichheit erfüllt sein kann.

2. Abgesehen von den Sätzen allgemeinen Charakters, haben wir in der Bestimmung der mit Quadraten umhüllten Polygone die Fälle $n=4,5$ erledigt, und wissen, daß $4\{5\}=1$ ist. Mit wachsendem n wächst auch $4\{n\}$ und die gegenseitigen Lagerverhältnise der osculierenden Quadrate zu **P** und zu sich selbst werden immer komplizierter. Zum Abschluß vollen wir noch den Fall $n=6$ erledigen.

Das mit Quadraten umhüllte Sechseck verfügt — nach den bisherigen Feststellungen — mit höchstens drei, aber mindestens zwei osculierenden Quadraten. Die Sechsecke mit zwei osculierenden Quadraten, d. h. die mit den Konfigurationen $\{4,2\}$ und $\{3,3\}$ entstandenen **S**-Polygone sind uns schon bekannt. Wir müssen uns nun nur mit jenen Formen beschäftigen, die drei osculierende Quadrate aufweisen.

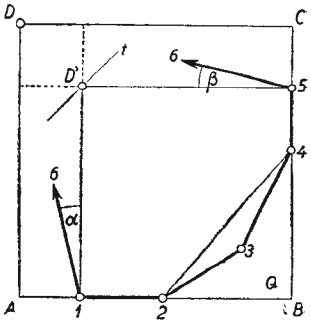


Fig. 12

Es sei $\mathbf{P}=123456$ ein mit Quadraten umhülltes Sechseck, und nehmen wir an, daß die Geraden 12 und 45 auf einander senkrecht sind. In diesem Falle besitzt **P** ein osculierendes Quadrat **Q**, dessen zwei Nachbarkanten die Strecken $\overline{12}$ und $\overline{45}$ enthalten, Aus dem SATZ 2 folgt laut Fig. 12 sofort, daß der Eckpunkt 6 nur in D' des Rechtecks $1B5D'$ sein kann. Dann ist aber dieses Rechteck speziel ein osculierendes Quadrat von **P**. Jenes Stützrechteck $\mathbf{Q}(t)$ von **P** aber, das zu der mit der Diagonale $\overline{15}$ parallelen Geraden t gehört und durch den Punkt $6=D'$ geht, kann kein Quadrat sein. Diese der Definition von **P** widersprechende Folge beweist, daß die gegenüber liegende Seiten des Sechsecks **P** auf einander nicht senkrecht sein können.

Die Konfiguration der osculierenden Elemente auf den osculierenden Quadraten der Sechsecke mit drei osculierenden Quadraten kann nur Σ_7 und Σ_8 sein, weil ein jedes osculierende Quadrat sich mindestens an zwei Polygonseiten anschmiegt, und das Polygon jetzt nur sechsseitig ist. Es ist klar, daß zwei benachbarten Eckpunkte eines solchen Sechsecks nicht rechteckig sein können, weil es dann auch osculierende Quadraten der Art Σ_3, oder Σ_4 hätte. Aus alldem folgt, daß die Seitengeraden eines solchen Sechsecks drei Paare auf einander senkrechte Geraden aufweisen. Die gegenüberliegenden Seiten können aber kein solches Paar bilden. Folglich können bei der Umgehung der Figur nur folgende zwei Reihenfolgen der Seiten auftreten: *aabbcc* und *aabcbc*. (Die gleichbezeichneten Seiten sind aufeinander senkrechte gleiche Strecken; an die Seiten a, b, c schmiegen sich die entsprechenden osculierenden Quadrate $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$)

Die gleichbezeichneten Seiten des konvexen Sechsecks $\mathbf{P} = 123456$ der Fig. 13 sind auf einander senkrechte gleiche Strecken; es ist daher evident, daß das Dreieck 135, mit den Diagonalen a', b', c' als Seiten, spitzwinkelig ist, es ist auch klar, daß ein gegebenes spitzwinkeliges Dreieck immer, aber nur auf einerlei Art zu ein Sechseck $aabbcc$ der gesagten Beschaffenheit ergänzt werden kann.

Die Osculationsrechtecke des in Rede stehenden Sechsecks $\mathbf{P}$ sind: $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$. Wir wollen zeigen, daß alle Quadraten sind. Es genügt aber den Beweis an $\mathbf{Q}_1$ zu führen. Hier zu werden wir die Gleichheit des Strecken $\overline{4U}$ und $\overline{4V}$, beweisen, oder — was dahin führt — daß $\overline{5U} = \overline{3V}$ ist. Ziehen wir durch die Punkte 5 und 6 parallele zu 21, resp. 34, so entsteht das

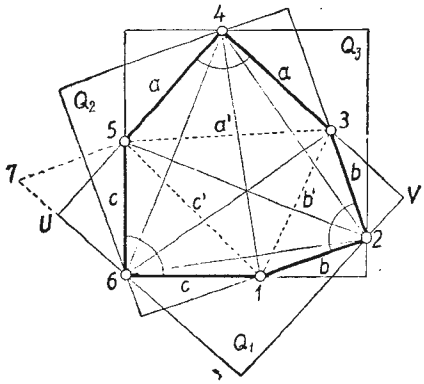


Fig. 13

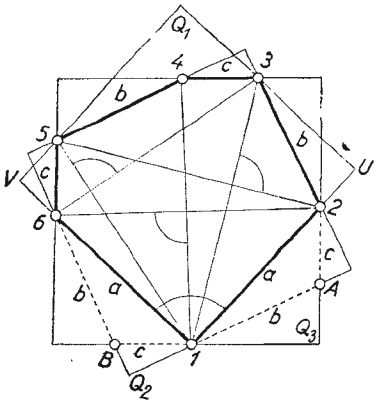


Fig. 14

Dreieck 567. Die gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecke 123, 345, 561 betrachtend ist die Richtigkeit folgender Behauptung klar: Wenn wir das Dreieck 567 mit der Translation die 6 in 5 überführt, verschieben, dann um 5 einer Drehung um — 135° unterwerfen, endlich auf das $\sqrt{2}$-fache vergrößern, dann gelangen wir zum Dreieck 153. Dann ist gleich feststellbar, daß das $\sqrt{2}$-fache der Strecke $\overline{5U}$ mit der Höhenlinie durch 1 des Dreiecks 153 übereinstimmt. Für die Strecke $\overline{3V}$ ergibt sich durch ähnlichen Gedankengang dieselbe Größe. Also ist wirklich $\overline{5U} = \overline{3V}$.

Sobald wir nun wissen, daß $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ Quadrate sind, ist aus der Fig. ersichtlich, daß ihrer je zwei eine Konfiguration {3,3} bilden. Wenn wir uns nun auf den bereits bekannten Zusammenhang zwischen den Diagonalen der mit Quadraten umhüllten Sechsecke $\mathbf{Q}_1 \cap \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_2 \cap \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_3 \cap \mathbf{Q}_1$ berufen, dann ist es klar, daß die Paare $\overline{42}, \overline{63}; \overline{26}, \overline{41}; \overline{64}, \overline{25}$ aus aufeinander senkrechten gleichen Strecken bestehen. Hieraus wollen wir zwei Folgerugen ziehen.

Erstens: Das Sechseck **P** ist ein BRIANCHON-sches. Die Geraden $\overline{63}$, $\overline{41}$, $\overline{25}$ sind nämlich Höhenlinien des Dreiecks 426, müssen daher durch dessen Höhenpunkt gehen.

Zweitens: Das Sechseck **P** ist ein mit Quadraten umhülltes Polygon. Wenn wir auf die weiter oben genannten Paare, sowie auf die Paare a, a; b, b; c, c denken, erhellt es sofort, daß durch rechtwinkelige Drehungen um geeignete Punkte 254 in 643, 632 in 421, 316 in 265 überführbar sind. Mit anderen Worten wird die Periferie von **P** durch jede der osculierenden Quadrate in je ein Σ_8-teil aufgelöst. In Folge dessen ist eben **P** ein mit Quadraten umhülltes Sechseck.

Das Sechseck **P** = 123456 der Fig. 14 veranschaulicht den Fall *aabcbc*. Aus der Forderung, daß die Periferie eines konvexen Sechsecks einen Teil von der Struktur *bcbc* habe ohne spitzwinkeliger Ecke, folgt, daß die Stützrechtecke $\mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$ konzentrische Quadrate sind. Wenn aber die Forderung in dem besteht, daß $\mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$ konzentrische Quadrate seien, dann bleibt aus dem Achteck $\mathbf{S} = \mathbf{Q}_2 \cap \mathbf{Q}_3$ nach erfolgtem Abschnitt von $1B6$ und $2A1$ aus den Ecken ein Sechseck der Eigenschaft *aabcbc* zurück. Es ist nur zu beweisen, daß an die Seiten $\overline{12}$ und $\overline{16}$ des Sechsecks osculierende Rechteck $\mathbf{Q}_1$ ebenfalls ein Quadrat ist. Zu dem Ende genügt es zu zeigen, daß die Strecken $\overline{13}$ und $\overline{25}$ gleich und auf einander senkrecht sind, weil dann auch ihre orthogonalen Projektionen $\overline{1U}$ und $\overline{1V}$ auf die Geraden 12 und 16 (die auch auf einender senkrecht stehen) offenbar gleich sind. Wenn wir nämlich das aus den konzentrischen Quadraten $\mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$ erzeugte Achteck **S** um den gemeinsamen Zentrum einer Drehung von 90° unterwerfen, wird dadurch die Strecke $\overline{13}$ in $\overline{25}$ überführt. Diese sind also wirklich gleich und auf einander senkrecht, folglich ist auch $\mathbf{Q}_1$ ein Quadrat.

Die Drehung von 90° um das Zentrum von **S** überführt die Diagonalen $\overline{14}$ und $\overline{36}$ in $\overline{26}$, bezw. in $\overline{15}$. Wenn wir nun die aus in einander Drehbaren Dreiecken bestehende Paare 136, 251; 236, 451; 341, 562 betrachten, ist folgendes klar: *Die Periferie des Sechsecks* **P** *wird durch die osculierenden Quadrate* $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ *und* $\mathbf{Q}_1$, *in je einen Teil* Σ_7 *und in einen Teil* Σ_8 *zerlegt, folglich ist es ein mit Quadraten umhülltes Sechseck.*

Zum Abschluß fassen wir das im 2. Kapitel behandelte zusammen.

SATZ 7. *Durch die Konfigurationen aabbcc, aabcbc und den aus* {4,2}, {3,3} *erzeugten Polygonen* **S** *sind die mit Quadraten umhüllten Sechsecke erschöpft; es ist* $4\{6\} = 1$.

BEMERKUNG. Zum Abschluß wollen wir noch bemerken, aber ohne zu beweisen, daß die SÄTZE 1, 2, 3 auch derart verallgemeinert werden können, daß wir anstatt: Stützquadrat, Stützrechteck und spitzwinkliges konvexes

Polygon — der Reihe nach: regelmäßiges Stütz-n-eck, gleichwinkliges Stütz-n-eck, Polygon mit Winkel kleiner, als $(n-2)\pi/n$ setzen. So läßt sich auch das Korollär über Vierecke des SATZes 2 verallgemeinern: es gibt kein anderes mit regelmäßigen n-Ecken umhülltes konvexes n-Eck, als das regelmäßige n-Eck. Ferner ist auch das Symbol $4\{n\}$ einer verallgemeinerung fähig: $m\{n\}$ soll die Anzahl der verschiedenen Klassen der mit regelmäßigen m-Ecken umhüllten konvexe n-Ecke bezeichnen. Im 2. Punkte handelte es sich um die Bestimmung von $m\{n\}$ in den Fällen $m=4$, und $n=5,6$.

AN ARRANGEMENT OF TWO-DIMENSIONAL CELLS

By

L. FEJES TÓTH

(Received April 1, 1959)

It is known[1] that among the nets tightened upon a given frame and containing a great but given number of equiareal convex meshes the hexagonal net has the least length. This extremum property can be brought into connection with the occurrence of hexagonal cell-arrangements „in such different structures as for instance the parenchyma of maize, the retinal pigment of our eyes, the surface of many diatoms,... and finally the honeycomb"[2]. In the present paper we turn our attention to an analogous problem which arises by taking into consideration the thickness of the cell wall.

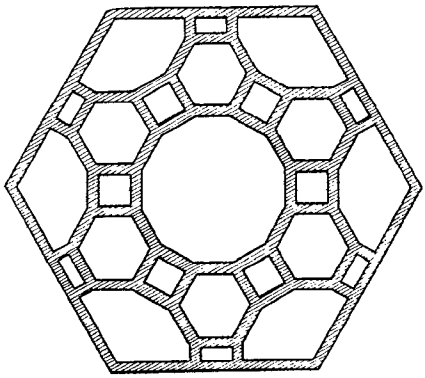


Fig. 1

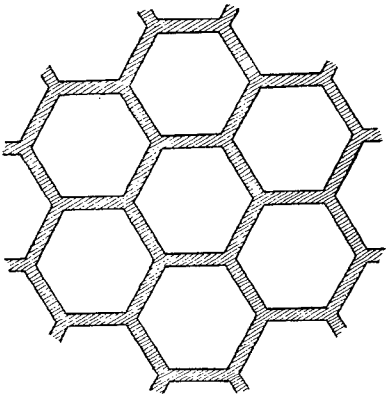


Fig. 2

A connected domain bounded by at least two closed curves is said to be a network of wall, or shortly a *network*. We define the *thickness* of the network as the minimal distance between the points of two different bounding curves. The „holes" are called *cells* of the network (Fig. 1).

Consider in a given domain a network of prescribed thickness with convex cells of prescribed minimal area. Our problem is to construct under

[1] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953).

[2] H. Weyl *Symmetry* (Princeton 1952).

these conditions a network containing the greatest possible number of cells. We shall show that for „great" domains the solution is given by hexagonal networks (Fig. 2). This is expressed by the following

THEOREM. *Consider a network of thickness* $2t$ *constained in a convex hexagon of area* H *and having* n *convex cells of area* $\geqq h$. *Then*

$$n \leqq \left(\frac{\sqrt{H}-\sqrt[4]{12}\,t}{\sqrt{h}+\sqrt[4]{12}\,t}\right)^2.$$

Here a hexagon denotes a polygon with at most six sides. Note that $\left(\sqrt{A}\pm\sqrt[4]{12}\,t\right)^2$ equals the area of a regular hexagon arising from another one of area A by displacing each side outward or inward, respectively, by t. In what follows we denote a domain and its area by the same symbol.

In the limit case $h\to 0$ our theorem yields the following

COROLLARY 1. *The number* n *of points which can be placed in a convex hexagon* H, *so that the distance of each point from any another one or from the boundary of* H *should be* $\geqq 2t$, *satisfies the inequality*

$$\sqrt[4]{12}\,(\sqrt{n}+1)\,t \leqq \sqrt{H}.$$

As a further particular case consider a net of length L with n equiareal convex meshes framed by the boundary of a convex hexagon H. It is easy to construct a set of networks with n equiareal cells such that $t\to 0$ and $(H-nh)/2t\to L$. But, in view of our inequality,

$$\frac{H-nh}{2t} \geqq \sqrt[4]{12}\,(\sqrt{H}+n\sqrt{h})+\sqrt{3}\,(n-1)\,t.$$

Passing to the limit case $t\to 0$, we obtain, on account of $h\to H/n$, the following

COROLLARY 2. *If* L *denotes the length of a net with* n *equiareal convex meshes constituting a convex hexagon* H, *then*

$$L \geqq \sqrt[4]{12}\,\sqrt{H}\,(\sqrt{n}+1).$$

This implies the extremum property of the hexagonal tessellation mentioned in the introduction.

Turning now to the proof of our theorem, note, first of all, that, in virtue of our suppositions, the outer parallel domains $C_t^1,\ldots,C_t^n$ of the cells $C^1,\ldots,C^n$ can neither overlap nor stretch out from the inner parallel domain

H_{-t} of H. Draw to any two domains C_t^i and C_t^j a straight line s_{ij} separating C_t^i from C_t^j. Choose a certain domain C^i and consider the half-planes containing C_t^i bounded by the lines $s_{ij}, j \leqq n, j \neq i$. The product of these half-planes and of H_{-t} is a convex polygon P^i.

Since the polygons $P^1, \ldots, P^n$ do not overlap and are all contained in H_{-t}

$$P^1 + \cdots + P^n \leqq H_{-t}. \tag{1}$$

Furthermore, it follows easily from Euler's theorem[3] that

$$\nu_1 + \cdots + \nu_n \leqq 6n, \tag{2}$$

where ν_i denotes the number of the sides of P^i. In addition, we have, by virtue of $P_{-t}^i \supset C^i$,

$$P_{-t}^i \geqq h. \tag{3}$$

We call *indicatrix* of a convex polygon P the polygon circumscribed about the unit circle the outer normal directions of whose sides are the same as those of P. Denoting the perimeter and the indicatrix of P_{-t}^i by L^i and p^i, we have

$$P^i = P_{-t}^i + L^i t + p^i t^2.$$

One deduces, by means of (3) and of well known extremum properties of the regular polygons,

$$P^i \geqq h + 2t\sqrt{h\nu_i \operatorname{tg}\frac{\pi}{\nu_i}} + t^2 \nu_i \operatorname{tg}\frac{\pi}{\nu_i} = \left(\sqrt{h} + t\sqrt{\nu_i \operatorname{tg}\frac{\pi}{\nu_i}}\right)^2.$$

We proceed to show that $y = \sqrt{\nu \operatorname{tg}\frac{\pi}{\nu}}$ is a convex function of $\nu \geqq 3$. For, the condition $y'' > 0$ of the convexity is equivalent to

$$4\pi \sin\frac{\pi}{\nu} > \nu\left(\frac{2\pi}{\nu} - \sin\frac{2\pi}{\nu}\right).$$

But this inequality is, on account of $\frac{2\pi}{\nu} - \sin\frac{2\pi}{\nu} \leqq \frac{8\pi^3}{6\nu^3}$, certainly satisfied if

$$4\pi \sin\frac{\pi}{\nu} > \nu\frac{8\pi^3}{6\nu^3} = \frac{4\pi^3}{3\nu^2},$$

[3] Cf. e. g. L. Fejes Tóth, Filling of a domain by isoperimetric discs. *Publicationes Math., Debrecen*, 5 (1957), 119—127.

i. e. if $\sin\frac{\pi}{\nu} > \frac{\pi^2}{3\nu^2}$. But this last inequality is already fulfilled if e. g. $\frac{\pi}{\nu} < \frac{\pi}{2}$, i. e. if $\nu > 2$.

Taking now into consideration that y is a decreasing function and that, in view of $(y^2)'' = 2y'^2 + 2yy''$, also $y^2 = \nu \operatorname{tg}\frac{\pi}{\nu}$ is convex, we have, by means of Jensen's inequality and (2),

$$P^1 + \cdots + P^n \geqq n\left(\sqrt{h} + t\sqrt{\frac{\nu_1 + \cdots + \nu_n}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}}\right)^2 \geqq$$

$$\geqq n\left(\sqrt{h} + t\sqrt{6\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\right)^2 = n\left(\sqrt{h} + \sqrt[4]{12}\,t\right)^2.$$

Thus, owing to (1), we have only to show that

$$H_{-t} \leqq \left(\sqrt{H} - \sqrt[4]{12}\,t\right)^2.$$

Let P be a convex polygon of perimeter L and indicatrix p, and denote the same data of the parallel domains by corresponding indexes. For small values of x the numbers of the sides of P and P_{-x} equal, so that $p = p_{-x}$. In this case $P = P_{-x} + L_{-x}x + px^2$ and $L = L_{-x} + 2px$, whence $P_{-x} = P - Lx + px^2$. Consequently $(P_{-x})'' = 2p$.

Let $\bar{H}$ be a regular hexagon of area $\bar{H} = H$ and consider the function

$$f(x) = H_{-x} - \bar{H}_{-x}, \quad 0 \leqq x \leqq r,$$

r being the in-radius of H. Obviously, $f(0) = 0$ and $f(r) \geqq 0$. On the other hand, we have, by the above remark,

$$f''(x) = 2\left(\bar{h}_{-x} - h_{-x}\right) \leqq 0,$$

where $\bar{h}_{-x}$ and h_{-x} denote the indcatrix of $\bar{H}_{-x}$ and H_{-x}. Hence $f(x) \geqq 0$, in consequence of which we have, in fact,

$$H_{-t} \leqq \bar{H}_{-t} = \left(\sqrt{H} - \sqrt[4]{12}\,t\right)^2.$$

This completes the proof of our theorem.

ON TWO PROBLEMS CONCERNING ENDOMORPHISM GROUPS

By

E. SĄSIADA

University Toruń, Poland

(Received January 6, 1959)

The aim of this note is to give answer to the following two questios concerning endomorphism groups mentioned by L. FUCHS in [1] (Problems 42 and 39):

P. 1. Do groups G and H exist whose endomorphism rings are not isomorphic, but their endomorphism groups are isomorphic?

P. 2. (T. SZELE) Is the endomorphism group End G indecomposable if G is indecomposable?

The answer is positive to problem P. 1 and negative to problem P. 2.

1. *Solution of problem P. 1.* For a set S of primes, we denote by $R^{(S)}$ the subgroup of the additive group of all rationals generated by the set $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in S}$ of rationals.

Let P and Q be two disjoint infinite sets of odd primes and G the direct sum of the groups $R^{(P)}$ and $R^{(Q)}$.

Since P and Q are infinite and disjoint, we have

(1) The direct summands $R^{(P)}$ and $R^{(Q)}$ are fully invariant subgroups of G.

It is easy to see by (1) that

(2) Every endomorphism of the group G is uniquely determined by the image of the element $\langle 1, 1\rangle$,

and

(3) All possible images of the element $\langle 1, 1\rangle \in G$ under endomorphisms of G are all the elements $\langle k, l\rangle$ with integers k and l.

From (2) and (3) it follows that the correspondence $\varepsilon_{k,l} \xrightarrow{\varphi} \langle k, l\rangle = \varepsilon_{k,l}\langle 1, 1\rangle$ is one-one between the ring $\mathfrak{E}(G)$ of all endomorphisms of G and the direct sum $I+I$ of two copies of the ring of all integers.

Further observe that the correspondence φ is a ring homomorphism of $\mathfrak{E}(G)$ onto $I+I$. Hence we have

(4) The endomorphism ring $\mathfrak{E}(G)$ is isomorphic to the ring $I+I$.

Let now H be the subgroup of G generated by $2G$ and the element $\langle 1, 1\rangle$. It is clear that

(5) Every endomorphism of H can uniquely be extended to an endomorphism of the whole group G.

Since all the elements of H wits integer coordinates are $\langle 1, 1\rangle, \langle 2k, 2l\rangle$ $(k, l = 0, \pm 1, \ldots)$ and their sums, by (5) we obtain

(6) The endomorphism ring $\mathfrak{E}(H)$ is isomorphic to the subring J of $I+I$ generated by the ideal $2(I+I)$ and the identity $\langle 1, 1\rangle$.

Further observe that the elements $\langle 1, 0\rangle$ and $\langle 0, 1\rangle$ of $I+I$ do not belong to the subring J, and that the elements $\langle 1, 0\rangle$ and $\langle 0, 1\rangle$ are the only non-zero idempotents of $I+I$ different from the identity

Hence it follows that

(7) The endomorphism ring $\mathfrak{E}(H)$ contains no idempotents $(\neq 0)$ different from the identity,

and therefore by (4) we obtain

(8) The endomorphism rings $\mathfrak{E}(G)$ and $\mathfrak{E}(H)$ are not isomorphic.

On the other hand, by (4),

(9) The endomorphism group End G is a free abelian group of rank 2

and, by (6), End H is a subgroup of rank 2 of End G, and therefore also,

(10) End H is a free abelian group of rank 2.

From (8), (9), and (10) we obtain finally:

(*) *The endomorphism rings* $\mathfrak{E}(G)$ *and* $\mathfrak{E}(H)$ *are not isomorphic, but the endomorphism groups* End G *and* End H *are isomorphic.*

2. *Solution of problem* $P.2$. To obtain the negative answer to the problem $P.2$, we take the group H defined in the previous section. From (7) and (10) we have

(**) *The group H is indecomposable, but End H is decomposable.*

Reference

[1] L. Fuchs, *Abelian groups* (Budapest, 1958).

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER AUFLÖSBARKEIT VON GLEICHUNGEN

Von

E. FRIED

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 10. April 1959.)

1. Es ist wohlbekannt, daß die Galoissche Theorie — im Falle die Charakteristik Null ist — eine notwendige und hinreichende Bedingung gibt dafür, daß eine algebraische Gleichung über einem gegebenen Grundkörper K auflösbar sei. Es gilt nämlich in diesem Fall der

SATZ DER AUFLÖSBARKEIT. *Wenn eine Wurzel eines in $K[x]$ irreduziblen Polynoms $f(x)$ ein Radikalausdruck über K ist, so ist die Galoissche Gruppe dieses Polynoms auflösbar. Wenn umgekehrt die Galoissche Gruppe des Polynoms auflösbar ist, so lassen sich alle Wurzeln von $f(x)$ durch Radikalausdrücke über K darstellen.*

Im Fall von Primzahlcharakteristik ist i. a. nur der erste Teil dieses Satzes gültig. Bei dem zweiten Teil muß man noch eine Bedingung bezüglich der vorkommenden Wurzelexponenten voraussetzen.

In dieser Arbeit werden wir den obigen Satz so verallgemeinern, daß er ohne Charakteristikbeschränkung gültig sei.

2. Es sei L eine endliche algebraische Erweiterung des Grundkörpers K. Wir werden den Körpergrad mit $[L:K]$ und die Charakteristik von K mit χ bezeichnen. Zuerst müssen wir den Fall von zyklischen Körpern untersuchen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

SATZ I. *Es sei L ein zyklischer Körper vom Grade n über K, wo n nicht durch χ teilbar ist. Enthält nun K die n-ten Einheitswurzeln, so existiert ein Element α in L so, daß $L = K(\alpha)$ und $\alpha^n = a \in K$.*[1]

BEWEIS. Es sei σ ein erzeugendes Element der Galoisschen Gruppe G von L über K. Wir bezeichnen mit $\Gamma = \Gamma_K^G$ den Gruppenring von G über K. Wie ich in einer anderen Arbeit[2] bewiesen habe, ist Γ ein Galoisscher Modul von L. Bedeutet ε eine primitive n-te Einheitswurzel, so folgt die Existenz

[1] Ich kenne keinen vollständigen Beweis in der Literatur, daß L durch Adjunktion *einer einzigen* n-ten Wurzel erzeugt werden kann.

[2] S. [1].

eines Elementes $\alpha \neq 0$ in L, das durch $\sigma - \varepsilon$ annulliert wird[3] $\alpha\sigma = \varepsilon\alpha$ $(\alpha \neq 0)$. Deshalb sind die n konjugierten Elemente von α voneinander und von 0 verschieden, d. h. $L = K(\alpha)$. Setz man $\alpha^n = a$, so ist $a\sigma = \alpha^n\sigma = (\alpha\sigma)^n = (\varepsilon\alpha)^n = \alpha^n = a$ woraus $a \in K$ folgt, und damit ist der Satz bewiesen.

Die Umkehrung des vorigen Satzes ist trivial.

SATZ II. *Wenn L ein zyklischer Körper über K ist, und wenn $[L:K]$ mit der Primzahl $\chi = p$ übereinstimmt, dann existiert ein Element α in L so, daß $L = K(\alpha)$ und $\alpha^p - \alpha = a \in K$. Umgekehrt: hat K eine Primzahlcharakteristik p und ist $L = K(\alpha)$ mit $\alpha^p - \alpha = a \in K$, so ist die Galoissche Gruppe von L über K zyklisch.*[4]

BEWEIS. Zuerst beweisen wir die Umkehrung. Es sei also $L = K(\alpha)$, $a \in K$, $f(x) = x^p - x - a$ und $f(\alpha) = 0$. Nun gilt für jede ganze Zahl $i (0 \leq i < p)$ die Gleichung $f(\alpha + i) = (\alpha + i)^p - (\alpha + i) - a = \alpha^p - \alpha - a = 0$, die $\alpha + i$ sind also konjugierte Elemente über K und somit ist L eine normale Erweiterung von K. Wir definieren den Automorphismus σ_i $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ durch $\alpha\sigma_i = \alpha + i$. Dann gehört σ_i zur Galoisschen Gruppe der Erweiterung, und, da $\sigma_i = \sigma_1^i$ ist die Galoissche Gruppe in der Tat zyklisch.

Nehmen wir zunächst an, daß L zyklisch über K ist, und σ ein erzeugendes Element der Galoisschen Gruppe G bezeichnet. $\eta = \sigma - 1$ ist ein Element des Gruppenrings Γ_K^G von G über K, und man sieht sofort, daß $\eta^{p-1} \neq 0$ und $\eta^p = 0$ erfüllt sind. Wegen einer Eigenschaft der Galoisschen Moduln[2] existiert ein Element $\gamma \in L$ mit $\gamma\eta \neq 0$. Anderseits gilt $\gamma\eta^p = 0$. Es sei $\gamma\eta^n \neq 0$, aber $\gamma\eta^{n+1} = 0$, ferner $\gamma\eta^{n-1} = \beta$ $(1 \leq n < p, \beta \in L)$. Dann ist $\beta\eta \neq 0$, aber $\beta\eta^2 = 0$, folglich gilt $\beta\eta\sigma = \beta\eta$, d. h. $\beta\eta = b \in K$. Man setze $\alpha = \frac{\beta}{b}$; so ist $\alpha\eta = 1$, d.h. $\alpha\sigma = \alpha + 1$, und somit $(\alpha^p - \alpha)\sigma = (\alpha\sigma)^p - (\alpha\sigma) = (\alpha + 1)^p - (\alpha + 1) = \alpha^p - \alpha$, woraus $\alpha^p - \alpha = a \in K$, und wegen $\alpha\sigma = \alpha + 1$ sofort $\alpha \notin K$ bzw. $L = K(\alpha)$ folgt, w. z. b. w.

3. Wir werden die Wurzeln eines jeden Polynoms der Form $x^p - x - a$ $(a \in K)$ *Quasiradikal* nennen, falls $\chi = p$. Wenn man einen Quasiradikalausdruck ähnlich wie einen Radikalausdruck erklärt, d. h. wenn man ausser Radikalen noch endlich viele Quasiradikale zuläßt, dann gilt der

SATZ III. *Wenn eine Wurzel eines in $K[x]$ irreduziblen Polynoms $f(x)$ ein Quasiradikalausdruck über K ist, so ist die Galoissche Gruppe dieses Polynoms auflösbar. Wenn umgekehrt die Galoissche Gruppe des Polynoms*

[3] $\alpha\sigma$ bezeichnet das Bild von α beim Automorphismus σ.

[4] Natürlich wäre es genügend, uns auch im Satz I auf den Fall $n =$ Primzahl zu beschränken.

$f(x)$ auflösbar ist, so lassen sich alle Wurzeln durch Quasiradikalausdrücke über K darstellen.

BEWEIS. Wir beweisen zuerst die erste Behauptung. Nehmen wir an, daß $f(x)$ $(\in K[x])$ in $K[x]$ irreduzibel ist, und K enthält alle notwendige Einheitswurzeln für $p \neq \chi$, auserdem sei $f(\alpha)=0$, wo α ein Quasiradikalausdruck über K ist. Das bedeutet, daß eine Körperkette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_s = K(\alpha)$$

existiert, so daß $[K_{i+1} : K_i] = p_i$ und $K_{i+1} = K_i(\alpha_i)$ erfüllt sind, wo α_i entweder ein Radikal oder ein Quasiradikal über K_i bezeichnet. Daraus folgt, daß K_{i+1} zyklisch über K_i ist. Wir definieren nun eine Körperkette K'_i folgenderweise: Es sei $K'_0 = K_0$. Wenn K'_{i-1} schon definiert ist, so sei K'_i der kleinste Körper, der K'_{i-1} und alle bezüglich K konjungierten Elemente $\alpha_{i-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{i-1}^{(n_{i-1})}$ von α_{i-1} enthält. Die Körper K'_i sind offenbar normale Erweiterungen des Körpers K. In der Körperkette

$$K'_{i-1} \subseteq K'_{i-1}(\alpha_{i-1}^{(1)}) \subseteq \cdots \subseteq K'_{i-1}(\alpha_{i-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{i-1}^{(n_{i-1})}) = K'_i$$

ist der Grad der nacheinanderfolgenden Erweiterungen entweder 1 oder eine Primzahl (und zwar eben p_i). Daher ist die Galoissche Gruppe der normalen Erweiterungen K'_s über K auflösbar. Der Körper K'_s enthält aber den Zerfällungskörper von $f(x)$, und so muß auch die Galoissche Gruppe von $f(x)$ auflösbar sein.

Nun wenden wir uns dem Beweis der zweiten Behauptung zu. Diese werden wir durch vollständige Induktion nach dem Körpergrad beweisen. Wir bezeichnen den Zerfällungskörper des in $K[x]$ irreduziblen Polynoms $f(x)$ mit L. Für $L = K$ ist die Behauptung klar. Es sei $[L:K] = n > 1$, und nehmen wir an, daß für kleinere Körpergrade der Satz schon bewiesen ist. Bezeichnen wir die zur Erweiterung gehörige Galoissche Gruppe mit G. Wegen der Auflösbarkeit der Gruppe G existiert eine Gruppenkette

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = \{e\},$$

wo G_i ein Normalteiler von G_{i-1} ist und der Index von G_i in G_{i-1} eine Primzahl p_i ist. Dazu gehört eine Körperkette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r = L,$$

wo K_i aus den durch die Elemente von G_i festgelassenen Elementen von L besteht. K_i ist normal über K_{i-1} mit der Galoisschen Gruppe G_{i-1}/G_i. Deswegen ist der Körpergrad $[K_i : K_{i-1}] = p_i$. Nun adjungieren wir zu dem Körper K die p_i-ten Einheitswurzeln für von der Charakteristik des Körpers verschiedene Primzahlen p_i. Die so entstandene Erweiterung M von K erfüllt

sicher $[M:K] \leqq \prod_{p_i \neq \chi} (p_i - 1) < n$ und ist auflösbar über K. Es sei M_i der durch M und K_i erzeugte Körper. Es ist wohlbekannt, daß entweder $[M_i : M_{i-1}] = p_i$ oder $M_i = M_{i-1}$, und zwar ist im ersten Fall die Erweiterung widerum zyklisch. Man kann mittels einer passenden Durchnumerierung erreichen, daß nur der erste Fall auftritt. Alle Elemente des Körpers M sind wegen der Induktionshypothese Quasiradikalausdrücke über K. Aus den Sätzen I und II folgt, daß $M_i = M_{i-1}(\beta_i)$, wo β_i entweder ein Radikal oder ein Quasiradikal über M_{i-1} ist, je nachdem $\chi \neq p_i$ oder $\chi = p_i$ gilt. Daraus ergibt sich, daß alle Elemente von M_r — in der ursprünglichen Numerierung —, und somit auch die Elemente von $K_r = L$ Quasiradikalausdrücke über K sind, w. z. b. w

4. Anhang. Hier werden wir zeigen, daß die Erweiterungen durch ein Radikal oder Quasiradikal Normalbasen von derselben Form besitzen. Dies zeigt eine weitere Analogie zwischen Radikalen und Quasiradikalen.

Satz IV. *Ist α wie in Satz I oder wie in Satz II definiert, je nachdem $\chi \nmid n$ oder χ / n ist, so bilden die Konjugierten von $\frac{1}{\alpha - 1}$ eine Normalbasis der Erweiterung L über K.*

Fall 1. $[L:K] = n$, $L = K(\alpha)$, $\alpha^n = a \in K$, $\chi \nmid n$. In diesem Fall gilt offenbar $a \neq 1$, und folglich

$$\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{a - 1} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = \frac{1}{a - 1} (\alpha^n + \cdots + \alpha + 1).$$

Es genügt zu beweisen, daß das Element $1 + \alpha + \cdots + \alpha^n$ und seine Konjugierten über K linear unabhängig sind. Es sei $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{ij} \alpha^j = 0$, wo ε eine primitive n-te Einheitswurzel ist und $\lambda_i \in K$. Dann ist $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon^{ij} \right) \alpha^j = 0$ und wegen der linearen Unabhängigkeit der α^j über K folgt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon^{ij} = 0$ $(1 \leqq j \leqq n)$. Die Determinante $|\varepsilon^{ij}|$ dieses homogen linearen Gleichungssystems mit den Unbekannten λ_i ist von Null verschieden, und so $\lambda_i = 0$, w. z. b. w.

Fall 2. $[L:K] = p$, $L = K(\alpha)$, $\alpha^p - \alpha = a \in K$, $\chi = p$
Es sei $\eta = \sigma - 1$ und

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - i + 1)}{i!} \qquad (0 < i < p)$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{i} = 0 \qquad (i < 0).$$

Dann gilt für $1<i<p$: $\binom{\alpha}{i}\eta=\binom{\alpha}{i}\sigma-\binom{\alpha}{i}=\binom{\alpha+1}{i}-\binom{\alpha}{i}=\binom{\alpha}{i-1}$ für $i=1: \alpha\eta=\alpha+1-\alpha=1$, und endlich für $i\leqq 0$ stets $\binom{\alpha}{i}\eta=\binom{\alpha}{i-1}$.

In jedem Fall gilt also $\binom{\alpha}{i}\eta=\binom{\alpha}{i-1}$.

Die Elemente $1, \eta, \ldots, \eta^{p-1}$ von Γ_K^G sind offenbar linear unabhängig über K. Anderseits besteht $\binom{\alpha}{p-1}\eta^j=\binom{\alpha}{p-j-1}\neq 0$, falls $j\leqq p-1$. Darum wird $\binom{\alpha}{p-1}$ durch kein Element von Γ_K^G annulliert, d. h. $\binom{\alpha}{p-1}$ bildet[2] nebst seinen Konjugierten eine Normalbasis von L über K. Endlich folgt aus

$$\binom{\alpha}{p-1}=\frac{\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-p+2)}{(p-1)!}=\frac{1}{(p-1)!}\frac{\alpha\cdot\ldots\cdot(\alpha-p+2)(\alpha-p+1)}{\alpha-p+1}=-\frac{a}{\alpha+1},$$

daß $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+2}, \ldots, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha}$ eine Normalbasis bilden, w. z. b. w.

Literatur

[1] E. Fried, On Galois Modules of Vector-Spaces, *Publicationes Math., Debrecen,* **6** (1959), 101—110.

[2] F. Kasch, Über den Endomorphismenring eines Vektorraumes und der Satz von der Normalbasis, *Math. Annalen,* **126** (1953), 447—463.

ÜBER DIE KANONISCHE DARSTELLUNG DER LINEAREN OPERATIONEN

Von

L. G. PÁL

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 15. April 1959.)

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage: Unter welchen Bedingungen können wir gewisse in Funktionenräumen erklärte lineare Operationen in der einfachen kanonischen Darstellung

$$A(f)=\int f(x)g(x)\,dx$$

angeben? Der Einfachheit halber betrachten wir im ersten Teil der Arbeit die linearen Operationen der stetigen Funktionen, während der zweite Teil einige Folgen und Verallgemeinerungen des im ersten Teil angegebenen Satzes enthält.

Erster Teil

Wir bezeichnen mit $C=C\langle a,b\rangle$ den linearen normierten Raum der im abgeschlossenen Intervall $\langle a,b\rangle$ definierten reellen stetigen Funktionen, in welchem die Norm einer Funktion $f(x)\in C$ in gewöhnlicher Weise mittels der Gleichung

$$\|f\|_C=\|f\|=\operatorname*{Max}_{x\in\langle a,b\rangle}|f(x)| \tag{1}$$

erklärt wird.

Es sei jedem Element $f\in C$ eine Zahl $A(f)$ so zugeordnet, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} && A(f_1+f_2)=A(f_1)+A(f_2); \\
(2)\quad &\text{b)} && A(\lambda f)=\lambda A(f), \qquad (\lambda \text{ ist eine reelle Zahl}); \\
&\text{c)} && |A(f)|\leqq M\|f\|, \qquad (M \text{ ist unabhängig von } f).
\end{aligned}$$

In diesem Falle nennt man $A(f)$ eine lineare Operation (Funktional) im Raum C, und die kleinstmögliche Zahl M in (2c) heißt die Norm der Operation $A(f)$:

$$\|A\|=\operatorname{Min}\{M\}=\operatorname*{Sup}_{(f\in C)}\left\{\frac{|A(f)|}{\|f\|}\right\}. \tag{3}$$

Es ist bekannt, daß wir für jede gegebene lineare Operation $A(f)$ des Raumes C eine Funktion $\alpha(x)$ von beschränkter Schwankung so finden können, daß die kanonische Darstellung

$$A(f)=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \tag{4}$$

für jedes $f\in C$ möglich ist ([1], [2]).

In erstem Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Frage: Welche sind die charakteristischen Eigenschaften derjenigen in C definierten Operationen, für welche die in (4) auftretenden Funktionen $\alpha(x)$ absolut stetig sind, d. h. welche eine einfache kanonische Darstellung

$$A(f)=\int_a^b f(x)\left(\frac{d}{dx}\alpha(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\beta(x)\,dx \tag{5}$$

zulassen?

Die Antwort ist sehr einfach, es besteht nämlich der folgende

SATZ. *Eine im Raum C definierte lineare Operation $A(f)$ hat die kanonische Darstellung* (5) *dann und nur dann, wenn für jede gleichmäßig beschränkte und fast überall gegen Null strebende Funktionenfolge $f_n(x)\in C$ die Folge $A(f_n)$ ebenfalls gegen Null konvergiert, also wenn aus*

$$|f_n(x)|\leqq K, \qquad (x\in\langle a,b\rangle;\ n=1,2,\ldots)$$

und

$$f_n(x)\to 0,\ f.\ ü.\ in\ \langle a,b\rangle \tag{6}$$

die Relation

$$A(f_n)\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

folgt.

BEWEIS. Die Notwendigkeit unserer Behauptung ist eine einfache Folgerung des bekannten Lebesgueschen Integralsatzes, und daher ist bloß die Hinlänglichkeit zu beweisen.

Zu diesem Zweck werden wir den bekannten von F. RIESZ herrührenden Grundgedanken (vgl. [2]) anwenden, indem wir die im Satz genannte Operation $A(f)$ auf einen umfassenderen Funktionenraum ausdehnen, um dann mit Hilfe der so ausgedehnten Operation unseren Satz zu beweisen.

1. DEFINITION I. *Es sei $C_1=C_1\langle a,b\rangle$ die Menge aller in $\langle a,b\rangle$ definierten Funktionen $\varphi(x)$, für welche wir eine gleichmäßig beschränkte und monoton wachsende Funktionenfolge $f_n(x)\in C\langle a,b\rangle$ so angeben können, daß sie fast überall gegen $\varphi(x)$ konvergiert, also*

$\varphi(x) \in C_1$, *wenn es* $\{f_n(x)\}_1^\infty \subset C$ *gibt, so daß*

a) $$|f_n(x)| \leqq K;\ x \in \langle a, b\rangle,\ n = 1, 2, \ldots,$$

(7) b) $$f_n(x) \leqq f_{n+1}(x);\ x \in \langle a, b\rangle,\ n = 1, 2, \ldots,$$

c) $$f_n(x) \nearrow \varphi(x) \text{ f. ü. in } \langle a, b\rangle.$$

Wir zeigen, daß $A(f_n)$ für eine solche Folge $\{f_n(x)\}$ konvergiert. Betrachten wir nämlich die folgende Reihe mit positiven Gliedern

(8) $$|A(f_1)| + \sum_{k=2}^{\infty} A(f_k) - A(f_{k-1})|$$

und bezeichnen wir ihre Teilsummen mit S_n, so gilt

(9) $$S_n = A(s_n(x)) = A\left(\varepsilon_1 f_1(x) + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k \{f_k(x) - f_{k-1}(x)\}\right),$$

mit

$$\varepsilon_k = \operatorname{sign}(A(f_k) - A(f_{k-1})),\ \varepsilon_1 = \operatorname{sign} A(f_1),$$

und es ergibt sich wegen der Monotonie der Folge $\{f_n(x)\}$ die folgende Ungleichung

$$S_n = A(s_n) \leqq \|A\|\,\|s_n\| \leqq \|A\| \operatorname*{Max}_{x \in \langle a, b\rangle} \left[|f_1| + \sum_{2}^{n} |f_k - f_{k-1}|\right] \leqq$$

$$\leqq \|A\| \operatorname*{Max}_{\langle a, b\rangle} [|f_1| + (f_n - f_1)] \leqq \|A\| \operatorname*{Max}_{\langle a, b\rangle} [2|f_1| + |f_n|] \leqq \|A\| 3K,$$

womit die Konvergenz der Reihe (8) bewiesen ist. Daraus folgt aber, daß die Reihe

(10) $$A(f_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \{A(f_k) - A(f_{k-1})\}$$

ebenfalls konvergiert und somit die Folge $\{A(f_n)\}$ einen endlichen Grenzwert hat.

Nach dieser Bemerkung können wir die im Satz genannte Operation $A(f)$ sehr leicht auf die Funktionenklasse $C_1\langle a, b\rangle$ ausdehnen.

DEFINITION II. *Wenn* $\varphi(x)$ *ein Element von* C_1 *ist, dann sei*

(11) $$A(\varphi) = \lim_{n \to \infty} A(f_n),$$

wo $\{f_n\}$ *eine beliebige in* (7) *auftretende Funktionenfolge von* $C\langle a, b\rangle$ *ist.*

Es ist zu zeigen, daß diese Definition eindeutig, d. h. unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $\{f_n(x)\}$ ist. Es sei nämlich $\{g_n(x)\}_1^\infty \subset C\langle a, b\rangle$ eine andere Folge, die gleichfalls die in (7) genannten Eigenschaften besitzt, also

$$|g_n(x)| \leqq \bar{K}, \qquad (x \in \langle a, b\rangle;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$g_n(x) \nearrow \varphi(x) \text{ f. ü. in } \langle a, b\rangle,$$

so hat man für die Folge $\{h_n(x)\} = \{f_n(x) - g_n(x)\}$ die Bedingungen

$$|h_n(x)| \leqq K + \overline{K} = \overline{\overline{K}}, \qquad (x \in \langle a, b\rangle;\ n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0 \text{ f. ü. in } \langle a, b\rangle;$$

daher folgen nach (6) die Relationen

$$A(h_n) = A(f_n - g_n) = A(f_n) - A(g_n) \to 0,$$
$$\lim A(f_n) = \lim A(g_n),$$

was die Eindeutigkeit der Definition II liefert. Wir bemerken noch:

$$\text{(12)} \qquad \begin{gathered} \varphi_1, \varphi_2 \in C_1 \text{ impliziert} \\ \varphi_1 + \varphi_2 \in C_1 \text{ und } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2). \end{gathered}$$

DEFINITION III. *Es sei $C_2 = C_2\langle a, b\rangle$ die Menge aller in $\langle a, b\rangle$ definierten Funktionen $\psi(x)$, welche als Differenz von zwei der Klasse C_1 zugehörenden Funktionen darstellbar sind:*

$$\text{(13)} \qquad \begin{gathered} \psi(x) \in C_2, \text{ wenn } \psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \\ \text{wo } \varphi_1, \varphi_2 \in C_1. \end{gathered}$$

Endlich geben wir mit Hilfe dieser letzteren Erklärung die Ausdehnung der Operation $A(f)$ auf die Klasse $C_2\langle a, b\rangle$:

DEFINITION IV. *Wenn $\psi(x)$ ein Element von C_2 ist, dann sei*

$$\text{(14)} \qquad A(\psi) = A(\varphi_1) - A(\varphi_2),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2 \in C_1$ und $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ gelten.

Wie aus der zweiten Relation von (12) erhellt, ist diese Definition ebenfalls eindeutig, also gilt

$$A(\varphi_1) - A(\varphi_2) = A(\overline{\varphi}_1) - A(\overline{\varphi}_2).$$

falls

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \text{ und } \psi(x) = \overline{\varphi}_1(x) - \overline{\varphi}_2(x),$$
$$(\varphi_1, \varphi_2, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \in C_1)$$

2. In diesem Abschnitt werden wir die Eigenschaften der Funktionenklasse $C_2\langle a, b\rangle$ und die der ausgedehnten Operation $A(f)$ untersuchen.

(*a*) Die Klasse C_2 ist eine lineare Funktionenmenge und die in (14) erklärte Operation bleibt additiv und homogen, d. h. aus $\psi_1, \psi_2 \in C_2$ folgen

$$\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \in C_2$$

und

(15) $$A(\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2)=\lambda_1 A(\psi_1)+\lambda_2 A(\psi_2),$$

wo λ_1 und λ_2 reelle Zahlen sind.

(*b*) Wir dürfen die Klasse C_2 als einen linearen normierten Raum auffassen, insofern wir die Norm eines Elements $\psi\in C_2$ mit der Gleichung

(16) $$\|\psi\|=\text{wes. ob. Grenze von } |\psi| \text{ in } \langle a, b\rangle$$

erklären. Diese Norm existiert nach den Definitionen (I), (III) für jede $\psi\in C_2$ und ist eine nichtnegative endliche Zahl. Der so definierte normierte Raum C_2 enthält den ursprünglichen Raum C als einen abgeschlossenen Unterraum, also wenn

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C\subset C_2 \text{ und } \|f_n-f_m\|\to 0, \qquad (n, m\to\infty),$$

dann existiert eine Funktion $f(x)\in C$, für welche

$$\|f_n-f\|\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

(*c*) Wir können leicht einsehen, daß unsere ausgedehnte Operation beschränkt ist, und daß ihre in C_2 sich ergebende Norm gleich der Norm der ursprünglichen Operation ist; es folgt also aus $\psi\in C_2$

$$|A(\psi)|\leqq \bar{M}\|\psi\|$$

(17) und

$$\|A\|=\operatorname*{Sup}_{(\psi\in C_2)}\left\{\frac{|A(\psi)|}{\|\psi\|}\right\}=\operatorname*{Sup}_{(f\in C)}\left\{\frac{|A(f)|}{\|f\|}\right\}=\|A\|.$$

(*d*) Unsere ausgedehnte Operation ist als Differenz von zwei positiven Operationen darstellbar* (vgl. [3]).

Betrachten wir nämlich die ursprüngliche in C definierte Operation $A(f)$, und ordnen wir jeder nichtnegativen stetigen Funktion $f(x)$ die Zahl

(18) $$A^+(f)=\operatorname*{Sup}_{(0\leqq g\leqq f;\, g\in C)}\{A(g)\}\geqq A(0)=0$$

zu.

Wenn wir jede Funktion $f(x)\in C$ in ihre positiven und negativen Bestandteile zerlegen:

(19) $$f(x)=f^+(x)-f^-(x), \text{ wo } f^+=\operatorname{Max}\{f, 0\}, f^-=\operatorname{Max}\{-f, 0\},$$

dann können wir mittels (18) und (19) die Operation $A^+(f)$ für $C\langle a, b\rangle$ folgenderweise erklären:

(20) $$A^+(f)=A^+(f^+-f^-)=A^+(f^+)-A^+(f^-).$$

* Wir nennen eine Operation $A(f)$ positiv, wenn für jedes $f(x)\geqq 0$ auch $A(f)\geqq 0$ ist.

Die so definierte Operation $A^+(f)$ ist offenbar eine positive Majorante von $A(f)$ $(A^+(f) \geqq A(f)$ für jedes $f \in C)$, und mit Hilfe der Zerlegung

$$A(f) = A^+(f) - [A^+(f) - A(f)] = A^+(f) - A^-(f) \tag{21}$$

entsteht die ursprüngliche Operation $A(f)$ als Differenz von zwei im Raum C definierten positiven Operationen.

Für unsere Behauptung ist nun das folgende Lemma von grundlegender Bedeutung.

LEMMA. *Die in* (21) *auftretenden positiven Komponenten von* $A(f)$ *haben ebenfalls die im Satz genannte Eigenschaft* (6), *also wenn*

$$\begin{gathered} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C; \ |f_n(x)| \leqq K, \qquad (x \in \langle a, b \rangle;\ n = 1, 2, \ldots) \\ f_n(x) \to 0, \qquad (n \to \infty) \ f.\ ü.\ in\ \langle a, b \rangle, \end{gathered} \tag{22}$$

dann

$$A^+(f_n) \underset{(n\to\infty)}{\to} 0 \quad und \quad A^-(f_n) \underset{(n\to\infty)}{\to} 0. \tag{23}$$

BEWEIS DES LEMMAS. Es genügt wegen (21), unsere Behauptung für die Operation $A^+(f)$ zu beweisen, und wir können uns nach (20) auf den Fall beschränken, wo die in (22) auftretende Folge $\{f_n(x)\}$ aus nichtnegativen Funktionen besteht. In diesem Fall kann man aber nach (18) jedem Element $f_n(x)$ eine stetige Funktion $g_n(x)$ derart zuordnen, daß die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$0 \leqq g_n(x) \leqq f_n(x), \tag{24}$$

$$0 \leqq A^+(f_n) \leqq A(g_n) + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{25}$$

mithin ist

$$|g_n(x)| \leqq K, \qquad (x \in \langle a, b \rangle;\ n = 1, 2, \ldots)$$

und

$$g_n(x) \underset{(n\to\infty)}{\to} 0 \text{ f. ü. in } \langle a, b \rangle,$$

und so folgt aus (6), daß $A(g_n) \to 0$, was zusammen mit (25) unsere Behauptung ergibt.

Auf Grund des Lemmas können wir das im Abschnitt **1.** behandelte Ausdehnungsverfahren für $A^+(f)$ und $A^-(f)$ einzeln durchführen, und so entsteht die erwünschte Zerlegung

$$A(\psi) = A^+(\psi) - A^-(\psi) \tag{26}$$

für jedes $\psi \in C_2$.

(*e*) Die Klasse C_1 enthält die beschränkten und nach unten stetigen Funktionen* als überall genommene Grenzfunktionen der in Def. I. auftretenden Funktionen $f_n \in C$, und $C_1\langle a, b\rangle$ ist mit der Menge der Funktionen identisch, welche je fast überall mit einer solchen Funktion übereinstimmen. So enthält die Klasse C_2 unter anderen die charakteristischen Funktionen beliebiger offener oder abgeschlossener Mengen $H \subset \langle a, b\rangle$.

(*f*) HILFSSATZ I. *Es sei* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *eine solche monoton wachsende Folge aus* $C_1\langle a, b\rangle$, *die für fast alle Punkte von* $\langle a, b\rangle$ *gleichmäßig beschränkt ist. In diesem Fall gehört ihre Grenzfunktion* $\varphi(x)$ *ebenfalls zu der Klasse* C_1 *und außerdem besteht die Limesrelation*

$$\lim_{n\to\infty} A(\varphi_n) = A(\lim_{n\to\infty} \varphi_n) = A(\varphi). \tag{27}$$

BEWEIS DES HILFSSATZES. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir gemäß (*d*) voraussetzen, daß die ursprüngliche — und so auch die ausgedehnte — Operation positiv ist.

Nach der Definition (I) können wir jeder Funktion $\varphi_i(x)$ der fraglichen Folge $\{\varphi_n\}$ eine solche Funktionenfolge $\{f_{ik}(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset C\langle a, b\rangle$ zuordnen, für welche die Relationen

$$\begin{aligned} &f_{ik} \nearrow \varphi_i(x), \qquad (k\to\infty) \text{ f. ü. in } \langle a, b\rangle \\ &|f_{ik}(x)| \leqq K, \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{28}$$

bestehen, wo K eine gemeinsame Schranke der Folge $\{\varphi_n(x)\}$ bedeutet.

Bilden wir nun die Folge

$$f_n(x) = \operatorname*{Max}_{(i,\, k \leqq n)} \{f_{ik}(x)\}, \tag{29}$$

deren Elemente ebenfalls zum Raum $C\langle a, b\rangle$ gehören und die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} &f_n(x) \leqq f_{n+1}(x), \qquad (x \in \langle a, b\rangle;\ n = 1, 2, \ldots) \\ &\text{und} \\ &|f_n(x)| \leqq K, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{30}$$

Es gibt daher eine Funktion $\varphi(x) \in C_1\langle a, b\rangle$, für welche

$$f_n(x) \nearrow \varphi(x), \qquad (n\to\infty) \tag{31}$$

und so nach Definition II

$$A(f_n) \to A(\varphi). \tag{32}$$

Da ferner für jedes feste n

$$f_k(x) \geqq f_{nk}(x), \qquad (k > n), \tag{33}$$

* R. BAIRE, *Bull. Soc. Math.*, **32** (1904), 125.

so ergibt sich für $k \to \infty$ die Ungleichung

$$\varphi(x) \geqq \varphi_n(x) \geqq f_n(x), \text{ f. ü. in } \langle a, b \rangle, \tag{34}$$

in welcher die letzte Ungleichung eine unmittelbare Folge von (28) und (29) ist, wenn wir die Monotonie der Folge berücksichtigen. Weil $A(f)$ — nach unserer Annahme — eine positive Operation ist, so bekommen wir aus (34), daß für jedes n

$$A(\varphi) \geqq A(\varphi_n) \geqq A(f_n). \tag{35}$$

Diese Ungleichung zusammen mit (31), (32) und (34) ergibt aber, daß wirklich

$$\varphi_n(x) \nearrow \varphi(x) \in C_1 \text{ f. ü. und } \lim_{n \to \infty} A(\varphi_n) = A(\varphi), \tag{36}$$

w. z. b. w.

Unser Hilfsatz I hat ein einfaches Korollar:

HILFSSATZ II. *Ist* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_2\langle a, b \rangle$ *eine fast überall gleichmäßig beschränkte monoton wachsende (oder abnehmende) Folge, so gehört ihre fast überall existierende Grenzfunktion* $\psi(x)$ *ebenfalls zu* $C_2\langle a, b \rangle$, *und es gilt*

$$\lim_{n \to \infty} A(\psi_n) = A(\psi). \tag{37}$$

3. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zum Beweis unseres Satzes.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit nach **2.** (*d*) annehmen, daß unsere in $C\langle a, b \rangle$ definierte und der Bedingung (6) genügende Operation $A(f)$ positiv ist.

Wir führen die Funktionen

$$\lambda_{ax} = \lambda_{ax}(t) \tag{38}$$

als die charakteristischen Funktionen des Teilintervalls $\langle a, x) \subset \langle a, b \rangle$ ein. Nach **2.** (*e*) gehören diese Funktionen zur Klasse C_2, man kann also mit Hilfe der ausgedehnten Operation $A(f)$ die monoton wachsende Funktion

$$\alpha(x) = A(\lambda_{ax}) \tag{39}$$

bilden.

Auf Grund von **2.** (*b*) und **2.** (*c*) können wir leicht einsehen, daß für jedes $f(x) \in C\langle a, b \rangle$ die kanonische Darstellung

$$A(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \tag{40}$$

möglich ist (vgl. [2]).

Wir haben also nach (5) nur die absolute Stetigkeit von $\alpha(x)$ zu beweisen.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine beliebige Menge $E \subset \langle a, b \rangle$ mit dem Lebesgueschen Maß Null:

$$m(E) = |E| = 0. \tag{41}$$

Es gibt bekanntlich eine monoton abnehmende Folge von in $\langle a, b \rangle$ offenen Punktmengen

$$N_1 \supseteqq N_2 \supseteqq N_3 \supseteqq \cdots \supseteqq N_k \supseteqq \cdots, \tag{42}$$

für welche die Relationen

$$N_k \supset E \ (k = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad m(N_k) \to 0, \ (k \to \infty) \tag{43}$$

gelten. Wir bezeichnen die charakteristische Funktion der Menge N_k mit

$$\nu_k(x) = \begin{cases} 1\,; & x \in N_k, \\ 0\,; & x \notin N_k. \end{cases}$$

Nach 2. (e) und (43) bestehen die Relationen

$$\nu_k(x) \in C_2\langle a, b \rangle, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{44}$$

und

$$\nu_k(x) \searrow 0, \ (k \to \infty) \text{ f. ü. in } \langle a, b \rangle. \tag{45}$$

Jede beliebige dieser offenen Mengen N_k ist aber eine Vereinigung von abzählbar vielen elementenfremden offenen Intervallen:

$$N_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n^{(k)}, d_n^{(k)}) \tag{46}$$

und so können wir die Variation von $\alpha(x)$ über der Menge E nach Hilfssatz II und (43) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{(E)} |d\alpha(x)| \quad \bigvee_{(E)}(\alpha) &\leqq \bigvee_{(N_k)}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha(d_n^{(k)}) - \alpha(c_n^{(k)})] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A(\lambda_{ad_n^{(k)}}) - A(\lambda_{ac_n^{(k)}})] = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_{ad_n^{(k)}} - \lambda_{ac_n^{(k)}}]\right) = \\ &= A(\nu_k(x)) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{47}$$

Wenn wir endlich die Relation (45) in Betracht ziehen, so bekommen wir aus Hilfssatz II

$$A(\nu_k(x)) \to 0, \tag{48}$$

was — zusammen mit der vorstehenden Ungleichung (47) — ergibt, daß die Variation von $\alpha(x)$ über E gleich Null ist. Weil E eine beliebige Nullmenge war, muß also $\alpha(x)$ absolut stetig sein. W. z. b. w.

Zweiter Teil

1. In diesem Teil geben wir einige Konsequenzen und Verallgemeinerungen des im ersten Teil behandelten Satzes.

DEFINITION I. *Es sei* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\langle a, b\rangle$ *ein linearer normierter Raum, der aus in* $\langle a, b\rangle$ *integrierbaren Funktionen besteht, welche die folgenden Bedingungen befriedigen:*

α) *falls* $|f(x)|\leq|g(x)|$, *f. ü. in* $\langle a, b\rangle$,

dann $\|f\|_{\mathfrak{M}}\leqq\|g\|_{\mathfrak{M}}$;

β) *falls* $\|f_n(x)\|_{\mathfrak{M}}\leqq K, \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$

und $f_n(x)\to 0$, *f. ü. in* $\langle a, b\rangle$,

dann $\lim\limits_{n\to\infty}(\|f_n\|_{\mathfrak{M}})=0$;

γ) *die stetigen Funktionen gehören zum Raum* $\mathfrak{M}$, *und für jedes* $f\in\mathfrak{M}$ *existiert eine aus stetigen Funktionen bestehende Folge* $\{f_n\}$ *derart, daß die Relationen*

$$|f_n(x)|\leqq|f(x)|, \text{ f. ü. in } \langle a, b\rangle, \qquad (n=1, 2, \ldots);$$
$$f_n(x)\to f(x), \text{ f. ü. in } \langle a, b\rangle, \qquad (n\to\infty);$$
$$\|f_n-f\|_{\mathfrak{M}}\to 0, \qquad (n\to\infty)$$

bestehen.

Für diesen Raum $\mathfrak{M}$ können wir den folgenden Satz aussprechen:

SATZ I. *Jede lineare Operation* $A(f)$ *des Raumes* $\mathfrak{M}$ *hat die kanonische Darstellung*

$$A(f)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx, \tag{1}$$

wo $g(x)$ *ebenfalls eine integrierbare Funktion ist.*

BEWEIS. Nach den Bedingungen α), β) können wir auf Grund des ersten Teils die Operation für stetige $f_n\in\mathfrak{M}$ in der Gestalt (1) schreiben. Ist $f(x)$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$, so folgt aus γ), daß für eine passend gewählte, aus stetigen Funktionen gebildete Folge $\{f_n\}$ die Relationen

$$\begin{gathered} A(f_n)\quad\int_a^b f_n(x)g(x)\,dx\to\int_a^b f(x)g(x)\,dx, \\ |A(f_n)-A(f)|\leqq\|A\|\,\|f_n-f\|_{\mathfrak{M}}\to 0 \end{gathered} \tag{2}$$

bestehen, was unsere Behauptung liefert.

Wir heben zwei Folgerungen des Satzes I hervor, von denen die zweite seit einigen Jahrzehnten bekannt ist. (Vgl. [5].).

SATZ II. *Wenn wir für den linearen Raum $\Gamma\langle a, b\rangle$ der stetigen Funktionen die Norm einer Funktion $f(x)\in\Gamma$ so definieren, daß für jede gleichmäßig beschränkte und fast überall gegen Null strebende Folge $\{f_n(x)\}$ auch die Folge $\{\|f_n\|_\Gamma\}$ gegen Null konvergiert, dann hat eine beliebige lineare Operation dieses Raumes Γ die kanonische Darstellung* (1).

BEMERKUNG. Eine solche Norm ist z. B.

$$\|f\|_\Gamma = \int_a^b |f(x)|p(x)dx, \tag{3}$$

wo $p(x)$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion ist. (Für den Fall $p(x)\equiv 1$ siehe [4].)

SATZ III. *Die linearen Operationen des Funktionenraumes $L^p\langle a, b\rangle$ $(1\leqq p<\infty)$ können wir ebenfalls in der Gestalt* (1) *schreiben, da $L^p\langle a, b\rangle$ ein spezieller $\mathfrak{M}$ Raum ist, in welchem wir die Norm durch die Gleichung*

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

definieren.

2. Endlich geben wir einen allgemeinen Satz, auf den sich die Beweismethode des ersten Teils fast wörtlich übertragen läßt.

DEFINITION II. *Es sei $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}\langle a, b\rangle$ ein linearer Raum, der aus meßbaren Funktionen besteht, und der mit $f(x)$ und $g(x)$ auch*

$$h(x) = \operatorname{Sup}\{f(x), g(x)\}$$

enthält.

SATZ IV. *Eine im Raum $\mathfrak{N}\langle a, b\rangle$ definierte lineare Operation $A(f)$ hat die kanonische Darstellung* (1) *dann und nur dann, wenn aus den Bedingungen*

$$|f_n(x)|\leqq f(x)\in\mathfrak{N} \quad \textit{und} \quad f_n(x)\to 0 \ \textit{f. ü},$$

die Relation $A(f_n)\to 0$ folgt.

Literaturverzeichnis

[1] F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **149** (1909), 974—977.

[2] F. Riesz, Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations, *Annales École Norm. Sup.*, **31** (1914), 9—14.

[3] F. Riesz, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Annals of Mathematics*, **42** (1940), 174—206.

[4] F. Riesz, Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes, *Kungl. Fysiografiska Sällskapets* (I) *Lund Förhandlingar*, **21** (1952), Nr. 16.

[5] F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, **69** (1910), 449—497.

SUR LA REPRÉSENTATION CANONIQUE DES FONCTIONNELLES LINÉAIRES

Par

Á. CSÁSZÁR

Institut de Mathématique, Université Eötvös Loránd, Budapest

(Reçu le 3 mai 1959.)

1. Soient $\mathfrak{S}$ une σ-algèbre de sous-ensembles d'un ensemble H, $H \in \mathfrak{S}$, μ une mesure sur $\mathfrak{S}$, et F un espace fonctionnel linéaire composé de fonctions réelles définies sur H et mesurables par rapport à $\mathfrak{S}$. On sait que les fonctionnelles linéaires T de l'espace fonctionnel F s'écrivent dans certaines conditions sous la forme

$$T(f) = \int_H fg\, d\mu, \tag{1.1}$$

où g désigne une fonction mesurable indépendante de f; c'est le cas p. ex. s'il s'agit de l'espace fonctionnel $L^p(H, \mu)$ pour $p \geqq 1$. M. L. G. PÁL vient de montrer dans l'article précédent[1] que, dans le cas où H est un intervalle fini de la droite numérique, μ désigne la mesure de Lebesgue et où l'espace F est composé des fonctions continues, des méthodes dues à F. RIESZ permettent de conclure que la formule (1.1) est vérifiée si (et évidemment seulement si) l'on a $T(f_n) \to 0$ toutefois que les fonctions f_n sont bornées dans leur ensemble et qu'elles tendent vers 0 presque partout.

Le but de cette note est de démontrer une extension du théorème de M. PÁL. Tout en gardant les idées principales de la démonstration, nous réussirons à effectuer des simplifications considérables dans les détails de celle-ci en ayant recours à quelques résultats de la théorie de la mesure de caractère moins élémentaire.

Pour pouvoir formuler notre résultat dans toute sa généralité, convenons de la terminologie suivante. Soit $\mathfrak{A}$ un anneau partiel de $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$, et faisons correspondre à tout ensemble $A \in \mathfrak{A}$ une fonction g_A, mesurable ($\mathfrak{S}$) sur A, de façon telle que, pour $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, les fonctions g_{A_1} et g_{A_2} coïncident presque partout sur $A_1 \cap A_2$. Nous appellerons la famille des fonctions g_A de ce genre une *pseudo-fonction* par rapport à $\mathfrak{A}$.

Si g est une pseudo-fonction par rapport à $\mathfrak{A}$ et f une fonction mesurable ($\mathfrak{S}$) sur H, s'annulant en dehors d'un ensemble $A \in \mathfrak{A}$, nous dirons que

[1] L. G. PÁL, Über die kanonische Darstellung der linearen Operationen, ce volume, pp. 73—84.

le produit $f \cdot g$ est *intégrable* sur H, si le produit $f \cdot g_A$ est intégrable sur A, et nous posons en ce cas

$$\int_H f \cdot g \, d\mu = \int_A f \cdot g_A \, d\mu. \tag{1.2}$$

L'intégrabilité de $f \cdot g$ et la valeur de l'intégrale de ce produit ne dépend pas du choix de l'ensemble $A \in \mathfrak{A}$, pourvu que l'on ait $f(x) = 0$ pour $x \in H - A$.

Ceci posé, appelons encore *F-majorée* une suite $\{f_n\} \subset F$, s'il existe une fonction $f \in F$ telle que $|f_n(x)| \leqq f(x)$, quel que soit $x \in H$, et nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soient $\mathfrak{S}$ une σ-algèbre de sous-ensembles d'un ensemble H, $H \in \mathfrak{S}$, μ une mesure sur $\mathfrak{S}$, et F une classe de fonctions réelles définies sur H et vérifiant les conditions*

(1.3) *chaque $f \in F$ est (finie et) mesurable sur H,*

(1.4) *$f_1, f_2 \in F$ entraîne $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in F$ pour c_1, c_2 réels,*

(1.5) *$f_1, f_2 \in F$ entraîne $\max(f_1, f_2) \in F$ et $\min(f_1, f_2) \in F$,*

(1.6) *$f \in F$ et $c > 0$ entraînent $\min(f, c) \in F$,*

(1.7) *chaque $f \in F$ s'annule en dehors d'un ensemble $A \subset H$ de mesure $\mu(A)$ σ-finie.*

T étant une fonctionnelle homogène et additive sur F, la condition nécessaire et suffisante pour que T s'écrive sous la forme (1.1), *où g désigne une pseudo-fonction par rapport à un σ-anneau $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$ proprement choisi, consiste à exiger que l'on ait $T(f_n) \to 0$ pour toute suite F-majorée $\{f_n\}$ tendant vers* 0 *presque partout sur H.*

La nécessité de la condition se déduit immédiatement du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites, à l'aide de la remarque que, $\{f_n\}$ étant une suite F-majorée, on a $|f_n| \leqq f \in F$, et que la formule (1.1) étant valable par hypothèse pour cette fonction f, l'existence de l'intégrale $\int_H f \cdot g \, d\mu$ implique par définition que f, et à plus forte raison les fonctions f_n, s'annulent en dehors d'un ensemble $A \in \mathfrak{A}$, de sorte que l'on a

$$T(f_n) = \int_H f_n \cdot g \, d\mu = \int_A f_n \cdot g_A \, d\mu.$$

Il suffit donc de démontrer la suffisance de la condition.

2. Désignons par Φ la famille des fonctions (finies et) mesurables sur H qui sont presque partout limites d'une suite F-majorée de fonctions appartenant à F:

(2.1) $\varphi \in \Phi$ équivaut à l'existence de $\{f_n\} \subset F$ telle que

$$|f_n| \leqq f \in F \text{ et que } f_n \to \varphi \text{ p. p.}$$

Si $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont deux suites F-majorées extraites de F et tendant p. p. vers une même fonction $\varphi \in \Phi$, la suite $\{f_n - g_n\}$ est également F-majorée (cf. (1. 4)) et on a $f_n - g_n \to 0$ p. p., de sorte qu'il s'ensuit par hypothèse

$$T(f_n) - T(g_n) = T(f_n - g_n) \to 0. \tag{2. 2}$$

On en déduit aisément que si $\{f_n\}$ vérifie les conditions (2. 1), la suite numérique $\{T(f_n)\}$ doit remplir la condition de Cauchy, et par suite que la limite finie

$$\lim_{n \to \infty} T(f_n) \tag{2. 3}$$

existe. De plus, $\{g_n\}$ étant une suite F-majorée extraite de F et tendant p. p. également vers φ, on a (2. 2) de sorte que la limite (2. 3) ne dépend pas du choix de la suite $\{f_n\}$, pourvu que cette suite satisfasse à (2. 1). On peut donc poser

$$T^*(\varphi) = \lim_{n \to \infty} T(f_n) \qquad \text{si } \{f_n\} \text{ vérifie (2. 1).} \tag{2. 4}$$

On constate immédiatement que l'espace fonctionnel Φ satisfait à des conditions analogues à celles (1. 3) à (1. 7), et que l'on peut trouver à une fonction $\varphi \in \Phi$ donnée une fonction f telle que

$$f \in F \text{ et que } |\varphi| \leqq f \text{ p. p.} \tag{2. 5}$$

De plus, la fonctionnelle T^* est évidemment homogène et additive sur Φ et elle coïncide avec T sur $F \subset \Phi$. Nous démontrons encore:

(2. 6) *Soit $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ une suite Φ-majorée tendant p. p. vers une fonction (finie et) mesurable φ; on aura alors $\varphi \in \Phi$ et $T^*(\varphi_n) \to T^*(\varphi)$.*

En effet, on a par hypothèse et d'après (2. 5)

$$|\varphi_n| \leqq \psi \in \Phi, \qquad \psi \leqq f \in F \text{ p. p.},$$

et comme F vérifie (1. 7), f s'annule en dehors d'un ensemble $A \in \mathfrak{S}$ de mesure $\mu(A)$ σ-finie. Posons

$$A = \bigcup_1^\infty A_n, \quad A_n \in \mathfrak{S}, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \mu(A_n) < +\infty, \tag{2. 7}$$

et soit $\{f_{nk}\}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ une suite vérifiant les conditions

$$f_{nk} \in F, \quad \lim_{k \to \infty} f_{nk} = \varphi_n \text{ p. p.} \tag{2. 8}$$

On pourra encore assujettir les fonctions f_{nk} à la condition

$$|f_{nk}| \leqq f \in F \tag{2. 9}$$

(cf. (1. 4) et (1. 5)). Ceci posé, on peut appliquer à l'ensemble A_n (de mesure finie) le théorème d'Egoroff et déterminer un ensemble $E_n \subset A_n$ tel que $E_n \in \mathfrak{S}$,

$\mu(E_n) < 2^{-n}$ et que $\{f_{nk}\}$ converge pour $k \to \infty$ vers φ_n uniformément sur $A_n - E_n$. On pourra donc choisir un indice k_n tel que

$$|f_{nk_n}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{pour } x \in A_n - E_n, \tag{2.10}$$

$$|T(f_{nk_n}) - T^*(\varphi_n)| < \frac{1}{n} \tag{2.11}$$

(cf. (2.8), (2.9) et (2.4)). Or, en posant

$$D_n = \bigcup_n^\infty E_i,$$

on aura $\mu(D_n) < 2^{-n+1}$, et (2.10) implique en conséquence de (2.7) et (2.10)

$$|f_{nk_n}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{pour } x \in A_m - D_p, \quad m < p < n. \tag{2.12}$$

Comme φ_n tend vers φ p. p., on déduit de (2.12) que $f_{nk_n} \to \varphi$ p. p. sur A_m, donc p. p. sur A et même sur H, toutes les fonctions en question s'annulant avec f p. p. en dehors de A. Vu encore que $\{f_{nk_n}\}$ est F-majorée d'après (2.9), on a $\varphi \in \Phi$ et

$$T(f_{nk_n}) \to T^*(\varphi),$$

ce qui achève en vertu de (2.11) la démonstration de (2.6).

3. Désignons maintenant par $\mathfrak{B}$ le système des ensembles dont la fonction caractéristique appartient à Φ. Les conditions analogues à celles (1.3) à (1.5), vérifiées par Φ, impliquent que $\mathfrak{B}$ est un anneau partiel de $\mathfrak{S}$, et on déduit aisément de (2.6) que $\mathfrak{B}$ est même un δ-anneau. $\mathfrak{B}$ contient évidemment tous les ensembles $B \in \mathfrak{S}$ de mesure $\mu(B)$ nulle, et tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$ est de mesure $\mu(B)$ σ-finie (cf. (1.7)).

(3.1) *Pour $f \in F$ et $c > 0$, l'ensemble de niveau*

$$H(f > c) = \{x : x \in H, f(x) > c\}$$

appartient à $\mathfrak{B}$.

Ceci résulte immédiatement de (1.6) au moyen de la formule

$$\chi = \lim_{n \to \infty} n \left[\min\left(f, c + \frac{1}{n}\right) - \min(f, c) \right], \tag{3.2}$$

où χ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $H(f > c)$, en tenant compte de ce que les fonctions au second membre de (3.2) ne dépassent pas en valeur absolue $\frac{1}{c}|f| \in F$ (cf. (1.4) et (1.5)).

On en déduit que si $f \in F, f \geqq 0$, il existe une suite $\{\varphi_n\}$, où φ_n est une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions caractéristiques d'ensembles de l'anneau $\mathfrak{B}$, telle que

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \ldots, \qquad \varphi_n \to f. \tag{3.3}$$

En effet, il suffit de poser

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{i}{2^n} \chi_{ni}, \tag{3.4}$$

où χ_{ni} désigne la fonction caractéristique de l'ensemble

$$H\left(\frac{i}{2^n} < f \leqq \frac{i+1}{2^n}\right) = H\left(f > \frac{i}{2^n}\right) - H\left(f > \frac{i+1}{2^n}\right) \in \mathfrak{B}. \tag{3.5}$$

4. En désignant pour $B \in \mathfrak{B}$ par χ_B la fonction caractéristique de B, posons

$$\vartheta(B) = T^*(\chi_B) \qquad (B \in \mathfrak{B}). \tag{4.1}$$

On déduit de l'additivité de T^* et de (2.6) que ϑ est une fonction d'ensemble σ-additive sur le δ-anneau $\mathfrak{B}$ et absolument continue par rapport à la mesure μ, puisque $\mu(B) = 0$ entraîne que χ_B est la limite p. p. de la suite $\{0\}$, donc que $T^*(\chi_B) = 0$. Par conséquent, en tenant compte de ce que les ensembles de $\mathfrak{B}$ sont de mesure μ σ-finie, on peut appliquer le théorème de Radon—Nikodym et définir sur chaque ensemble $B \in \mathfrak{B}$ une fonction g_B (finie et) mesurable ($\mathfrak{B}$) telle qu'on ait

$$\vartheta(X) = \int_X g_B \, d\mu \quad \text{pour } X \subset B, X \in \mathfrak{B}. \tag{4.2}$$

On aura pour $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ l'égalité $g_{B_1} = g_{B_2}$ p. p. sur $B_1 \cap B_2$.

Désignons par $\mathfrak{A}$ le σ-anneau des ensembles A qui peuvent être représentés sous la forme

$$A = \bigcup_1^\infty B_i, \quad B_i \in \mathfrak{B}. \tag{4.3}$$

Faisons correspondre à un ensemble $A \in \mathfrak{A}$ quelconque une fonction g_A en décomposant A suivant (4.3) en sous-ensembles disjoints et en posant $g_A(x) = g_{B_i}(x)$ pour $x \in B_i$. On constate aisément que les fonctions g_A sont mesurables ($\mathfrak{A}$) et qu'on obtient ainsi une pseudo-fonction par rapport à $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$, qui sera désignée par g.

5. Il ne reste qu'à vérifier la formule (1.1) pour $f \in F$ quelconque et pour la pseudo-fonction g que nous venons de définir.

Envisageons d'abord une fonction $f \in F$ non-négative. En ce cas f s'annule en dehors de l'ensemble

$$A \quad \bigcup_1^\infty H\left(f > \frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{A}$$

(cf. (3. 1)). Posons

$$A' = A \cap H(g_A \geqq 0) \in \mathfrak{A}, \quad A'' = A \cap H(g_A < 0) \in \mathfrak{A}, \tag{5. 1}$$

et considérons les fonctions φ_n définies par (3. 4) et (3. 5), de même que celles φ'_n et φ''_n, égales à φ_n sur l'ensemble A' ou A'' respectivement, et s'annulant ailleurs. En tenant compte de ce que les sous-ensembles appartenant à $\mathfrak{B}$ d'un ensemble fixé $B \in \mathfrak{B}$ forment une σ-algèbre, on constate que les fonctions φ'_n et φ''_n sont, ainsi que φ_n, combinaisons linéaires d'un nombre fini de fonctions caractéristiques d'ensembles appartenant à $\mathfrak{B}$:

$$\varphi'_n = \sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni}\, \chi_{B'_{ni}}, \quad \varphi''_n = \sum_{i=1}^{k''_n} c''_n\, \chi_{B''_{ni}}, \quad B'_{ni} \in \mathfrak{B}, \quad B''_{ni} \in \mathfrak{B}. \tag{5. 2}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T^*(\varphi'_n) &= \sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni}\, T^*(\chi_{B'_{ni}}) = \sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni}\, \vartheta(B'_{ni}) \\ &= \sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni} \int_{B'_{ni}} g_{B'_{ni}}\, d\mu = \sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni} \int_{B'_{ni}} g_A\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni} \int_A \chi_{B'_{ni}} g_A\, d\mu = \int_A \left(\sum_{i=1}^{k'_n} c'_{ni}\, \chi_{B'_{ni}}\right) g_A\, d\mu = \int_A \varphi'_n g_A\, d\mu, \end{aligned} \tag{5. 3}$$

eu égard à ce que $g_{B'_{ni}}$ et g_A coïncident p. p. sur B'_{ni}. On obtient de la même façon

$$T^*(\varphi''_n) = \int_A \varphi''_n g_A\, d\mu. \tag{5. 4}$$

Vu que les suites $\{\varphi'_n\}$ et $\{\varphi''_n\}$ sont majorées par f et qu'on a

$$\varphi'_n \to f \cdot \chi_{A'}, \quad \varphi''_n \to f \cdot \chi_{A''},$$

d'autre part que les suites $\{\varphi'_n g_A\}$ et $\{\varphi''_n g_A\}$ sont monotones, on tire de (2. 6)

$$T^*(\varphi'_n) \to T^*(f\chi_{A'}), \quad T^*(\varphi''_n) \to T^*(f\chi_{A''}), \tag{5. 5}$$

$$T^*(\varphi'_n) + T^*(\varphi''_n) \to T^*(f\chi_{A'}) + T^*(f\chi_{A''}) = T^*(f) = T(f), \tag{5. 6}$$

$$\int_A \varphi'_n g_A\, d\mu \to \int_A f\chi_{A'} g_A\, d\mu, \quad \int_A \varphi''_n g_A\, d\mu \to \int_A f\chi_{A''} g_A\, d\mu, \tag{5. 7}$$

c'est-à-dire que les fonctions $f\chi_{A'}g_A$ et $f\chi_{A''}g_A$ sont intégrables sur A (cf. (5. 7), (5. 4) et (5. 5)), de plus que l'on a

$$\int_A \varphi_n' g_A \, d\mu + \int_A \varphi_n'' g_A \, d\mu \to \int_A f(\chi_{A'} + \chi_{A''}) g_A \, d\mu = \int_A f g_A \, d\mu$$

et

$$T(f) = \int_A f g_A \, d\mu = \int_H f g \, d\mu.$$

Le cas d'une fonction $f \in F$ quelconque se ramène immédiatement à celui de $f \geqq 0$.

Par là le Théorème et démontré.

6. COROLLAIRE 1. *Dans les hypothèses du Théorème et avec les notations de la démonstration précédente, on a*

$$T^*(\varphi) = \int_H \varphi g \, d\mu \qquad \textit{pour } \varphi \in \Phi.$$

En effet, on n'a qu'à choisir une suite $\{f_n\}$ vérifiant (2. 1), appliquer (1. 1) à f_n au lieu de f et à remarquer que pour $f \in F$ la fonction $|f g_A|$ est intégrable sur A si f s'annule en dehors de $A \in \mathfrak{A}$.

COROLLAIRE 2. *Dans les mêmes hypothèses, si $H \in \mathfrak{A}$, la pseudo-fonction g peut être remplacée par la fonction ordinaire g_H. C'est le cas p. ex. s'il existe une fonction $f \in F$ qui ne s'annule pas sur H, ou si H est la réunion d'une suite dénombrable d'ensembles H_i tels qu'il existe pour i quelconque une fonction $f_i \in F$ qui ne s'annule pas sur H_i.*

C'est la conséquence de (3. 1).

COROLLAIRE 3. *H étant un sous-ensemble mesurable au sens de Lebesgue de l'espace cartésien E^r, soit F la famille des fonctions bornées et continues sur H, et désignons par T une fonctionnelle homogène et additive sur F telle que $T(f_n) \to 0$ toutefois que les fonctions $f_n \in F$ tendent vers* 0 p. p. *sur H et qu'elles restent bornées dans leur ensemble. On a en ce cas* (1. 1), *où μ désigne la mesure de Lebesgue et g est une fonction mesurable.*[2]

En effet, en ce cas une suite est F-majorée si est seulement si elle est majorée par une constante; cf. aussi Cor. 2.

COROLLAIRE 4. *Soient $\mathfrak{S}$ une σ-algèbre composée de sous-ensembles d'un ensemble H, $H \in \mathfrak{S}$, μ une mesure sur $\mathfrak{S}$, F $L^p(H, \mu)$ la famille des fonctions (finies et) mesurables ($\mathfrak{S}$) telles que*

$$\|f\|^p = \int_H |f|^p \, d\mu < +\infty \qquad (p > 0).$$

[2] Cf. l'ouvrage cité sous[1].

T étant une fonctionnelle homogène et additive sur F telle que $T(f_n) \to 0$ toutefois que $\|f_n\| \to 0$, on a (1.1) *pour une pseudo-fonction g par rapport à la famille des ensembles de mesure σ-finie.*

En effet, les conditions (1.3) à (1.7) étant évidemment remplies pour $L^p(H, \mu)$, on n'a qu'à remarquer que les hypothèses

$$f_n \in L^p(H, \mu), \quad f_n \to 0 \text{ p. p.}, \quad |f_n| \leqq f \in L^p(H, \mu)$$

impliquent, en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, la relation $\|f_n\| \to 0$, et que la famille $\mathfrak{B}$ de la démonstration du Théorème coïncide en ce cas avec la famille des ensembles de mesure finie, donc la famille $\mathfrak{A}$ avec celle des ensembles de mesure σ-finie.

ON CANTOR'S SERIES WITH CONVERGENT $\sum \frac{1}{q_n}$

By

P. ERDŐS and A. RÉNYI

Mathematical Institute, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received 6 April, 1959)

Introduction

Let $\{q_n\}$ be an arbitrary sequence of positive integers subjected only to the restriction $q_n \geqq 2$ $(n=1, 2, \ldots)$. Then every real number x $(0 \leqq x < 1)$ can be represented in the form of *Cantor's series*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_1 q_2 \ldots q_n} \tag{1}$$

where the n-th "digit" $\varepsilon_n(x)$ may have the values $0, 1, \ldots, q_n - 1$. The digits $\varepsilon_n(x)$ can be obtained successively starting with $r_0(x) = x$, by the algorithm

$$\varepsilon_n(x) = [q_n r_{n-1}(x)], \quad r_n(x) = (q_n r_{n-1}(x)) \tag{2}$$

where $[t]$ denotes the integral part, and (t) the fractional part of the real number t.

In some previous papers ([1], [2], [3]) the statistical properties of the digits $\varepsilon_n(x)$ valid for almost all x, have been discussed, for the cases when $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ is divergent and when it is convergent. (See also [4] and [5]). In the present paper we consider mainly the case when $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ is convergent. This case has been considered in [2] from another point of view. The point of view adopted in the present paper is to consider properties of the infinite sequence $\{\varepsilon_n(x)\}$ as a whole; this point of view has led to the formulation and solution of a quite surprising number of questions, which have not been investigated up to now. Most of these questions are interesting only in the case, when $\sum \frac{1}{q_n} < +\infty$; some of them can be raised only under this condition.

Our main tool will be a generalization of the *Borel—Cantelli* lemma, which is proved in § 1. Our results on *Cantor*'s series are contained in §§ 2, 3, 4, and 5.

§ 1. Generalization of the Borel—Cantelli lemma

Let $[X, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ be a probability space in the sense of KOLMOGOROV [6], i. e. X an arbitrary set, whose elements are called "elementary events" and denoted by x, $\mathcal{A}$ a σ-algebra of subsets of X, whose elements are denoted by capital letters (e. g. A, B, etc.), and called events, and $\mathbf{P}(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ a probability measure in X and on $\mathcal{A}$. We shall denote by $A+B$ resp. AB the union resp. the intersection of the sets A and B, and by $\bar{A}$ the complementary set of A. We shall denote random variables (i. e. functions defined on X and measurable with respect to $\mathcal{A}$) by greek letters, and denote by $\mathbf{M}(\xi)$ resp. $\mathbf{D}^2(\xi)$ the mean value resp. variance of the random variable $\xi = \xi(x)$. i. e. we put $\mathbf{M}(\xi) = \int_X \xi(x)\, d\mathbf{P}$ and $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)$. If $A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, we denote as usual by $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$ the set consisting of those elements x of X which belong to infinitely many A_n, and by $\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$ the set of those elements x of X which belong to A_n for all $n \geqq n_0(x)$.

The events A and B are called independent if $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. A finite or infinite sequence $\{A_n\}$ of events such that any two events of the sequence are independent, is called a sequence of pairwise independent events. If moreover we have $\mathbf{P}(A_{n_1} A_{n_2} \ldots A_{n_r}) = \mathbf{P}(A_{n_1})\mathbf{P}(A_{n_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{n_r})$ for any r-tuple of different events $A_{n_1}, \ldots, A_{n_r}$ chosen from the sequence A_n for all $r = 2, 3, \ldots$, we call the sequence $\{A_n\}$ a sequence of completely independent events.

We shall often use the following well-known

LEMMA A. *If $\{A_n\}$ is an arbitrary sequence of events belonging to a probability space $[X, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < +\infty$, then with probability 1 only a finite number of the events A_n occur simultaneously, i. e. $\mathbf{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n) = 0$.*

LEMMA A is nothing else as a special case of *Beppo Levi*'s theorem. As a matter of fact, if α_n is a random variable which is equal to 1 if A_n occurs and to 0 if A_n does not occur, then the assertion, that only a finite number of the A_n occur with probability 1 is equivalent with the statement that $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converges with probability 1 and the condition $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < +\infty$ can be written in the form $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(\alpha_n) < +\infty$.

The condition $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < +\infty$ of Lemma A is under certain restric-

tions not only sufficient but also necessary for $\mathbf{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)=0$. For example the following result is classical:

LEMMA B. *If $\{A_n\}$ is a sequence of completely independent events and $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=+\infty$, then with probability 1 infinitely many among the events A_n occur simultaneously, i. e.* $\mathbf{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)=1$.

Lemma A and B together are known under the name: *the lemma of Borel—Cantelli* ([7], [8]).

In this § we shall prove the following generalization of Lemma B.

LEMMA C. *Let $\{A_n\}$ be a sequence of events such that $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=+\infty$ and*

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{P}(A_k A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2}=1. \tag{1.1}$$

It follows that with probability 1 infinitely many among the events A_n occur simultaneously, i. e. $\mathbf{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)=1$.

PROOF OF LEMMA C. Let us define α_n as above, i. e. $\alpha_n=1$ or $=0$ according to which the event A_n occurs or not. Then we have $\mathbf{M}(\alpha_k)=\mathbf{P}(A_k)$ and $\mathbf{M}(\alpha_k\alpha_l)=\mathbf{P}(A_k A_l)$ and thus putting $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ we have

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{P}(A_k A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2}=\frac{\mathbf{M}(\eta_n^2)}{\mathbf{M}^2(\eta_n)}$$

Thus condition (1. 1) can be written in the equivalent form

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbf{M}(\eta_n^2)}{\mathbf{M}^2(\eta_n)}=1 \tag{1.2}$$

or as $\mathbf{M}(\eta_n^2)=\mathbf{D}^2(\eta_n)+\mathbf{M}^2(\eta_n)$, also in the form

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\mathbf{D}^2(\eta_n)}{\mathbf{M}^2(\eta_n)}=0. \tag{1.3}$$

Now by the inequality of *Chebyshev* according to which for any random

variable η we have

$$\mathbf{P}(|\eta-\mathbf{M}(\eta)|\geqq\lambda\mathbf{D}(\eta))\leqq\frac{1}{\lambda^2}\quad\text{if}\quad\lambda>1, \tag{1.4}$$

we have for any ε with $0<\varepsilon<1$

$$\mathbf{P}(\eta_n\leqq(1-\varepsilon)\mathbf{M}(\eta_n))\leqq\frac{\mathbf{D}^2(\eta_n)}{\varepsilon^2\mathbf{M}^2(\eta_n)}. \tag{1.5}$$

If (1.3) holds, we can find a sequence n_k $(n_1<n_2<\cdots)$ such that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^2(\eta_{n_k})}{\mathbf{M}^2(\eta_{n_k})}<+\infty. \tag{1.6}$$

It follows from (1.5) and (1.6) that

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(\eta_{n_k}\leqq(1-\varepsilon)\,\mathbf{M}(\eta_{n_k}))<+\infty. \tag{1.7}$$

Using Lemma A it follows that with probability 1 $\eta_{n_k}\geqq(1-\varepsilon)\mathbf{M}(\eta_{n_k})$ except for a finite number of values of k. As by supposition $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbf{M}(\eta_{n_k})=+\infty$, it follows that η_{n_k} tends to $+\infty$ with probability 1, which implies that $\mathbf{P}(\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n)=1$, what was to be proved.

REMARK. Clearly the condition (1.1) is satisfied if the events A_n are pairwise independent and $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=+\infty$, because in this case

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{P}(A_kA_l)=\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\,(1-\mathbf{P}(A_k)) \tag{1.8}$$

for all n. Thus condition (1.1) can be regarded as a condition ensuring that the events A_n should be in a certain sense pairwise weakly dependent and Lemma C contains as a particular case the following

COROLLARY 1. If the events A_n are *pairwise* independent, and $\sum\mathbf{P}(A_n)=+\infty$, then with probability 1 infinitely many of the events A_n occur simultaneously.

COROLLARY 2. If $\mathbf{P}(A_kA_l)\leqq\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(A_l)$ for $k\neq l$ (i. e. if the events A_n are pairwise negatively correlated) and $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)=+\infty$ then with probability 1 infinitely many of the events A_n occur simultaneously.

PROOF OF COROLLARY 2. If $\mathbf{P}(A_kA_l)\leqq\mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}A_l)$ for $k\neq l$ we have

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{P}(A_kA_l)\leqq\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\,(1-\mathbf{P}(A_k)) \tag{1.9}$$

thus condition (1.1) is satisfied provided that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(A_n)$ is divergent.

§ 2. On the frequency of the digits in Cantor's series

Let us consider the probability space $[X, \mathcal{A}, \mathbf{P}]$ where X is the interval $[0, 1)$, $\mathcal{A}$ the family of Lebesgue measurable subsets of X and $\mathbf{P}(A)$ the ordinary Lebesgue measure of $A \in \mathcal{A}$. Thus the Lebesgue measure of a measurable subset A of the interval $[0, 1)$ is interpreted as the probability of a random point falling into A. With this interpretation the digits $\varepsilon_n(x)$ as well as any other measurable functions $f(x)$ of x will be considered as random variables. Clearly we have

$$\mathbf{P}(\varepsilon_n(x) = k) = \frac{1}{q_n} \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \ldots, q_n - 1, \tag{2.1}$$

further if $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{n_1}(x) = k_1, \ldots, \varepsilon_{n_r}(x) = k_r) = \frac{1}{q_{n_1} q_{n_2} \ldots q_{n_r}} \tag{2.2}$$

$$\text{if} \quad 0 \leqq k_j \leqq q_{n_j} - 1 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, r.$$

(2.2) expresses the fact, that the random variables $\varepsilon_n(x)$ are completely independent.

Let us suppose from now on that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty \tag{2.3}$$

except when the contrary is explicitly stated.

By (2.2) and (2.3) it follows that for any $k = 0, 1, \ldots$ we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\varepsilon_n(x) = k) < +\infty. \tag{2.4}$$

Moreover it follows from (2.3) that for any positive integer N

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\varepsilon_n(x) < N) = \sum_{q_n \leqq N} 1 + \sum_{N < q_n} \frac{N}{q_n} < +\infty. \tag{2.5}$$

Thus *the sequence* $\varepsilon_n(x)$ *tends to* $+\infty$ *for almost all* x. As a matter of fact, by Lemma A for almost all x and for any N $\varepsilon_n(x) < N$ only for a finite number of values of n, which is equivalent with the assertion that $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = +\infty$ for almost all x.

By Lemma A it follows from (2.4) that for almost all x each number k occurs only a finite number of times in the sequence $\varepsilon_n(x)$; thus if we denote by $\nu_{k,n}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ the number of occurrences of the number k in the sequence $\varepsilon_n(x), \varepsilon_{n+1}(x), \ldots$ then $\nu_{k,n}(x)$ is an almost everywhere finite and measurable function, i. e. a well defined random variable. We shall write for the sake of simplicity $\nu_{k,1}(x) = \nu_k(x)$.

It is quite easy to determine the probability distribution of $\nu_{k,n}(x)$. Putting

$$\mathrm{P}_{k,n}(s) = \mathbf{P}(\nu_{k,n}(x) = s) \tag{2.6}$$

we have evidently by (2.2)

$$\mathrm{P}_{k,n}(s) = \sum_{\substack{n \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_s \\ q_{n_r} > k \ (r=1,2,\ldots,s)}} \frac{1}{q_{n_1} q_{n_2} \cdots q_{n_s}} \prod_{\substack{j \neq n_r,\ 1 \leqq r \leqq s) \\ q_j > k \\ j \geqq n}} \left(1 - \frac{1}{q_j}\right). \tag{2.7}$$

It follows from (2.7) that

$$\mathrm{P}_{k,n}(s) = \prod_{\substack{q_j > k \\ j \geqq n}} \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) \left(\sum_{\substack{n \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_s \\ q_{n_r} > k \ (r=1,2,\ldots,s)}} \frac{1}{(q_{n_1} - 1) \ldots (q_{n_s} - 1)} \right) \tag{2.8}$$

and thus we obtain for the generating function of the random variable $\nu_{k,n}$ the simple formula

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{P}_{k,n}(s)\, z^s = \prod_{\substack{q_j > k \\ j \geqq n}} \left(1 + \frac{z-1}{q_j}\right). \tag{2.9}$$

(The special case $n = 1$ of formula (2.9) is given already in [2].) Clearly

$$\mathbf{M}(\nu_{k,n}(x)) = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbf{P}(\varepsilon_j(x) = k) = \sum_{\substack{q_j > k \\ j \geqq n}} \frac{1}{q_j} < +\infty. \tag{2.10}$$

Thus the mean value of the occurrence of each digit k $(k = 0, 1, \ldots)$ is finite. Now let us put

$$m_n(x) = \sup_{(k)} \nu_{k,n}(x) \tag{2.11}$$

and

$$m(x) = \lim_{n \to +\infty} m_n(x). \tag{2.12}$$

(As $m_n(x) \geqq m_{n+1}(x) \geqq 0$ the limit (2.12) always exists.) $m_n(x)$ and $m(x)$ are generalized random variables in the sense that they may take on the value $+\infty$ on a set of positive measure. Clearly $m(x)$ is a Baire-function of the independent random variables $\varepsilon_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ which does not change its value if a finite number of the $\varepsilon_n(x)$ change their value. Thus, according to the law of 0 or 1 (see [6]) the probability $\mathbf{P}(m(x) = s)$ is for any $s = 1, 2, \ldots$ either 0 or 1. Similarly the probability $\mathbf{P}(m(x) = +\infty)$ is either 0 or 1.

Our first result decides when these two possibilities occur.

THEOREM 1. *Let us suppose that* $q_n \leqq q_{n+1}$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$ *and put*

$$R_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_j} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{s-1} = +\infty$ *but* $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s < +\infty$ *for some positive integer* s, *then we have*

$$\mathbf{P}(m(x) = s) = 1. \tag{2.14}$$

We have

$$\mathbf{P}(m(x) = +\infty) = 1 \tag{2.15}$$

if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s = +\infty$ *for all* $s = 1, 2, \ldots$.

REMARK 1. First of all, the assumption that $q_n \geqq q_{n+1}$ does not restrict the generality, as clearly this condition can be fulfilled always by reordening the q_n according to their size, and this reordening, though affects the expansion (1), does not affect the joint distribution of the random variables $\varepsilon_n(x)$ and thus does not influence such properties of the sequence $\varepsilon_n(x)$ which depend only on the values and not on the arrangement of these variables. Especially such a reordening does not affect the distribution of the variable $m(x)$, because $m(x) = s$ means that there can be found an infinity of s-tuples of different positive integers $n_1, n_2, \ldots, n_s$ such that $\varepsilon_{n_1}(x) = \varepsilon_{n_2}(x) = \cdots = \varepsilon_{n_s}(x)$ but only a finite number of $s+1$-tuples $m_1, m_2, \ldots, m_{s+1}$ such that $\varepsilon_{m_1}(x) = \varepsilon_{m_2}(x) = \cdots = \varepsilon_{m_{s+1}}(x)$.

REMARK 2. Let us put $\mu(x) = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \nu_k(x)$. It is easy to see that $\mathbf{P}(m(x) = \mu(x)) = 1$. As a matter of fact, if $m(x) \geqq s$, there are an infinity of s-tuplet, $n_1, \ldots, n_s$ such that $\varepsilon_{n_1}(x) = \varepsilon_{n_2}(x) = \cdots = \varepsilon_{n_s}(x)$; as we have $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = +\infty$ for almost all x, this means that $\mu(x) \geqq s$. Conversely, if $\mu(x) \geqq s$ then there are an infinity of s-tuples of equal digits, and so $m(x) \geqq s$. Thus the assertions of Theorem 1 hold for $\mu(x)$ instead of $m(x)$ too.

PROOF OF THEOREM 1. Clearly to show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s < +\infty \tag{2.16}$$

implies $m(x) \leqq s$ for almost all x, it suffices to prove that the series

$$\sum_{1 \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_{s+1}} \mathbf{P}(\varepsilon_{n_1}(x) = \varepsilon_{n_2}(x) = \cdots = \varepsilon_{n_{s+1}}(x)) \tag{2.17}$$

converges. As a matter of fact, if the series (2.17) converges, then by

Lemma A for almost all x only a finite number of the events $\varepsilon_{n_1}(x) = \cdots = \varepsilon_{n_{s+1}}(x)$ will occur, which implies $m(x) \leqq s$. But if $n_1 < n_2 < \cdots < n_{s+1}$, then

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{n_1}(x) = \varepsilon_{n_2}(x) = \cdots = \varepsilon_{n_{s+1}}(x)) = \frac{1}{q_{n_2} q_{n_3} \cdots q_{n_{s+1}}} \tag{2.18}$$

and thus the series (2.17) is equal to the series

$$\sum_{1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{s+1}} \frac{n_2 - 1}{q_{n_2} \cdots q_{n_{s+1}}}. \tag{2.19}$$

Now we have clearly

$$\sum_{1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{s+1}} \frac{n_2 - 1}{q_{n_2} \cdots q_{n_{s+1}}} \leqq \frac{1}{s!} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^s. \tag{2.20}$$

Thus if (2.16) holds, then the series (2.17) converges, which proves our assertion, that (2.16) implies $m(x) \leqq s$ for almost all x. Let us suppose now that

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{s-1} = +\infty. \tag{2.21}$$

Let us denote by $A_{n_1 n_2 \ldots n_s}$ the event $\varepsilon_{n_1}(x) = \varepsilon_{n_2}(x) = \cdots = \varepsilon_{n_s}(x)$ $(1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_s)$. Then as above, it follows that

$$\sum_{1 \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_s} \mathbf{P}(A_{n_1 n_2 \ldots n_s}) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{n \leqq n_2 < n_3 < \ldots < n_s} \frac{1}{q_{n_2} \cdots q_{n_s}}. \tag{2.22}$$

Now we use the inequality

$$\sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqq N} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \geqq \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right)^k \left(1 - \binom{k}{2} \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} a_i \right)^2} \right) \tag{2.23}$$

valid for any sequence a_i of positive numbers and for $k = 1, 2, \ldots$. (2.23) is trivial for $k = 1$ and $k = 2$ and follows for arbitrary k easily by induction. It follows that

$$\sum_{n \leqq n_2 < n_3 < \ldots < n_s} \frac{1}{q_{n_2} \cdots q_{n_s}} \geqq \frac{R_n^{s-1}}{(s-1)!} \qquad \text{if} \quad s = 2 \tag{2.24a}$$

and

$$\sum_{n \leqq n_2 < n_3 < \ldots < n_s} \frac{1}{q_{n_2} q_{n_3} \cdots q_{n_s}} \geqq \frac{R_n^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 - \binom{s-1}{2} \frac{\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_j^2}}{R_n^2} \right) \qquad \text{if} \quad s \geqq 3. \tag{2.24b}$$

As evidently

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{s-3} \cdot \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_j^2} \leqq R_1^{s-3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{q_j^2}$$

and the series $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{q_j^2}$ is convergent, because

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{q_j^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_j^2} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_j} \leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} \right)^2$$

it follows from (2. 21), (2. 22) and (2. 24a) resp. (2. 24b) that

$$\sum_{1 \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_s} \mathbf{P}(A_{n_1 n_2 \ldots n_s}) = +\infty. \tag{2. 25}$$

We shall apply now Lemma C For this purpose we have to verify the fulfillment of condition (1. 1).

Let us arrange the s-tuples of positive integers $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$ in lexicographic order. We have evidently, putting

$$B_N^{(s)} = \sum_{n_1 < n_2 < \ldots < n_s \leqq N} \mathbf{P}(A_{n_1 n_2 \ldots n_s}), \tag{2. 26}$$

$$\sum_{\substack{n_1 < n_2 < \ldots < n_s \leqq N \\ m_1 < m_2 < \ldots < m_s \leqq N}} \mathbf{P}(A_{n_1 \ldots n_s} A_{m_1 \ldots m_s}) \leqq (B_N^{(s)})^2 + \sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \binom{2s-k}{s} B_N^{(2s-k)}. \tag{2. 27}$$

Thus we have

$$\frac{\sum_{\substack{n_1 < \ldots < n_s \leqq N \\ m_1 < \ldots < m_s \leqq N}} \mathbf{P}(A_{n_1 \ldots n_s} A_{m_1 \ldots m_s})}{\left(\sum_{n_1 < \ldots < n_s \leqq N} \mathbf{P}(A_{n_1 \ldots} A_{n_s}) \right)^2} \leqq 1 + \frac{\sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \binom{2s-k}{s} \frac{R_1^{2s-k}}{(2s-k)!}}{B_N^{(s)}} \tag{2. 28}$$

which shows, that condition (1. 1) is satisfied, because by supposition $\lim_{N \to +\infty} B_N^{(s)} = +\infty$.

Thus we may apply Lemma C and it follows, that with probability 1 an infinity of the events $A_{n_1 \ldots n_s}$ occur simultaneously. But this means that $\mathbf{P}(m(x) \geqq s) = 1$. Thus if (2. 16) and (2. 21) both hold, we have $\mathbf{P}(m(x) \leqq s) = \mathbf{P}(m(x) \geqq s) = 1$ and thus $\mathbf{P}(m(x) = s) = 1$.

On the other hand if (2. 21) holds, for $s = 2, 3, \ldots$ then $\mathbf{P}(m(x) \geqq s) = 1$ for $s = 2, 3, \ldots$ and thus $\mathbf{P}(m(x) = +\infty) = 1$.

An other question, related with Theorem 1 is the following: how many of the first N digits $\varepsilon_i(x), \ldots, \varepsilon_N(x)$ are different? If we denote this number by $D_N(x)$ and by $C_{N,k}(x)$ the number of equal k-tuples among the first N digits, we have clearly

$$N - C_{N,2}(x) \leqq D_N(x) \leqq N. \tag{2. 29}$$

It follows by what has been proved above that $\frac{D_N(x)}{N}$ tends stochastically to 1.

By a somewhat more refined argument it can be proved that $\frac{D_N(x)}{N}$ tends almost everywhere to 1, i. e. the following theorem is valid:

THEOREM 2. *Suppose* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$. *Let* $D_N(x)$ *denote the number of different numbers in the sequence* $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_N(x)$. *Then for almost every* x *we have*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{D_N(x)}{N} = 1. \tag{2.30}$$

PROOF. With regards to (2.29) to prove Theorem 2 it suffices to show that

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{C_{N,2}(x)}{N} = 0 \tag{2.31}$$

for almost every x. Now we have $\mathbf{M}(C_{N,2}(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{q_n} = Nh_N$ where $\lim_{N\to+\infty} h_N = 0$ further $\mathbf{D}^2(C_{N,2}(x)) \leqq KNh_N$ where K is a constant. It follows by the inequality of *Chebyshev* that if $\varepsilon > 0$ and N is so large that $h_N < \varepsilon/2$, we have

$$\mathbf{P}(C_{N,2}(x) > \varepsilon N) < \frac{2Kh_N}{\varepsilon N}. \tag{2.32}$$

It follows that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(C_{n^2,2}(x) > \varepsilon n^2) < +\infty. \tag{2.33}$$

It follows by Lemma A that

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{C_{n^2,2}(x)}{n^2} = 0 \tag{2.34}$$

for almost every x, and therefore by (2.29)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{D_{n^2}(x)}{n^2} = 1 \tag{2.35}$$

for almost every x. But clearly if $n^2 < N < (n+1)^2$ we have

$$\frac{D_{n^2}(x)}{n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqq \frac{D_N(x)}{N} \leqq 1 \tag{2.36}$$

and thus it follows that (2.30) holds for almost all x. This proves Theorem 2.

REMARK. For the validity of Theorem 2 it is sufficient — as can be seen from the above proof — to suppose instead of the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ only that $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{q_n} = 0$.

§ 3. Some other statistical properties of the digits

It seems plausible that if q_n tends very rapidly to $+\infty$ the sequence $\varepsilon_n(x)$ of digits will be increasing from some point onwards. This is in fact true, as is shown by the following

THEOREM 3. *The necessary and sufficient condition for the sequence $\varepsilon_n(x)$ to be increasing for $n \geqq n_0(x)$ for almost all x is that the condition*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} < +\infty \tag{3.1}$$

should hold.

PROOF. Clearly

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x)) = \sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{q_n - j}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_n+1}{2q_{n+1}}. \tag{3.2}$$

Thus if (3.1) holds, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x)) < +\infty \tag{3.3}$$

and therefore by Lemma A for almost all x, $\varepsilon_{n+1}(x) > \varepsilon_n(x)$ except for a finite number of values of n. This proves the first part of Theorem 3.

As regards the second part, let us suppose

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = +\infty. \tag{3.4}$$

In this case

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \mathbf{P}(\varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x), \varepsilon_{m+1}(x) \leqq \varepsilon_m(x)) \leqq \left(\sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{P}(\varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x)\right)^2 + \\ + 2\sum_{n=1}^{N-2} \mathbf{P}(\varepsilon_{n+2}(x) \leqq \varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x)). \tag{3.5}$$

As

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{n+2}(x) \leqq \varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x)) = \sum_{j=0}^{q_n-1} \sum_{k=j}^{q_n-1} \frac{q_n - k}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} \leqq \frac{q_n}{3q_{n+1}} \tag{3.6}$$

it follows that condition (1.1) of Lemma C is fulfilled. This implies that for almost all x $\varepsilon_{n+1}(x) \leqq \varepsilon_n(x)$ for an infinity of values of n; thus Theorem 3 is proved.

We have seen, that $\varepsilon_n(x)$ tends for almost all x to $+\infty$. One may ask what can be said about the speed with which $\varepsilon_n(x)$ increases. In this direction one can easily prove results of the following type:

THEOREM 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\varepsilon_n(x)} < +\infty$ *for almost all* x *if and only if* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_n}{q_n} < +\infty$.

PROOF OF THEOREM 4. The proof of the sufficiency is immediate by the theorem of *B. Levi*, taking into account that

$$\mathbf{M}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_n(x)}\right) = \frac{1}{q_n} \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{k} \tag{3.7}$$

As the variables $\varepsilon_n(x)$ are completely independent, the necessity follows from the three-series theorem of *Kolmogorov* [6].

§ 4. On the set of all digits

In this § we consider the following question: what can be said about the set $S(x)$ of those positive integers, which occur at least once in the sequence $\{\varepsilon_n(x)\}$. Clearly the probability that a given number k is not contained in $S(x)$ is equal to $\prod_{k<q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$ and is thus positive for all k. Moreover, it is not difficult to find an infinite sequence of integers k_j $(j=1,2,\ldots)$ such that with probability 1 only a finite number of elements of the sequence k_j are contained in the sequence $\varepsilon_n(x)$. As a matter of fact

$$\mathbf{P}(k \in S(x)) = 1 - \prod_{k<q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right) \tag{4.1}$$

and thus

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(k \in S(x)) = 0. \tag{4.2}$$

Therefore an infinite sequence $k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots$ can be found (depending of course on the sequence q_n) such that

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(k_j \in S(x)) < +\infty. \tag{4.3}$$

By Lemma A our assertion follows.

Clearly we have also by the general formula

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A+B) \tag{4.4}$$

and by (4.1) if $k<j$

$$\mathbf{P}(k \in S(x), j \in S(x)) = 1 + \prod_{k<q_n\leq j}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)\prod_{j<q_n}\left(1-\frac{2}{q_n}\right) - \tag{4.5}$$
$$-\prod_{k<q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right) - \prod_{j<q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right).$$

As $\left(1-\frac{2}{q_n}\right) \leqq \left(1-\frac{1}{q_n}\right)^2$

(4. 6) $$\mathbf{P}(k \in S(x), j \in S(x)) \leqq \mathbf{P}(k \in S(x))\mathbf{P}(j \in S(x))$$

if $j \neq k$, and therefore if $\{k_j\}$ is such a sequence that (4. 3) holds then by Corollary 2 of Lemma C with probability 1 $S(x)$ contains an infinity of elements of the sequence $\{k_j\}$. Clearly if k is sufficiently large so as to ensure

(4. 7) $$\sum_{q_n > k} \frac{1}{q_n} < \frac{1}{2}$$

we have

(4. 8) $$\sum_{q_n > k} \frac{1}{q_n} \geqq 1 - \prod_{q_n > k}\left(1-\frac{1}{q_n}\right) \geqq \frac{1}{2} \sum_{q_n > k} \frac{1}{q_n}$$

and thus putting

(4. 9) $$K(x) = \sum_{k_j < x} 1$$

with respect to (4. 1) and (4. 8) the series (4. 3) is convergent or divergent according to whether the series

(4. 10) $$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_j < q_n} \frac{1}{q_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(q_n)}{q_n}$$

is convergent or divergent.

Thus we have proved the following

THEOREM 5. *Let $k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots$ be an arbitrary infinite sequence of positive integers and define $K(x)$ by (4. 9). The set $S(x)$ of all positive integers occurring at least once in the sequence $\{\varepsilon_n(x)\}$ contains for almost all x either a finite or an infinite number of elements of the sequence k_j according to whether the series*

(4. 11) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(q_n)}{q_n}$$

converges or diverges.

EXAMPLE. If $q_n = n^2$, then $S(x)$ contains for almost all x only a finite number of elements of the sequence $k_j = j^3$, but an infinite number of elements of the sequence $k_j = j^2$.

It follows easily from Theorem 5 that if the sequence $\{k_j\}$ has positive lower density, i. e. if

(4. 12) $$\varliminf_{x \to +\infty} \frac{K(x)}{x} = \alpha > 0$$

then $S(x)$ contains with probability 1 an infinite number of elements of the

sequence $\{k_j\}$, because in this case $\frac{K(q_n)}{q_n}$ does not tend to 0, and thus the series (4. 11) is divergent. If q_n does not increase too rapidly, for instance if $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqq C$ where $C > 0$ is a constant, then the same holds also under the weaker assumption that

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{K(x)}{x} = \beta > 0 \tag{4. 13}$$

i. e. that the sequence $\{k_j\}$ has positive upper density, because in this case if $q_{n-1} \leqq x < q_n$ then

$$\frac{K(q_n)}{q_n} \geqq \frac{K(x)}{q_n} \geqq \frac{1}{C} \frac{K(x)}{x}$$

and thus (4. 13) implies $\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{K(q_n)}{q_n} \geqq \frac{\beta}{A} > 0$ and thus the divergence of the series (4. 11). If however $q_n = 2^{2^n}$ and $\{k_j\}$ consists of the numbers $2^{2^n} + 1, \ldots, 2^{2^n+1}$ then the upper density of the sequence $\{k_j\}$ is 1/2 but (4. 11) is convergent.

Now we prove the following

THEOREM 6. *The density of $S(x)$ is with probability* 1 *equal to* 0.

PROOF. Let $\alpha_N(x)$ denote the number of those $\varepsilon_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ which are $\leqq N$. Clearly if we prove that

$$\mathbf{P}\left(\lim_{N \to +\infty} \frac{\alpha_N(x)}{N} = 0\right) = 1 \tag{4. 14}$$

then the assertion of Theorem 6 follows. To prove (4. 14), by Lemma A is sufficient to show that the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\alpha_{2^k}(x)}{2^k} \geqq \varepsilon\right) \tag{4. 15}$$

is convergent for any $\varepsilon > 0$. As a matter of fact the convergence of the series (4. 15) implies that for almost all x

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha_{2^k}(x)}{2^k} = 0 \tag{4. 16}$$

and as for $2^k \leqq N < 2^{k+1}$, we have $\frac{\alpha_N(x)}{N} \leqq 2 \cdot \frac{\alpha_{2^{k+1}}(x)}{2^{k+1}}$ it follows that

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\alpha_N(x)}{N} = 0 \tag{4. 17}$$

for almost all x. As

$$\mathbf{M}(\alpha_N(x)) = \sum_{q_n \leqq N} 1 + \sum_{N < q_n} \frac{N}{q_n} = N d_N \tag{4. 18}$$

where $\lim_{N \to +\infty} d_N = 0$ and

$$\mathbf{D}^2(\alpha_N(x)) = \sum_{q_n > N} \frac{N}{q_n}\left(1 - \frac{N}{q_n}\right) \leqq N d_N \tag{4. 19}$$

it follows by the inequality of *Chebyshev* that if N is so large that $d_N < \varepsilon/2$, then

$$\mathbf{P}(\alpha_N(x) \geqq N\varepsilon) \leqq \frac{4 d_N}{N\varepsilon^2} < \frac{2}{N\varepsilon}. \tag{4. 20}$$

It follows that the series (4. 15) converges, which, as has been pointed out above, proves Theorem 6.

§ 5. On the order of magnitude of $\nu_k(x)$

We denote again by $\nu_k(x)$ the number of occurrences of the number k $(k = 0, 1, \ldots)$ in the sequence $\{\varepsilon_n(x)\}$.

In this § we prove

THEOREM 7. *Let $\{q_n\}$ be an arbitrary sequence of integers $(q_n \geqq 2)$ for which $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$. If C is an arbitrary positive number, then for almost all x*

$$\nu_k(x) \geqq \frac{\log k}{\log\log k} + \frac{\log k \cdot \log\log\log k}{(\log\log k)^2} - C\frac{\log k}{(\log\log k)^2} \tag{5. 1}$$

holds at most for a finite number of values of k.

REMARK. It is remarkable, that the growth of $\nu_k(x)$ depends only so weakly on the order of magnitude of q_n, that such an estimate as furnished by Theorem 7 can be given for all sequences q_n. The result of Theorem 7 is best possible as is shown by

THEOREM 8. *If $g(k)$ is an arbitrary sequence of numbers tending to $+\infty$, one can choose the sequence $\{q_n\}$ so that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$ and*

$$\nu_k(x) \geqq \frac{\log k}{\log\log k} + \frac{\log k \cdot \log\log\log k}{(\log\log k)^2} - g(k)\frac{\log k}{(\log\log k)^2} \tag{5. 2}$$

is satisfied for almost all x for an infinity of values of k.

PROOF OF THEOREM 7. We have by (2.7) for $N \geqq 1$

$$\mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N) = \sum_{s=N}^{\infty} \sum_{\substack{n_1<n_2<\ldots<n_s \\ q_{n_r}>k \ (r=1,2,\ldots,s)}} \frac{1}{q_{n_1}q_{n_2}\cdots q_{n_s}} \prod_{\substack{j\neq n_r \ (1\leqq r\leqq s) \\ q_j>k}} \left(1-\frac{1}{q_j}\right) \tag{5.3}$$

and thus putting

$$r_k = \sum_{q_n>k} \frac{1}{q_n} \tag{5.4}$$

we have

$$\mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N) \geqq \sum_{S=N}^{\infty} \frac{r_k^S}{S!}. \tag{5.5}$$

Let $d>0$ be an arbitrary positive number, and choose k_d so large that for $k \geqq k_d$ we should have $r_k \leqq e^{-d}$; then we obtain for $k \geqq k_d$

$$\mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N) \leqq \frac{2e^{-Nd}}{N!}. \tag{5.6}$$

Thus if

$$N(k) = \frac{\log k}{\log\log k} + \frac{\log k \cdot \log\log\log k}{(\log\log k)^2} - \frac{C\log k}{(\log\log k)^2} \tag{5.7}$$

we have

$$\sum_{k=k_d}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N(k)) \leqq 2\sum_{k=k_d}^{\infty} \frac{e^{-dN(k)}}{N(k)!}. \tag{5.8}$$

As by Stirling's formula

$$\log N(k)! = \log k - \frac{(C+1)\log k}{\log\log k} + O\left(\frac{\log k\,(\log\log\log k)^2}{(\log\log k)^2}\right) \tag{5.9}$$

it follows

$$\mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N(k)) \leqq \frac{e^{(C+1-d)\frac{\log k}{\log\log k}+O\left(\frac{\log k\,(\log\log\log k)^2}{(\log\log k)^2}\right)}}{k}. \tag{5.10}$$

It follows by choosing $d>C+1$ that the series (5.8) converges. Thus we may apply Lemma A, and Theorem 7 is proved.

PROOF OF THEOREM 8. It is easy to see that for $k \neq l$

$$\mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N, \nu_l(x) \geqq M) \leqq \mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N)\mathbf{P}(\nu_l(x) \geqq M). \tag{5.11}$$

It follows by Corollary 2 to Lemma C that if $N_1(k)$ is chosen in such a manner that the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N_1(k)) \tag{5.12}$$

diverges, then $\nu_k(x) \geqq N_1(k)$ for almost all x for an infinity of values of k.

But if

$$N_1(x) = \frac{\log k}{\log\log k} + \frac{\log k\,(\log\log\log k)}{(\log\log k)^2} - g(k)\frac{\log k}{(\log\log k)^2} \tag{5.13}$$

then

$$\mathbf{P}(\nu_k(x) \geqq N_1(k)) \geqq L_1 \cdot \frac{r_k^{N_1(k)}}{N_1(k)!} \geqq L_2 \frac{e^{\frac{g(k)\log k}{\log\log k}}\, r_k^{N_1(k)}}{k} \tag{5.14}$$

where L_1, L_2 are positive constants. Thus the series (5.12) is divergent provided that

$$g(k) > 2\log\frac{1}{r_k}. \tag{5.15}$$

But clearly if $g(k)$ is given such that $g(k) \to +\infty$, the sequence $\{q_n\}$ can be chosen so that r_k should tend to 0 arbitrarily slowly, e. g. that we should have

$$r_k \geqq e^{-\frac{g(k)}{2}} \tag{5.16}$$

which implies (5.15). Thus Theorem 8 is proved.

References

[1] A. Rényi, A new axiomatic theory of probability, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 185—336.

[2] A. Rényi, On the distribution of the digits in Cantor's series, *Matematikai Lapok*, **7** (1956), 77—100. (In Hungarian with summaries in English and Russian.)

[3] P. Erdős—A. Rényi, Some further statistical properties of the digits in Cantor's series, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 21—29.

[4] P. Turán, On the distribution of "digits" in Cantor-systems, *Matematikai Lapok*, **7** (1956), 71—76. (In Hungarian with summaries in English and Russian.)

[5. E. Marczewski, Remarks on the Cantor-expansions of real numbers, *Matematikai Lapok*, **7** (1956), 212—213. (In Hungarian.)

[6] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik, (*Springer*, Berlin, 1933).

[7] É. Borel, Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **26** (1909), 247—271.

[8] F. P. Cantelli, La tendenza ad un limite nel senzo del calcolo della probabilita, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **16** (1916), 191—201.

A GENERALIZATION OF THE ZERO-ONE LAW

By

P. RÉVÉSZ

Mathematical Institute, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received May 13, 1959)

The following theorem is well-known in the theory of probability:

ZERO-ONE LAW. *Let $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$ be a probability field and let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be mutually independent random variables. We denote the smallest Borel field of ω sets with respect to which $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$ are measurable by $\mathcal{S}_n$ and $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ by $\mathcal{S}^*$. Then if $A \in \mathcal{S}^*$, it follows that $\mathbf{P}(A)=0$ or $\mathbf{P}(A)=1$, and if η is a random variable measurable on the sample space $\mathcal{S}^*$, it follows that there is a constant c such that $\mathbf{P}(\eta=c)=1$.*

A simple consequence of this theorem is the following:

If $M_1, M_2, \ldots$ are mutually independent events (measurable ω sets) and A is the set of points in infinitely many M_j's, then $\mathbf{P}(A)=0$ or $\mathbf{P}(A)=1$. More exactly the Borel—Cantelli lemma asserts that *if* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(M_i)<\infty$ *then* $\mathbf{P}(A)=0$ *and if* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(M_i)=\infty$ *then* $\mathbf{P}(A)=1$.

An interesting question is the following: Is the condition of independence necessary or not in these theorems? It is easy to see that the assertion of the Borel—Cantelli lemma remains true if we suppose only that the $M_1, M_2, \ldots$ events are pairwise independent (Cf. [1]), but the assertion of the zero-one law already is not true in this case. This last fact is shown by the following counterexample: Let Ω be the interval $[0, 1]$, $\mathcal{S}$ the Borel measurable subsets of $[0, 1]$, $\mathbf{P}$ the Borel-measure and $r_n(x)$ the n-th Rademacher function. We define the pairwise independent events A_n $(n=2, 3, \ldots)$ by

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \{x : r_n(x)>0\}, \\ A_{2n+1} &= \{x : r_n(x) r_1(x)>0\}. \end{aligned} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

It is easy to see that if A is the set of points in infinitely many $A_{2j}A_{2j+1}$'s, then $\mathbf{P}(A)=1/2$.

In this paper we prove the following generalization of the zero-one law.

THEOREM. *Let* $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$ *be a probability field and let* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *be an ergodic Markov-chain.*[1] *We denote the smallest Borel field of* ω *sets with respect to which* $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$ *are measurable by* $\mathcal{S}_n$ *and* $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ *by* $\mathcal{S}^*$. *Then if* $A \in \mathcal{S}^*$, *it follows that* $\mathbf{P}(A) = 0$ *or* $\mathbf{P}(A) = 1$ *and if* η *is a random variable measurable on the sample space* $\mathcal{S}^*$, *it follows that there is a constant* c *such that* $\mathbf{P}(\eta = c) = 1$.

PROOF. The second assertion of the theorem follows readily from the first. We therefore discuss only the first assertion. We assumed that $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is a Markov-chain, this implies

$$\mathbf{P}(A \mid \xi_k, \xi_{k-1}, \ldots, \xi_1) = \mathbf{P}(A \mid \xi_k) \tag{2}$$

if $A \in \mathcal{S}^*$ (Cf. [3] p. 81). We know that

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{P}(A \mid \xi_1, \ldots, \xi_k) = \eta \tag{3}$$

with probability 1, where

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A, \\ 0 & \text{if } \omega \in \bar{A} \end{cases}$$

if $A \in \mathcal{S}^*$ (Cf. [3] p. 332, Corollary 1). (2) and (3) imply

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{P}(A \mid \xi_k) = \eta \tag{4}$$

almost everywhere. We will prove that

$$\mathbf{P}(A \mid \xi_k) = \mathbf{M}(\eta) = \mathbf{P}(A), \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ A \in \mathcal{S}^*) \tag{5}$$

with probability 1. Obviously the assertion of our Theorem follows from (4) and (5).

Let us define the event A by

$$A = \{\omega : \xi_{n+1}(\omega) \in D_1, \ldots, \xi_{n+m}(\omega) \in D_m\}, \tag{6}$$

where D_i is a Borel-set of the real line. Then we have

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\xi_{n+m} \in D_m, \ldots, \xi_{n+1} \in D_1 \mid \xi_k = x) = \\ &= \int_{y \in D_1} \mathbf{P}(\xi_{n+m} \in D_m, \ldots, \xi_{n+2} \in D_2 \mid \xi_{n+1} = y)\, d_y \mathbf{P}(\xi_{n+1} < y \mid \xi_k = x)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

[1] We say that the Markov-chain $\xi_1, \xi_2, \ldots$ is ergodic, if to every positive ε and every integer k there is an $n_0 = n_0(\varepsilon, k)$ such that

$$|\mathbf{P}(\xi_n \in A \mid \xi_k = x) - \mathbf{P}(\xi_n \in A)| < \varepsilon \tag{1}$$

if $n \geqq n_0$ and A is an arbitrary Borel-set of the real line. In [2] is given a simple condition which implies (1).

[2] This follows from the well-known relation

$$\mathbf{P}(A, \xi \in C \mid \eta = x) = \int_{y \in C} \mathbf{P}(A \mid \xi = y, \eta = x)\, d_y \mathbf{P}(\xi < y \mid \eta = x).$$

and

$$\mathbf{P}(\xi_{n+m} \in D_m, \ldots, \xi_{n+1} \in D_1) = \tag{8}$$
$$= \int_{y \in D_1} \mathbf{P}(\xi_{n+m} \in D_m, \ldots, \xi_{n+2} \in D_2 | \xi_{n+1} = y) d_y \, \mathbf{P}(\xi_{n+1} < y).$$

By subtracting (7) from (8) we get

$$|\mathbf{P}(A | \xi_k = x) - \mathbf{P}(A)| \leqq \varepsilon \tag{9}$$

if $n \geqq n_0(\varepsilon, k)$. ($n_0$ is defined in the footnote[1].)

Let us consider the elements of $\mathfrak{S}_n^*$ for which (9) holds. It is easy to see that these events form a monotone class, therefore (9) holds for every element of $\mathfrak{S}_n^*$. (Cf. [4] p. 27, Theorem B). Hence we have (5) and our assertion.

References

[1] P. Erdős and A. Rényi, On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_k}$, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **2** (1959), 93—109.

[2] A. Kolmogorov, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Annalen*, **104** (1931), 415—458.

[3] J. L. Doob, *Stochastic processes*, (New York, 1953).

[4] P. R. Halmos, *Measure theory*, (New York, 1950).

ÜBER DIE REKTIFIKATION VON KURVENBOGEN IM POINCARÉSCHEN KREISMODELL DER HYPERBOLISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

Von

PAUL SZÁSZ

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest.

(Eingegangen am 17. April 1959.)

H. POINCARÉ[1] hat (zwar in etwas anderer Form) als eine Verwirclichung der hyperbolischen ebenen Geometrie im Rahmen der euklidischen Geometrie folgendes Modell, wir möchten sagen *Pseudogeometrie* oder *Bildgeometrie* angegeben, die *Poincarésches Kreismodell* jener Geometrie genannt wird und übrigens eine eineindeutige Abbildung der sogenannten *Poincaréschen Halbebene*[2] ist.

Es sei in der euklidischen Ebene ein Kreis k mit dem Mittelpunkt O und vom Radius 1 als *Fundamentalkreis* vorgelegt. Die inneren Punkte von k sollen *Pseudopunkte*, die im Innern von k liegenden Teile der k rechtwinklig schneidenden Kreise bzw. Geraden (die wir zusammen *Orthogonalkreisbogen* nennen wollen) *Pseudogeraden* heißen. Das zwischen den Pseudopunkten P_1 und P_2 liegende Stück des durch sie gelegten Orthogonalkreisbogens soll als die *Pseudostrecke* $\overline{P_1P_2}$ erklärt werden. Als *Charakteristik* dieser Pseudostrecke $\overline{P_1P_2}$ erklären wir das Doppelverhältnis

$$(\Xi H P_2 P_1) \quad \frac{\Xi P_2}{P_2 H} : \frac{\Xi P_1}{P_1 H}$$

wobei Ξ, H die Endpunkte des durch P_1 und P_2 gelegten Orthogonalkreisbogens sind (die nicht mehr zum Modell gehören), so bezeichnet, daß P_2 auf diesem Bogen zwischen P_1 und H liegt (Fig. 1). Zwei Pseudostrecken sollen einander *pseudokongruent* oder *pseudogleich* heißen, falls sie dieselbe Charakteristik haben. Dem gegenüber soll der *Pseudowinkel* zweier Pseudogeraden g_1, g_2 einfach durch den Winkel der sie erzeugenden Orthogonalkreisbogen charakterisiert sein (Fig. 2) und zwei

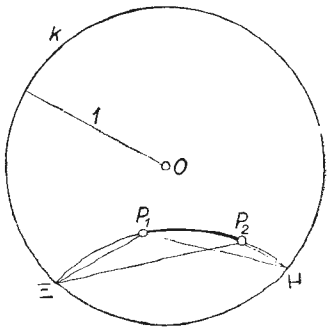


Fig. 1

[1] H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Mathematica*, 1 (1882), 1—62, besonders § 2, 6—8, und § 12, 58—61.

[2] H. POINCARÉ, a. a. O. § 2, 6—8.

Pseudowinkel von gleicher Charakteristik sollen als einander *pseudokongruent (pseudogleich)* angesehen werden. Man überzeugt sich leicht, daß in der durch diese Festsetzungen erklärten Pseudogeometrie alle Postulate der hyperbolischen ebenen Geometrie erfüllt sind.

Die obigen Festsetzungen haben, auf Grund der üblichen Forderungen des Messens, nach geeigneter Wahl der *Pseudolängeneinheit* zur Folge, daß der *Pseudoabstand* zweier Pseudopunkte P_1 und P_2

$$\overline{P_1P_2} = \log(\Xi\, HP_2P_1) \tag{1}$$

ausfällt (Fig. 1). Für die *Pseudobogenlänge* eines Kurvenstückes hat H. POINCARÉ[3] in einer zweiten Abhandlung die unten stehende Formel (2) angegeben. Das Ziel der nachfolgenden Zeilen ist für diese Formel unter geeigneten Voraussetzungen einen einfachen und *unmittelbaren* exakten Beweis zu geben, ohne von der Trigonometrie oder analytischen Geometrie der hyperbolischen Ebene Gebrauch zu machen. Der zu beweisende Satz hat folgenden Wortlaut.

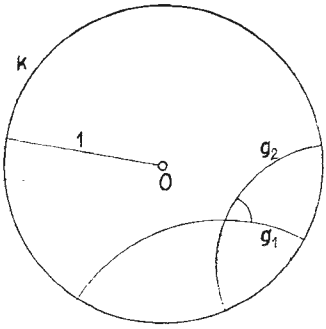


Fig. 2

SATZ 5. *Es sei im Innern des Fundamentalkreises k ein im gewöhnlichen Sinne rektifizierbarer stetiger und gerichteter Kurvenbogen l gegeben, auf dem das Verhältnis von Bogen und Sehne gleichmäßig gegen 1 strebt wenn der Bogen nach O konvergiert. Dann ist l auch in der Poincaréschen Bildgeometrie rektifizierbar und hat die Pseudobogenlänge*

$$\sigma = \int_{(l)} \frac{2}{1-OP^2}\, ds \tag{2}$$

wobei der Punkt P das Kurvenstück l durchläuft und ds das euklidische Bogenelement von l bedeutet.

Die bekannten Formeln für die Bogenlänge (meistens angegeben für das *Bogenelement*) eines Kurvenstückes in der hyperbolischen Ebene[4] sind auf Grund der eineindeutigen Abbildung auf das Poincarésche Kreismodell, folgen dieser Formel (2) von H. POINCARÉ. Am leichtesten erhält man die ver-

[3] H. POINCARÉ, Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, *Acta Mathematica*, 1, (1882), 193—294, besonders 201—202.

[4] Siehe z. B. H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie*, 2. Aufl., (Berlin und Leipzig, 1912), S. 110 u. 124.

langte Formel in Polarkoordinaten, woraus sie in Weierstraßschen Koordinaten folgt.[5] Die letztere Formel zieht sodann die entsprechende in rechtwinklingen bzw. in Grenzkreiskoordinaten nach sich.

*

Zum angekündigten Satz 5 gelangen wir durch die folgende Reihe von einfachen Sätzen.

SATZ 1. *Wird auf einen gegebenen Orthogonalkreisbogen* $\widehat{\Xi H}$ *ein Punkt* P *fixiert während* P_1 *ein veränderlicher Punkt von* $\widehat{\Xi H}$ *ist, so strebt das Verhältnis von Pseudoabstand* $\overline{PP_1}$ *und Bogenstück* $\widehat{PP_1}$

$$\frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}} \to \frac{2}{1-OP^2} \qquad \textit{für} \qquad P_1 \to P. \tag{3}$$

BEWEIS. Es sei (Fig. 3) S der Schnittpunkt der Tangenten die in den Punkten Ξ bzw. H an den Fundamentalkreis k gelegt werden (falls der Bogen $\widehat{\Xi H}$ nicht in ein Durchmesser von k ausartet) und setzen wir

$$\Xi S = HS = \varrho,$$
$$\sphericalangle OS\Xi = -\alpha,$$
$$\sphericalangle OSH = \alpha > 0$$

ferner mit dem entsprechenden Vorzeichen

$$\sphericalangle OSP_1 = \vartheta,$$
$$\sphericalangle OSP = \vartheta_0.$$

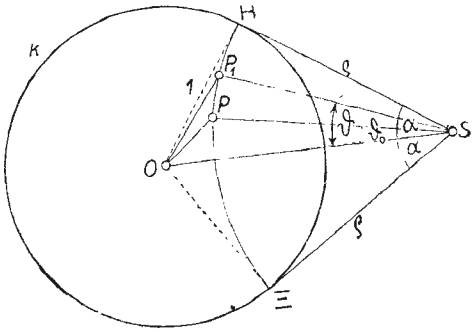


Fig. 3

So ist nach (1) der Pseudoabstand $\overline{PP_1}$ mit Vorzeichen (positiv oder negativ genommen je nachdem auf $\widehat{\Xi H}$ der Punkt P_1 zwischen P und H oder zwischen P und Ξ liegt)

$$\overline{PP_1} = \log(\Xi H P_1 P) = \log\left(\frac{\sin\frac{\alpha+\vartheta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\vartheta}{2}}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\alpha+\vartheta_0}{2}}\right).$$

[5] Für eine direkte Herleitung der letzten Formel in der hyperbolischen Ebene selbst kann F. HAUSDORFF, Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse,* **51** (1899), 161—214. insbesondere S. 166, als Grundlage dienen.

Daraus ergibt sich durch Differentiation nach ϑ

$$\frac{d}{d\vartheta}\overline{PP_1}=\frac{\sin\frac{\alpha-\vartheta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\vartheta}{2}}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\vartheta}{2}\cos\frac{\alpha+\vartheta}{2}+\cos\frac{\alpha-\vartheta}{2}\sin\frac{\alpha+\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha-\vartheta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\vartheta-\cos\alpha}.$$

Also strebt (wenn auch der Bogen $\widehat{PP_1}$ mit dem entsprechenden Vorzeichen genommen wird) für $P_1\to P$

$$(4)\qquad \frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}}=\frac{\log\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha+\vartheta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\vartheta}{2}}\;\dfrac{\sin\frac{\alpha-\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\alpha+\vartheta_0}{2}}\right)}{\varrho(\vartheta-\vartheta_0)}\to\frac{\sin\alpha}{\varrho(\cos\vartheta_0-\cos\alpha)}.$$

Nach dem Cosinussatz ist aber für das Dreieck OSP

$$OP^2=\varrho^2+OS^2-2\varrho\,OS\cos\vartheta_0=1+2\varrho^2-2\varrho\,OS\cos\vartheta_0$$

da doch im bei H rechtwinkligen Dreieck OSH für die Hypotenuse $OS^2=1+\varrho^2$ ausfällt, und wir haben

$$1-OP^2=2\varrho\,OS\cos\vartheta_0-2\varrho^2=2\varrho^2\left(\frac{OS}{\varrho}\cos\vartheta_0-1\right)$$

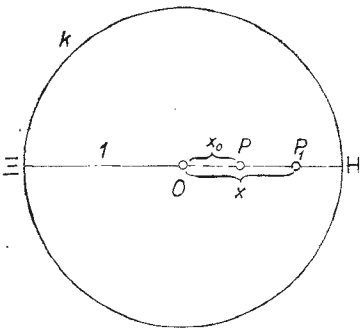


Fig. 4

oder wegen $\varrho=OS\cos\alpha$

$$1-OP^2=2\varrho^2\frac{\cos\vartheta_0-\cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Somit geht infolge $\varrho\,\mathrm{tg}\,\alpha=1$ die Limesrelation (4) in (3) über.

Falls der Bogen $\widehat{\Xi H}$ in ein Durchmesser von k ausartet (Fig. 4), so ist nach (1), wenn auch auf das Vorzeichen Rücksicht genommen

$$OP_1=x,\qquad OP=x_0$$

gesetzt wird, der Pseudoabstand $\overline{PP_1}$ mit Vorzeichen

$$\overline{PP_1}=\log(\Xi H P_1 P)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-x_0}{1+x_0}\right)$$

und daraus folgt durch Differenzieren

$$\frac{d}{dx}\overline{PP_1}=\frac{1-x}{1+x}\,\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2}\,.$$

Also strebt für $P_1 \to P$ d. h. $x \to x_0$

$$\frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}}=\frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\,\frac{1-x_0}{1+x_0}\right)}{x-x_0}\to\frac{2}{1-x_0^2}=\frac{2}{1-OP^2}$$

wodurch (3) auch für diesen Fall bewiesen ist. Damit ist der Beweis von Satz 1 fertig.

Wird nun auf einem Orhogonalkreisbogen $\widehat{\Xi H}$ ein Punkt P_0 gewäht, so ist im Sinne von Satz 1 für einen veränderlichen Punkt P dieses Bogens der Pseudoabstand $\sigma=\overline{P_0P}$ als Funktion von $s=\widehat{P_0P}$ (σ und s beide mit Vorzeichen genommen) differenzierbar, und zwar hat die Ableitung

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{2}{1-OP^2}\,.$$

Daher besteht nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgender

SATZ 2. *Wird durch die inneren Punkte P und P_1 des Fundamentalkreises k ein Orthogonalkreisbogen $\widehat{\Xi H}$ gelegt, so gilt*

$$\frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}}=\frac{2}{1-OX^2}$$

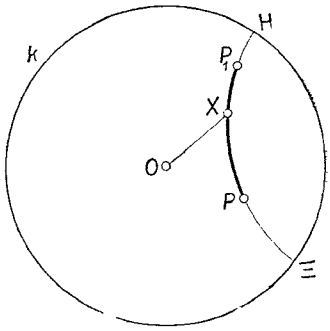


Fig. 5

wobei X ein Zwischenpunkt des Bogenstückes $\widehat{PP_1}$ von $\widehat{\Xi H}$ ist (Fig. 5).

Dieser Satz 2 hat folgendes

KOROLLAR. *Ist P ein innerer Punkt des Fundamentalkreises k, so besteht für einen diesem P nach Belieben zustrebenden Punkt P_1 die Limesrelation*

$$\frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}}\to\frac{2}{1-OP^2}\,. \tag{5}$$

Da weiter

$$\frac{\overline{PP_1}}{PP_1}=\frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}}\,\frac{\widehat{PP_1}}{PP_1}\,. \tag{6}$$

und hierbei für einen dem Punkte P nach Belieben zustrebenden P_1

$$\frac{\widehat{PP_1}}{PP_1}\to 1$$

da doch der Radius des durch P und P_1 gelegten Orthogonalkreisbogens offenbar oberhalb einer positiven Schranke bleibt, so folgt aus (5) der

SATZ 3. *Ist P ein innerer Punkt des Fundamentalkreises k, so besteht für einen diesem P nach Belieben zustrebenden Punkt P_1 die Limesbeziehung*

$$\frac{\overline{PP_1}}{PP_1} \to \frac{2}{1-OP^2}. \tag{7}$$

Dieser Grenzwert unter (7) könnte als die *lineare „Vergrösserung"* des Poincaréschen Kreismodells im Pseudopunkte P erklärt werden.

Noch mehr als Satz 3 behauptet der folgende

SATZ 4. *Wenn wir die inneren Punkte P und P_1 des Fundamentalkreises k auf einen Kreis k' mit dem Mittelpunkt O und vom Radius $r < 1$ beschränken, so besteht gleichmäßig*

$$\frac{\overline{PP_1}}{PP_1} \to \frac{2}{1-OP^2} \qquad \textit{für} \qquad P_1 \to P. \tag{8}$$

BEWEIS. Infolge von Satz 2 besteht im kleineren Kreis k' gleichmäßig

$$\frac{\overline{PP_1}}{\widehat{PP_1}} \to \frac{2}{1-OP^2} \qquad \text{für} \qquad P_1 \to P \tag{9}$$

da doch $\frac{2}{1-OX^2}$ als Funktion des Punktes X in k' gleichmäßig stetig ist. Da weiter der Radius des durch P und P_1 gelegten Orthogonalkreisbogens für Punkte P, P_1 von k' offenbar oberhalb einer positiven Schranke beibt, es besteht

$$\frac{\widehat{PP_1}}{PP_1} \to 1 \qquad \text{für} \qquad P_1 \to P \tag{10}$$

ebenfalls gleichmäßig. Aus (6) folgt aber wegen des gleichmäßigen Bestehens von (9) und (10) dasselbe für (8), weil $\frac{2}{1-OP^2}$ in diesem kleineren Kreis k' von oben beschränkt ist. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Nun sind wir imstande, über die Rektifikation von Kurvenbogen im Poincaréschen Kreismodell der hyperbolischen Geometrie der Ebene den oben formulierten Satz 5 zu beweisen.

BEWEIS DES SATZES 5. Wir teilen das Kurvenstück l vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt B in n Teile durch die Punkte

$$A = P_0, \quad P_1, \ldots, P_{i-1}, \quad P_i, \ldots, P_{n-1}, \quad P_n = B$$

und bezeichnen die Bogenlänge von A bis P_i mit s_i, so daß das Kurvenstück

zwischen P_{i-1} und P_i die Länge $s_i - s_{i-1}$ hat (Fig. 6.) Die positive Zahl $r < 1$ kann so nahe an 1 gewählt werden, daß der Kreis k' mit dem Mittelpunkt O und vom Radius r das Kurvenstück l enthält. Da nun

$$\frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{s_i - s_{i-1}} = \frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{P_{i-1}P_i} \frac{P_{i-1}P_i}{s_i - s_{i-1}}$$

und hierbei nach Satz 4 gleichmäßig im Index i

$$\frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{P_{i-1}P_i} - \frac{2}{1 - OP_i^2} \to 0 \quad \text{für} \quad \max(s_i - s_{i-1}) \to 0,$$

weiter nach Voraussätzung ebenfalls gleichmäßig

$$\frac{P_{i-1}P_i}{s_i - s_{i-1}} \to 1 \quad \text{für} \quad \max(s_i - s_{i-1}) \to 0,$$

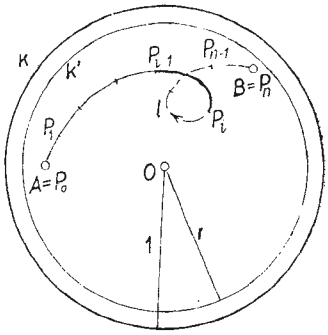


Fig. 6

es besteht gleichmäßig im Index i

$$\frac{\overline{P_{i-1}P_i}}{s_i - s_{i-1}} - \frac{2}{1 - OP_i^2} \to 0 \quad \text{für} \quad \max(s_i - s_{i-1}) \to 0,$$

da doch $\dfrac{2}{1 - OP_i^2}$ von oben beschränkt, nämlich

$$\frac{2}{1 - OP_i^2} \leqq \frac{2}{1 - r^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ausfällt. Also ist der Pseudoabstand

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \left(\frac{2}{1 - OP_i^2} + \varepsilon_i\right)(s_i - s_{i-1})$$

wobei

(11) $$\max|\varepsilon_i| \to 0 \quad \text{für} \quad \max(s_i - s_{i-1}) \to 0.$$

Wir haben somit

(12) $$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{1 - OP_i^2}(s_i - s_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (s_i - s_{i-1})$$

und zwar strebt hierbei auf Grund von (11)

(13) $$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (s_i - s_{i-1}) \to 0 \quad \text{für} \quad \max(s_i - s_{i-1}) \to 0,$$

da nämlich die Gesamtlänge von l mit L bezeichnend

$$\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) = L$$

ausfällt, also der Betrag dieser Summe unter (13)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (s_i - s_{i-1})\right| \leqq L \max |\varepsilon_i|$$

ist. Wird aber die Bogenlänge des Kurvenstückes von A bis zu einem beliebigen Punkt P mit s bezeichnet, so ist $\frac{2}{1-OP^2}$ offenbar eine stetige Funktion von s im Intervalle $0 \leqq s \leqq L$, also strebt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{1-OP_i^2}(s_i - s_{i-1}) \to \int_0^L \frac{2}{1-OP^2}\,ds = \int_{(l)} \frac{2}{1-OP^2}\,ds$$

für $\max (s_i - s_{i-1}) \to 0$. Aus (12) und (13) folgt daher, daß die Pseudolänge des dem Kurvenbogen l einbeschriebenen Pseudopolygons $AP_1 \ldots P_{i-1}P_i \ldots P_{n-1}B$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} \to \int_{(l)} \frac{2}{1-OP^2}\,ds$$

strebt, falls $\max (s_i - s_{i-1}) \to 0$. W. z. b. w.

BEMERKUNGEN ÜBER DEN WERTVORRAT DURCH POTENZREIHEN DEFINIERTER, INSBESONDERE MEROMORPHER FUNKTIONEN

Von

M. MIKOLÁS

Mathematisches Institut, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 30. April, 1959.)

1. Über die Verteilung der Werte einer analytischen Funktion hat man bekanntlich eine Reihe klassischer Sätze in der komplexen Funktionentheorie, verknüpft mit den Namen von WEIERSTRASS, HADAMARD, JENSEN usw. — Jedoch scheint es nicht überflüssig, in dieser Arbeit einige Beiträge (nebst Anwendungen) zum folgenden grundlegenden Problem zu behandeln: gegeben seien ein Punkt a, eine komplexe Zahl w und eine nicht konstante Funktion $f(z)$, welche in a regulär und $\neq w$ ist; wie kann man *ausschließlich* mit Hilfe der zu a gehörigen Taylorschen Koeffizienten von $f(z)$ die Distanz der nächstliegenden w-Stelle der durch $f(z)$ erzeugten vollständigen analytischen Funktion[1] genau bestimmen bzw. von unten möglichst gut abschätzen? Etwas anders formuliert: untersucht wird die obere Grenze $D = D(a, w)$ derjenigen Kreisradien ϱ_0, für welche die genannte, von a aus durch analytische Fortsetzung entspringende Funktion den Wert w *nicht* annimt.

Es ist allerdings leicht, für D mittels der Potenzreihenentwicklung von $1/f(z)$ eine Formel anzugeben, wo eine (aus den Taylorschen Koeffizienten von $f(z)$ gebildete) rekurrente Determinante vorkommt. Wir wollen aber zeigen, daß das Resultat sich auch in einer wohl übersichtlichen, determinantenfreien Form aufschreiben läßt, welche eine (im wesentlichen bestmögliche) untere Schranke für $D = D(a, w)$ liefert (Sätze 1, 2). Durch Spezialisierung auf Polynome erhält man unmittelbar eine explizite Formel bzw. Abschätzungen für *die Wurzel kleinsten absoluten Betrages* einer algebraischen Gleichung (Satz 3). — Als eine weitere *Anwendung* findet man eine Darstellung bzw. Abschätzung für die *obere Grenze der Wurzelabszissen* einer Funktion $f(z)$, welche in einer Halbebene holomorph und $\neq 0$ ist (Satz 4). Daher entnimmt man z. B. einen solchen Ausdruck für die obere Grenze Θ der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$, welcher nur die Werte dieser Funktion und ihre Ableitungen für $\Re(s) > 1$ enthält (vgl. (6. 4)).

[1] Im folgenden werden wir, wie üblich, ein Funktionselement und seine analytische Fortsetzung in der Bezeichnung nicht unterscheiden.

2. In den folgenden schreiben wir zur Abkürzung $\Re(z)=x$, $\Re(z_0)=x_0$, ferner $c_m=c_m(a)=f^{(m)}(a)/m!$ $(m=0,1,\ldots)$; $f(z)$ wird durchwegs als nicht konstant vorausgesetzt und $D=D(a,w)$ hat die oben besprochene Bedeutung.

SATZ 1. *Es sei $f(z)$ in $z=a$ analytisch und $c_0\neq w$ (*). Dann ist $f(z)$ meromorph und $\neq w$ für $|z-a|<R(a,w)$, wobei*

$$(2.1)\qquad \begin{cases} R(a,w)=\varliminf\limits_{\nu\to\infty}\left|\sum\limits_{\lambda=1}^{\nu}(-1)^{\lambda}(c_0-w)^{-1}S_{\lambda,\nu}(a)\right|^{-\frac{1}{\nu}}, \\ S_{\lambda,\nu}(a)=\sum\limits_{\substack{n_1+\cdots+n_\lambda=\nu\\ n_j>0}} c_{n_1}\cdots c_{n_\lambda}.^{2} \end{cases}$$

Ist $f(z)$ noch in einer größeren Kreisscheibe $|z-a|<\varrho$ $(R(a,w)<\varrho<\infty)$ meromorph (**), so liegt mindestens eine w-Stelle von $f(z)$ auf $|z-a|=R(a,w)$.

Mithin gilt nebst (*)

$$(2.2)\qquad D(a,w)\geqq R(a,w)$$

und sogar

$$(2.3)\qquad D(a,w)=R(a,w),$$

falls auch (**) erfüllt ist.

BEWEIS. Es genügt offenbar, $a=w=0$ zu setzen. Man hat also, der Voraussetzung nach,

$$(2.4)\qquad f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots \qquad (|z|<\delta)$$

mit $c_0\neq 0$; die Entwicklung

$$(2.5)\qquad f(z)^{-1}=\gamma_0+\gamma_1z+\cdots+\gamma_nz^n+\cdots$$

besitzt gleichfalls einen positiven Konvergenzradius R, und zwar — laut der *Cauchy—Hadamardschen Formel* —

$$(2.6)\qquad \begin{cases} R=\varliminf\limits_{\nu\to\infty}|\gamma_\nu|^{-\frac{1}{\nu}}, \\ \gamma_\nu=\dfrac{1}{\nu!}\left[\dfrac{1}{f(z)}\right]^{(\nu)}_{z=0} \quad (\nu=0,1,\ldots). \end{cases}$$

Wie man weiß, $f(z)^{-1}$ ist *regulär* für $|z|<R$, während die Peripherie $|z|=R$ wenigstens eine singuläre Stelle dieser Funktion enthalten muß. Daher folgert man $f(z)\neq 0$ für $|z|<R$ und ebenda die Holomorphie von $f(z)$

[2] Die Summierung ist also auf alle (geordneten) Systeme $(n_1,\ldots,n_\lambda)$ *natürlicher* Zahlen zu erstrecken, welche die Bedingung $n_1+\cdots+n_\lambda=\nu$ befriedigen. — Die Summe im Ausdruck von R ist hiemit ersichtlich ein Polynom ν-ten Grades bezüglich $(c_0-w)^{-1}$.

höchstens bis auf endlich viele Pole (d. h. ihren meromorphen Charakter); es ergibt sich ferner, daß unsere Funktion auf $|z| = R$ verschwinden, oder mindestens eine nicht außerwesentliche Singularität haben braucht. Wird $f(z)$ auch innerhalb einem größeren Kreis $|z| = \varrho < \infty$ $(\varrho > R)$ als meromorph angenommen (H), so ist damit nur die erst erwähnte Möglichkeit verträglich, d. h. die Existenz einer oder mehrerer Nullstellen von $f(z)$ auf $|z| = R$ ist gesichert. — Alles dies impliziert $D \geqq R$ und insbesondere $D = R$ nebst (H).

Es leuchtet ein, daß wir noch nicht mehr als die Gleichheit

$$\lim_{\nu \to \infty} |\gamma_\nu|^{-\frac{1}{\nu}} = R(0, 0) \tag{2.7}$$

zu verifizieren haben, was vielleicht am unmittelbarsten folgendermaßen ausgeführt werden kann.

Wir betrachten das Polynom $\varphi_\nu(z) \sum_{n=0}^{\nu} c_n z^n$ und schreiben mit $t = \varphi_\nu(z) - c_0$

$$\frac{1}{c_0 + t} - \frac{1}{c_0} = c_0^{-1}\left[\frac{1}{1 + (t/c_0)} - 1\right] = -c_0^{-2} t + c_0^{-3} t^2 - c_0^{-4} t^3 + - \cdots. \quad (|t| < |c_0|).$$

Somit folgt in einer Umgebung von $z = 0$:

$$\varphi_\nu(z)^{-1} - \varphi_\nu(0)^{-1} = (c_0 + t)^{-1} - c_0^{-1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda c_0^{-(\lambda+1)} \left(\sum_{n=1}^{\nu} c_n z^n\right)^\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda c_0^{-(\lambda+1} \sum_{n_1, \ldots, n_\lambda = 1}^{\nu} c_{n_1} \cdots c_{n_\lambda} z^{n_1 + \cdots + n_\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^\lambda c_0^{-(\lambda-1)} \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_\lambda = k \\ 1 \leqq n_j \leqq \nu}} c_{n_1} \cdots c_{n_\lambda};$$

andrerteils hat man eine Entwicklung

$$\varphi_\nu(z)^{-1} - \varphi_\nu(0)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,\nu} z^k$$

für z genügend kleinen absoluten Betrages, wobei $\gamma_{k,\nu} = \gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Durch Vergleich der Koeffizienten erhalten wir u. a.

$$\gamma_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1) c_0^{-(\lambda+1)} \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_\lambda = \nu \\ n_j > 0}} c_{n_1} \cdots c_{n_\lambda} \tag{2.8}$$

und daher sofort (2.7), w. z. b. w.[3]

[3] Für (2.8) und Verallgemeinerungen vgl. auch [3], 57, (4.3) ff.

3. Aus (2. 2) bzw. (2. 3) kann man ohne Mühe eine handliche untere Abschätzung für $D = D(a, w)$ entnehmen, welche sich in gewissem Sinn (für die Gesamtheit der Funktionen in Betracht) nicht verschärfen läßt.

SATZ 2. *Nehmen wir an, daß $f(z)$ für $z = a$ regulär ist, ferner $c_0 \neq w$ und $|c_m| \leqq KB^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, wo K und B positive Konstanten bezeichnen.*

1) *Dann besteht die Ungleichung*

$$D(a, w) \geqq \frac{|c_0 - w|}{B(K + |c_0 - w|)}; \tag{3. 1}$$

man kann speziell $K = M(r) = \max\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$, $B = 1/r$ setzen, falls $r > 0$ so gewählt wird, daß $f(z)$ für $|z - a| \leqq r$ holomorph ist.[4]

2) *Es gibt solche Funktionen, für welche* (3. 1) *nebst passender Wahl von K und B mit Gleichheitszeichen gilt.*

BEWEIS. Vor allem bestätigt man unschwer direkt oder durch Induktion (inbezug auf λ) die Anzahl der *positiven* Lösungen der diophantischen Gleichung $n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda = \nu$ mit beliebigen festen positiv-ganzen λ und ν; es ergibt sich

$$T_{\lambda, \nu} = \sum_{\substack{n_1 + \cdots + n_\lambda = \nu \\ n_j > 0}} 1 = \binom{\nu - 1}{\lambda - 1}. \tag{3. 2}$$

1) Mithin können wir schreiben (vgl. (2. 1)):

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda (c_0 - w)^{-\lambda} S_{\lambda, \nu}(a) \right| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\nu} |c_0 - w|^{-\lambda} K^\lambda B^\nu T_{\lambda, \nu} =$$

$$= KB^\nu |c_0 - w|^{-\nu} (|c_0 - w| + K)^{\nu - 1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$\left\{ \begin{aligned} R(a, w) &\geqq \varliminf_{\nu \to \infty} K^{-\frac{1}{\nu}} B^{-1} |c_0 - w| (|c_0 - w| + K)^{-1 + \frac{1}{\nu}} = \\ &= B^{-1} |c_0 - w| (K + |c_0 - w|)^{-1}, \end{aligned} \right. \tag{3. 3}$$

was — mit Rücksicht auf (2. 2)—(3. 1) zur Folge hat.

Daß man immer (d. h. bei einer beliebigen in a analytischen Funktion $f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \cdots$) Abschätzungen der genannten Art für die Koeffizienten angeben kann, lehren die wohlbekannten *Cauchyschen Ungleichungen:* $|c_m| \leqq M(r) r^{-m}$ $(m = 0, 1, \ldots;\ 0 < r < \lim\limits_{m \to \infty} |c_m|^{-\frac{1}{m}})$.

[4] Vermöge der *Parsevalschen Formel* von Potenzreihen können wir statt des Modulmaximums $M(r)$ auch die bessere Schranke $\mathfrak{M}_2(r) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \right]^{\frac{1}{2}}$ benützen.

2) Es sei die lineare gebrochene Funktion

$$(3.4) \qquad G(z) = \frac{\beta(\varkappa+\vartheta_0-w)(z-a)+(w-\vartheta_0)}{1-\beta(z-a)} \qquad \left(z \neq a+\frac{1}{\beta}\right)$$

mit $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $\vartheta_0 > 0$ betrachtet. Da wir hierbei $c_0 = w - \vartheta_0$, $c_m = \varkappa\beta^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ haben, so liegt die Wahl $K = \varkappa$, $B = \beta$ auf der Hand, womit die rechte Seite von (3. 1) in $\vartheta_0 \beta^{-1} (\varkappa + \vartheta_0)^{-1}$ übergeht. Das ist aber ersichtlich der Abstand der einzigen w-Stelle unserer Funktion vom Punkt a, so daß nun

$$D(a, w) = \frac{\vartheta_0}{\beta(\varkappa+\vartheta_0)}$$

gilt, d. h. die untere Schranke in (3. 1) wird im vorliegenden Fall erreicht.

4. Was die Wurzeln einer *algebraischen Gleichung* betrifft, so liefern die meisten expliziten (d. h. die Koeffizienten der Gleichung benutzenden) Abschätzungen der Literatur bekanntlich *obere* Schranken für den absoluten Betrag jeder Nullstelle, oder mindestens einer; besonders hervorzuheben ist unter diesen ein Resultat von FEJÉR [2] über die absolut kleinste Wurzel, wobei es nur auf die Anzahl der wirklich figurierenden Glieder und auf die Kenndaten beider Glieder niedrigsten Grades ankommt.[5] Weitere einschlägige Hilfsmittel sind einige iterativen Näherungsverfahren, wie z. B. diejenigen von D. BERNOULLI und GRÄFFE; durch Anwendung der TURÁNschen Methode kann man auch auf diesem Gebiet interessante Ergebnisse herleiten.[6]

Als Korollar von Sätze 1, 2 gewinnen wir nun ein Theorem, welches für den absoluten Betrag der dem Nullpunkt nächst liegenden Wurzel[7] einerseits einen genauen (nur die Koeffizienten enthaltenden) Ausdruck, andrerseits einfache *untere* Schranken ergibt; letztere liefern also zugleich solche Radien ϱ^*, daß *sämtliche* Nullstellen außerhalb dem Kreis $|z| < \varrho^*$ liegen.

SATZ 3. *Es sei* $Q_M(z) = c_{p_0} + c_{p_1} z^{p_1} + \cdots + c_{p_h} z^{p_h}$ $(0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_h = M)$ *ein Polynom mit beliebigen von* 0 *verschiedenen komplexen Koeffizienten und* ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, N \leq M)$ *die voneinander verschiedenen Wurzeln von* $Q_M(z)$. *Ferner sei* $D_1 = \min\limits_{1 \leq j \leq N} |\xi_j|$.

Dann gilt

$$(4.1) \qquad \begin{cases} D_1 = \lim\limits_{\nu \to \infty} \left| \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda c_0^{-\lambda} \sigma_{\lambda,\nu} \right|^{-\frac{1}{\nu}}, \\ \sigma_{\lambda,\nu} = \sum\limits_{p_{n_1}+\cdots+p_{n_\lambda}=\nu} c_{p_{n_1}} \cdots c_{p_{n_\lambda}}. \end{cases}$$

[5] Vgl. auch [4], 30.

[6] Vgl. [6], 108 ff., ferner [5] und [7].

[7] Bzw. aller absolut kleinsten Wurzeln, falls es mehrere solche gibt.

$x=\omega_0$, sondern auch ihre durch die Bedingung $\omega_0-R(z_0,0)\leqq x\leqq U$ bestimmten Bögen mindestens eine Singularität von $f(z)^{-1}$ enthalten. Da $U=\sup\limits_{x_0=\omega_0}[\omega_0-R(z_0,0)]$ gilt, so wird die Bedingung $U-\varepsilon<\omega_0-R(z_0,0)\leqq U$ durch passende Stellen der Geraden $x_0=\omega_0$ stets erfüllt, wie klein auch $\varepsilon>0$ sein mag. Insgesamt ergibt sich: es liegt mindestens eine Singularität von $f(z)^{-1}$ in jedem Streifen $U-\varepsilon<x\leqq U$ $(\varepsilon>0)$, dagegen in der Halbebene $x>U$ keine, d. h. U bedeutet die obere Grenze der Singularitätsabszissen von $f(z)^{-1}$.

Daraus erhellt sofort, daß $f(z)$ für $x>U$ meromorph und $\neq 0$ ist, und insbesondere (5. 1) besteht; wenn noch die Meromorphie von $f(z)$ in einem Streifen $U'<x\leqq U$ vorausgesetzt wird, so ist U ersichtlich die obere Grenze der Wurzelabszissen von $f(z)$, was (5. 2) liefert.

2) Hat man auf irgendeiner Geraden $x_0=\omega_0>\alpha$ die Ungleichungen (*), so folgt wegen (3. 1)

$$R(z_0,0)\geqq\frac{1}{B(K\eta^{-1}+1)}\qquad(x_0=\omega_0),$$

$$U\leqq\omega_0-B^{-1}\eta(K+\eta)^{-1};\tag{5. 4}$$

(5. 3) ist eine Konsequenz von (5. 4) und (5. 1).

6. Auf Grund des zweiten Teils des eben bewiesenen Satzes kann man jeder nullpunktsfreien Geraden $x_0=\omega_0$ $(>\alpha)$, wo eine positive untere Schranke für $|f(z)|$ und O-Abschätzungen für die Taylorschen Koeffizienten von $f(z)$ bekannt sind, eine andere Gerade $x_0=\omega_0-\delta$ $(\delta>0)$ zuordnen, so daß auch der Streifen $\omega_0-\delta<x\leqq\omega_0$ keine Wurzeln enthält.

Es stellt sich nun von selbst die Frage, wie man z. B. bei einer gewöhnlichen *Dirichletschen Reihe* $g(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k k^{-z}$ mit $A_1\neq 0$ und $A_k|\leqq P$ $(P>0$, Konstante; $k=2,3,\ldots)$ — welche offensichtlich für $x>1$ unbedingt konvergiert — Abschätzungen der Type (*) erhalten kann?

Dazu bemerken wir: 1) beachtet man $|g(z)|\geqq|A_1|-P[\zeta(x)-1]$ $(x>1)$[12] und die elementar herzuleitende Formel $\zeta(x)-1<3\cdot 2^{-x}$ $(x\geqq 2)$, so resultiert leicht die Ungleichung $|g(z)|\geqq\eta$ mit $0<\eta<|A_1|$ für $x\geqq L_\eta=\max\left(2,\frac{1}{\log 2}\log\frac{3P}{|A_1|-\eta}\right)$; 2) man verifiziert ohne Mühe

$$|\zeta^{(m)}(z)|=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\log k)^m}{k^z}\right|\leqq m!\cdot x\,(x-1)^{-(m+1)}\tag{6. 1}$$

[12] $\zeta(z)$ bezeichnet die *Riemannsche Zetafunktion*, definiert für $x>1$ durch $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-z}$.

5. Schließlich berühren wir eine Frage, welche hauptsächlich in der Theorie der *Dirichletschen Reihen* und somit in der analytischen Zahlentheorie von Bedeutung ist, nämlich die Untersuchung derjenigen Wurzel bzw. Wurzeln einer in gewisser Halbebene regulären und nicht verschwindenden Funktion,[10] welcher bzw. welchen *maximaler* Realteil zukommt; genauer gesagt: wir wollen die bisherigen Resultate in betreff der *oberen Grenze der Wurzelabszissen* anwenden.

SATZ 4. *$f(z)$ sei holomorph und $\neq 0$ für $x > \alpha > -\infty$; Θ bezeichne die untere Grenze derjenigen Abszissen ω_0, für welche diese Funktion in der Halbebene $x > \omega_0$ nicht verschwindet.*

1) *Dann ist $U = \omega_0 - \inf\limits_{x_0=\omega_0} R(z_0, 0)$ $(\omega_0 > \alpha)$ (vgl. (2. 1)) von der Wahl von ω_0 unabhängig; $f(z)$ ist für $x > U$ meromorph und es gilt*

$$\Theta \leqq U. \tag{5. 1}$$

Besitzt $f(z)$ noch in einer weiteren Halbebene $x > U'$ $(U' < U)$ meromorphen Charakter, so ist

$$\Theta = U. \tag{5. 2}$$

2) *Wenn es längs einer Vertikalen $x_0 = \omega_0 > \alpha$ die Abschätzungen* (*) $|c_0(z_0)| \geqq \eta$, $|c_m(z_0)| \leqq KB^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *mit gewissen positiven Konstanten η, K, B*[11] *bestehen, so hat man zugleich*

$$\Theta \leqq \omega_0 - \frac{\eta}{B(K+\eta)}. \tag{5. 3}$$

BEWEIS. 1) Es sei $\omega_0 > \alpha$ gegeben und eine Kreisscheibe $\mathfrak{k}_{z_0}: |z - z_0| < R(z_0, 0)$ mit $x_0 = \omega_0$ betrachtet. Satz 1 (vgl. (2. 6), (2. 8)) impliziert, daß $f(z)^{-1}$ in $\mathfrak{k}_{z_0}$ regulär ist und — im Fall eines endlichen Radius $R(z_0, 0)$ — wenigstens eine singuläre Stelle auf dem Rand $|z - z_0| = R(z_0, 0)$ besitzt. — Ist $R(z_0, 0) = +\infty$, was die Holomorphie von $f(z)^{-1}$ überall und somit $U = -\infty$ zur Folge hat, so braucht $f(z)$ auf der ganzen Ebene meromorph und $\neq 0$, also $\Theta = -\infty$ sein (vgl. (5. 1), (5. 2)). — Wir wollen nun annehmen, daß $R(z_0, 0) < \infty$, d. h. die Singularitätsmenge von $f(z)^{-1}$ nicht leer ist.

Dann ist U endlich und $f(z)^{-1}$ holomorph im Streifen $U < x \leqq \omega_0$; denn es kann jedem Punkt z des letzteren ein $\mathfrak{k}_{z_0}$ mit $z \in \mathfrak{k}_{z_0}$ zugeordnet werden. Mithin ersieht man, daß nicht nur sämtliche Kreise $|z - z_0|$ $R(z_0, 0)$ mit

[10] Wie bekannt, jede Dirichletsche Reihe, die wenigstens einen von 0 verschiedenen Koeffizienten und endliche „Absolutkonvergenzabszisse" besitzt, stellt eine solche Funktion dar.

[11] Diese Zahlen hängen natürlich im allgemeinen von ω_0 ab.

(Man beachte, daß die Glieder der inneren Summe in (6. 4) sich wegen $|Z_m| \leq \omega_0(\omega_0-1)^{-(m+1)}$ [vgl. (6. 1)] äußerst einfach abschätzen lassen und ihre Anzahl [vgl. (3. 2)] gleich $\binom{\nu-1}{\lambda-1}$ ausfällt.) Diese Formel ist von etwas komplizierterem Aufbau als die mittels (2. 6) und der Entwicklung

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^z} \qquad (x > 1)$$

($\mu(k)$ die Möbiussche Funktion) fließende

$$(6.5) \qquad \begin{cases} \Theta = \omega_0 - \inf\limits_{x_0=\omega_0} \varliminf\limits_{\nu\to\infty} \left| \dfrac{H^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} \right|^{-\frac{1}{\nu}}, \\ H^{(\nu)}(z_0) = (-1)^\nu \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\mu(k)\log k)^\nu}{k^{z_0}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots); \ \omega_0 > 1, \end{cases}$$

welche den Zusammenhang der Wurzelverteilung von $\zeta(z)$ mit den Primzahlen in Evidenz setzt; dagegen kommt in (6. 4) nur die ursprüngliche Reihe $\sum k^{-z}$ $(x > 1)$ nebst ihren Ableitungen vor.

Literatur

[1] H. Bohr, Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, *Journal für reine u angew. Math.*, **143** (1913), 204—211.

[2] L. Fejér, Über die Wurzel vom kleinsten absoluten Betrage einer algebraischen Gleichung, *Math. Annalen*, **65** (1908), 413—423.

[3] M. Mikolás, Über die höheren Differentialkoeffizienten zusammengesetzter Skalar- bzw Vektorfunktionen und einige Anwendungen derselben, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **1** (1958), 49—65.

[4] O. Perron, *Algebra*, II. (Berlin—Leipzig, 1927).

[5] A. Rényi and P. Turán, On the zeros of polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 275—284.

[6] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953), Akadémiai Kiadó.

[7] P. Turán, Remark on the preceding paper of J. W. Cassels (Application to approximative solution of algebraic equations), *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1957), 291—294.

und daher

$$|g^{(m)}(z)| \leqq P|\zeta^{(m)}(x)| \leqq Pm! \cdot x(x-1)^{-(m+1)} \tag{6.2}$$

für $x > 1$, $m = 1, 2, \ldots$. — Wofern wir also in einer Halbebene $x \geqq \omega_0 > 1$ die Abschätzung $|g(z)| \geqq \eta > 0$ haben (was nach 1. für $\eta < |A_1|$, $\omega_0 \geqq L_\eta$ gewiß der Fall ist), liefern (5. 3) und (6. 2) das Ergebnis:

$$\Theta \leqq \omega_0 - \frac{\eta(\omega_0-1)^2}{P\omega_0 + \eta(\omega_0-1)}; \tag{6.3}$$

genauer: unter den genannten Bedingungen ist $g(z)$ *meromorph und* $\neq 0$ *in der Halbebene*

$$x > \omega_0 - \frac{\eta(\omega_0-1)^2}{P\omega_0 + \eta(\omega_0-1)}.$$

Man liest aus (6. 3) sofort ab: wird $\eta = \inf\limits_{x \geqq \omega_0} |g(z)|$ gesetzt, so strebt die rechte Seite von (6. 3) nebst $\eta \to +0$ gegen die untere Grenze derjenigen Abszissen ω_0, für welche $g(z)^{-1}$ mit $x \geqq \omega_0 > 1$ regulär und beschränkt bleibt; kurz: gegen die sog. „Holomorphie-Beschränktheitsabszisse" von $g(z)^{-1}$.[13] — Bei der Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^z} = (1-2^{1-z})\zeta(z) \qquad (x > 1)$$

ergibt z. B. der erwähnte Grenzübergang den Wert 1 und man hat in diesem Fall genau $\Theta = 1$, weil ja die Punkte $1 + 2\nu\pi(\log 2)^{-1} i$ $(\nu = 0, \pm 1, +2, \ldots)$ Nullstellen der Funktion sind. (Bei diesem Beispiel führt also die Benützung von (5. 3) zur *bestmöglichen* oberen Schranke.)

Anders ist der Sachverhalt bezüglich der Zetareihe selbst: für $\zeta(z)$ ist, wie bekannt, die Vertikale $x = 1$ wurzelfrei, während das Problem, ob $\Theta = 1$, oder $\frac{1}{2} < \Theta < 1$, oder — sogar — $\Theta = \frac{1}{2}$ gilt, bisher unentschieden blieb. Wegen der Meromorphie (überall) von $\zeta(z)$ besteht nun jedenfalls (5. 2), d. h. die *obere Grenze der Wurzelabszissen der Riemannschen Zetafunktion* läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta = \omega_0 - \inf_{x_0=\omega_0} \varlimsup_{\nu\to\infty} \left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda Z_0^{-\lambda} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_\lambda=\nu \\ n_j>0}} Z_{n_1} \cdots Z_{n_\lambda} \right|^{-\frac{1}{\nu}}, \\ &Z_m = Z_m(z_0) = \zeta^{(m)}(z_0)/m! \quad (m = 0, 1, \ldots); \quad \omega_0 > 1. \end{aligned}\right. \tag{6.4}$$

[13] Wie man weiß, das ist zugleich die Abszisse gleichmäßiger Konvergenz für die gewöhnliche Dirichletsche Reihe von $g(z)^{-1}$. — Vgl. [1].

Die Anzahl der Elemente der oben definierten maximalen Mengen, d. h. *die maximale Anzahl der unabhängigen Punkte bzw. Kanten* wollen wir mit $p_{\max}$ bzw. $k_{\max}$, die Anzahl der Elemente der minimalen Mengen, d. h. *die minimale Anzahl der kantenfassenden Punkte bzw. der punktfassenden Kanten* mit $p_{\min}$ bzw. $k_{\min}$ bezeichnen. Im allgemeinen werden wir die Anzahl der Elemente einer Menge M mit $\nu(M)$ bezeichnen.

2. Mit den oben eingeführten Begriffen läßt sich der Königsche Satz ([3] S. 233. Satz 14.), ein wichtiger Satz der Graphentheorie, folgendermaßen formulieren:

Kann man die Menge der Punkte eines Graphen in zwei kantenfreie Mengen zerlegen, d. h. ist der Graph paarer, so gilt

$$k_{\max} = p_{\min}. \tag{1}$$

Auch die folgende, zu (1) „duale" Behauptung stammt von D. KÖNIG[1]:

Enthält ein paarer Graph keinen isolierten Punkt, so gilt

$$p_{\max} = k_{\min}. \tag{2}$$

Die Bedingung, daß der Graph paarer sei, ist nicht überflüssig. Dies zeigt schon das Beispiel des „Dreieckes", d. h. jenes Graphen, der aus den Punkten X_1, X_2, X_3 und aus den Kanten $x_1 = X_2X_3$, $x_2 = X_3X_1$, $x_3 = X_1X_2$ besteht. Hier ist

$$p_{\min} = 2, \quad p_{\max} = 1, \quad k_{\min} = 2, \quad k_{\max} = 1.$$

Man sieht jedoch, daß in diesem Beispiel

$$p_{\min} + p_{\max} = k_{\min} + k_{\max} \tag{3}$$

besteht. Unser Ziel ist nun zu zeigen, daß (3) für jeden solchen Graphen besteht, der keinen isolierten Punkt enthält[2]. Den Beweis werden wir folgendermaßen erhalten: Wir zeigen separiert, daß jede Seite von (3) gleich der Anzahl der Punkte des Graphen ist. Die zu beweisenden Behauptungen fassen wir im folgenden Satz zusammen:

SATZ I. *Enthält der Graph Γ keinen isolierten Punkt, und bezeichnet n die Anzahl der Punkte von Γ, so gilt* (3), *es bestehen sogar*

$$p_{\min} + p_{\max} = n \tag{4}$$

und

$$k_{\min} + k_{\max} = n. \tag{5}$$

[1] Mündliche Mitteilung (1932). Einen Beweis findet man in [1] S. 422.

[2] Diese Behauptung habe ich im Jahre 1932 ausgesprochen und bewiesen. Meines Wissens hat D. KÖNIG diesen Satz auch gekannt.

ÜBER EXTREME PUNKT- UND KANTENMENGEN

Von

T. GALLAI

Mathematisches Forschungsinstitut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

(Eingegangen am 14. Mai 1959.)

1. Es soll Φ bzw. Ψ die Menge der *Knotenpunkte* (im folgenden einfach nur Punkte) bzw. die Menge der *Kanten* des *endlichen* Graphen Γ bezeichnen. Das bedeutet (s. [3]): jedem Element der endlichen Menge Ψ sind in irgendeiner Weise zwei verschiedene Elemente der endlichen Menge Φ zugeordnet. Die einer Kante zugeordneten Punkte sind die *Endpunkte* der Kante und man sagt, daß eine Kante ihre Endpunkte *verbindet*, sowie daß eine Kante und ihre Endpunkte zueinander *inzident* sind. Zwei Kanten nennen wir dann *inzident*, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Ein Punkt, zu dem keine Kante inzident ist, heißt *isoliert*. Wir werden im allgemeinen einen beliebigen Punkt mit X, eine beliebige Kante mit x bezeichnen. Unter einer *Punktmenge* bzw. *Kantenmenge* wollen wir im folgenden immer eine Teilmenge von Φ bzw. Ψ verstehen.

Wir nennen die Punkte einer Punktmenge P (voneinander) *unabhängig* und P selbst *kantenfrei*, wenn je zwei Punkte von P durch keine Kante von Γ verbunden sind. Die Punkte der Punktmenge P sowie P selbst sollen *kantenfassend* heißen, wenn jede Kante des Graphen mindestens einen zu P gehörigen Endpunkt besitzt.

Sind je zwei Kanten einer Kantenmenge K nicht inzident, so nennen wir die Kanten von K (voneinander) *unabhängig* und K selbst *inzidenzfrei*. Ist jeder Punkt des Graphen Endpunkt irgendeiner Kante einer Kantenmenge K, so nennen wir die Kanten von K, sowie K selbst *punktfassend*. Es ist klar, daß punktfassende Kantenmengen dann und nur dann existieren, wenn der Graph keinen isolierten Punkt enthält.

Eine kantenfreie Punktmenge bzw. eine inzidenzfreie Kantenmenge mit maximaler Anzahl von Elementen heißt *maximal*. Eine kantenfassende Punktmenge bzw. punktfassende Kantenmenge mit minimaler Anzahl von Elementen heißt *minimal*. Man kann leicht einsehen: Enthält Γ keinen isolierten Punkt, so existieren alle Arten der definierten extremen Mengen. In der vorliegenden Arbeit wollen wir einige Eigenschaften dieser extremen Mengen untersuchen.

zwei Punkte von P verbindet. Nach der Weglassung einer solchen Kante aus K wäre nämlich die zurückbleibende Menge noch immer punktfassend[3]. Bezeichnen wir mit μ die Anzahl sämtlicher Kanten von K, die mit den Punkten von P inzident sind. Ist P nicht leer, so wählen wir zu jedem Punkt X von P je eine zu X inzidente, beliebige Kante von K. Nach den obigen sind die ausgewählten Kanten voneinander verschieden und unabhängig. Lassen wir jetzt aus K mit Ausnahme der ausgewählten Kanten sämtliche mit den Punkten von P inzidente Kanten weg. Die zurückbleibende Menge K' ist offensichtlich inzidenzfrei, und daher ist

$$k_{\max} \geqq \nu(K'). \tag{12}$$

Es gelten jedoch

$$\nu(K') = \nu(K) - (\mu - \nu(P)) \quad \text{und} \quad 2\nu(K) = n - \nu(P) + \mu.$$

(Die zweite Gleichung erhält man dadurch, daß man bei jedem Punkt X die Anzahl der zu X inzidenten Kanten von K separiert bestimmt, die so erhaltenen Werte addiert und das Ergebnis mit $2\nu(K)$ gleichsetzt.) Daraus folgt

$$\nu(K') = n - \nu(K). \tag{13}$$

Ist P leer, so sei $K' = K$. Auch in diesem Falle ist K' inzidenzfrei, und es bestehen auch (12) und (13). Nach (12) und (13) gilt

$$k_{\max} \geqq n - k_{\min}. \tag{14}$$

(11) und (14) ergeben (5), und damit ist der Beweis des Satzes I beendet.

Wir können jetzt nachträglich aus (5) mit Rücksicht auf (10) und (13) folgern, daß in (9) und (12) das Gleichheitszeichen gilt, daß also die unter (c) bzw. (d) konstruierte Menge K' minimal bzw. maximal ist. Dies bedeutet jedoch die Gültigkeit des folgenden Satzes:

SATZ II. *Enthält ein Graph keinen isolierten Punkt, so kann man aus jeder maximalen inzidenzfreien Kantenmenge durch Hinzufügung von Kanten eine minimale punktfassende Menge; aus jeder minimalen punktfassenden Kantenmenge durch Weglassung von Kanten eine maximale inzidenzfreie Menge erhalten.*[4]

Wir wollen noch bemerken, daß (5) eine einfache Folge von Satz II ist.

[3] Die zu einem Punkt X von P inzidenten Kanten von K bilden einen „Stern". Zu jedem Punkt von P gehört ein solcher Stern, und diese Sterne enthalten paarweise keinen gemeinsamen Punkt. Diejenigen Kanten von K, die zu keinem Punkt von P inzident sind sind voneinander unabhängig und haben mit keinem Stern einen gemeinsamen Punkt.

[4] Bemerkung bei der Korrektur: Die inzwischen erschienene Arbeit [4] enthält diesen Satz (siehe S. 319.).

BEWEIS. (a) Ist die Punktmenge P kantenfrei, so gehört mindestens der eine Endpunkt einer jeden Kante zu $\overline{P} = \Phi - P$, d. h. $\overline{P}$ ist kantenfassend. Ist P sogar maximal, so folgt daraus

(6) $$p_{\min} \leqq n - p_{\max}.$$

(b) Ist P eine kantenfassende Punktmenge, so kann keine Kante von Γ zwei Punkte von $\overline{P} = \Phi - P$ verbinden, d. h. $\overline{P}$ ist kantenfrei. Ist P sogar minimal, so folgt daraus

(7) $$p_{\max} \geqq n - p_{\min}.$$

(6) und (7) ergeben (4).

(c) Es sei K eine maximale inzidenzfreie Kantenmenge. Es besteht also

$$\nu(K) = k_{\max}.$$

Wir konstruieren aus K durch Hinzufügung von Kanten eine punktfassende Menge K': Bezeichne P die Menge derjenigen Punkte, die zu keiner Kante von K inzident sind. P ist kantenfrei. Existiert nämlich eine Kante x, die zwei Punkte von P verbindet, so sind die Kanten von K und x voneinander unabhängig, was der Maximalität von K widerspricht. Ist P nicht leer, so wählen wir zu einem jeden Punkt X von P eine zu X inzidente beliebige Kante. Da Γ keinen isolierten Punkt enthält, kann man diese Auswahl tatsächlich durchführen; und nach den obigen werden die ausgewählten Kanten sowohl voneinander, wie auch von den Kanten von K verschieden sein. Fügen wir nun die ausgewählten Kanten zu K. Die entstehende Menge K' ist offensichtlich punktfassend, und daher ist

(9) $$k_{\min} \leqq \nu(K').$$

Es gelten jedoch

$$\nu(K') = \nu(K) + \nu(P) \quad \text{und} \quad \nu(P) = n - 2\nu(K),$$

und daher gilt

(10) $$\nu(K') = n - \nu(K).$$

Ist P leer, so sei $K' = K$. Auch in diesem Falle ist K' punktfassend, und es bestehen auch (9) und (10). Aus (9) und (10) folgt

(11) $$k_{\min} \leqq n - k_{\max}.$$

(d) Es sei jetzt K eine minimale punktfassende Kantenmenge. Es besteht also

$$\nu(K) = k_{\min}.$$

Wir konstruieren aus K durch Weglassung von Kanten eine inzidenzfreie Menge K': Bezeichne jetzt P die Menge derjenigen Punkte, die zu mindestens zwei Kanten von K inzident sind. K enthält keine solche Kante, die

Nach weiteren Verallgemeinerungen suchend, ist es naheliegend, auch die Kanten des Graphen zu bewerten und statt Punktmengen Punktsysteme zu betrachten. Jedoch sind die in solcher Weise erhaltenen Behauptungen nicht richtig. Wir wollen noch erwähnen, daß wenn wir auch Systeme mit nichtganzzahligen Multiplizitäten zulassen, so nach dem Dualitätssatz der linearen Programmierungstheorie (s. [2] S. 58—65.) nicht nur die Verallgemeinerungen von (3), sondern sogar die von (1) und (2) gültig werden. Dagegen bleibt die dem Satz II entsprechende Ausbreitung auch in diesem Falle falsch.

Literaturverzeichnis

[1] T. Gallai, Maximum—Minimum Sätze über Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), 395—434.

[2] A. J. Goldman and A. W. Tucker, Theory of linear programming, linear inequalities and related systems, *Annals of Math. Study*, **38** (1956), 53—97.

[3] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).

[4] R. Z. Norman and M. O. Rabin, An algorithm for a minimum cover of a graph, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 315—319.

3. Wir können die Sätze I und II folgendermaßen verallgemeinern: Ordnen wir einem jeden Punkt X des Graphen einen nichtnegativen, *ganzzahligen* Wert $\varphi(X)$ zu, und halten wir die Funktion $\varphi(X)$ fest. Ist P eine Punktmenge, so nennen wir den Wert

$$\varphi[P] = \sum_{X \in P} \varphi(X)$$

den φ-*Wert* von P. (Ist $\varphi(X) \equiv 1$, so ist $\varphi[P] = \nu(P)$.) Im folgenden nennen wir eine kantenfreie Punktmenge dann *maximal,* wenn ihr φ-Wert maximal ist; eine kantenfassende Punktmenge dann *minimal,* wenn ihr φ-Wert minimal ist. Es soll $P_{\max}$ eine maximale kantenfreie, $P_{\min}$ eine minimale kantenfassende Menge bezeichnen.

Wir wollen im folgenden auch solche (endliche) Kantengesamtheiten betrachten, in denen dieselbe Kante auch mehrmals vorkommen kann. Solche Gesamtheiten werden wir *Systeme* nennen. Ein *Kantensystem* $\varkappa$ enthält jede Kante x mit einer bestimmten nichtnegativen, *ganzzahligen Multiplizität* $\varkappa(x)$. Die Anzahl der Kanten des Systems $\varkappa$ definieren wir jetzt folgendermaßen:

$$\nu(\varkappa) = \sum_{x \in \Psi} \varkappa(x).$$

Die Anzahl der zu einem Punkt X inzidenten Kanten von $\varkappa$, die wir mit $[\varkappa, X]$ bezeichnen wollen, soll ähnlicherweise „mit Multiplizitäten" gerechnet werden:

$$[\varkappa, X] = \sum_{x \in \Psi(X)} \varkappa(x),$$

wo $\Psi(X)$ die Menge derjenigen Kanten bedeutet, die zu X inzident sind.

Wir nennen das Kantensystem $\varkappa$ *aufnehmbar* bzw. *füllend,* wenn für jedes X $[\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$ bzw. $[\varkappa, X] \geqq \varphi(X)$ besteht. (Ist $\varphi(X) \equiv 1$, so fallen die aufnehmbaren Systeme mit den inzidenzfreien Kantenmengen zusammen.) Ein aufnehmbares System mit maximaler Kantenanzahl heißt *maximal,* ein füllendes System mit minimaler Kantenanzahl *minimal.* $\varkappa_{\max}$ bzw. $\varkappa_{\min}$ soll ein maximales aufnehmbares, bzw. ein minimales füllendes System bezeichnen.

Nun kann man, den Beweisen der Sätze I und II ganz ähnlich, folgende Verallgemeinerungen ableiten:

SATZ III. *Enthält der Graph Γ keinen isolierten Punkt, so gilt*

$$\nu(\varkappa_{\min}) + \nu(\varkappa_{\max}) = \varphi[P_{\min}] + \varphi[P_{\max}] = \varphi[\Phi].$$

SATZ IV. *Enthält ein Graph keinen isolierten Punkt, so kann man aus jedem maximalen aufnehmbaren Kantensystem durch Hinzufügung von Kanten ein minimales füllendes System, und aus jedem minimalen füllenden System durch Weglassung von Kanten ein maximales aufnehmbares System erhalten.*

In the present paper we generalize the results of [3] for the case when the parameter-measure of the underlying random point distribution given in T depends also on chance, and has the form $\lambda(A)=\gamma(A,\lambda)$ where λ is a random variable and $\gamma(A,\lambda)$ is a σ-finite measure on $\mathfrak{S}_T$ for every fixed λ. In § 1 we formulate a theorem and in § 2 we illustrate the obtained results.

§ 1. Abstract mixed Poisson random point distributions and secondary processes

DEFINITION. A random point distribution is called of mixed Poisson type if it is a mixture of random point distributions of Poisson type i. e. there is a random variable λ, a σ-finite non-atomic measure $\gamma(A,\lambda)$ $(A\in\mathfrak{S}_T)$ (which is a function of λ) such that

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\xi(A_1)=k_1,\ldots,\xi(A_n)=k_n|\lambda)=\\ &=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\xi(A_i)=k_i|\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma^k(A_i,\lambda)}{k_i!}e^{-\gamma(A_i,\lambda)}\end{aligned}\tag{2}$$

provided $A_i\in\mathfrak{S}_T$, $\gamma(A_i,\lambda)<\infty$ $(i=1,\ldots,n)$ and $A_iA_k=0$ for $i\neq k$.

Before formulating our theorem we mention that we maintain the supposition about T introduced in [3] i. e. we suppose that

α) For every $B\in\mathfrak{S}_T$ there is a sequence of decompositions $\{B_i^{(n)}, i=1,\ldots,r_n\}$ $B_i^{(n)}B_k^{(n)}=0$ for $i\neq k$, $\sum_{i=1}^{n}B_i^{(n)}=B$, $B_i^{(n)}\in\mathfrak{S}_T$ $(i=1,\ldots,r_n)$ such that the sets $B_i^{(n)}$ can be decomposed by the sets $B_k^{(n+1)}$ and if $t_1\in B$, $t_2\in B$, $t_1\neq t_2$ then for a sufficiently large n we have $t_1\in B_i^{(n)}$, $t_2\in B_k^{(n)}$ where $i\neq k$.

Let us consider the sample elements $(t_1,y_1),(t_2,y_2),\ldots$ of the secondary process the ensemble of which form a random point distribution in $T\times Y$ We denote by $\mathfrak{S}_{T\times Y}$ the σ-algebra $\mathfrak{S}_T\times\mathfrak{S}_Y$ and by $\eta(B)$ $(B\in\mathfrak{S}_{T\times Y})$ the number of random points lying in the set B which is now a measurable subset of $T\times Y$. The condition that the secondary happenings corresponding to different random points are independent is now replaced by the following one

β) If $t_1,t_2,\ldots$ is a sample element of the random point distribution given in the set T then for every n we have

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\eta(D_1)=1,\ldots,\eta(D_n)=1|\lambda,t_1,t_2,\ldots)=\\ &=\mu(C_1,\lambda,t_1),\ldots,\mu(C_n,\lambda,t_n),\end{aligned}\tag{3}$$

where $D_i=A_i\times C_i$, $A_i\in\mathfrak{S}_T$, $C_i\in\mathfrak{S}_Y$, $t_i\in A_i$ $(i=1,2,\ldots)$ and $A_iA_k=0$ for $i\neq k$.

Thus the independence is required for every fixed value of λ. $\mu(C,\lambda,t)$ denotes the probability distribution of the secondary happening y provided

ON SECONDARY PROCESSES GENERATED BY RANDOM POINT DISTRIBUTIONS

By

A. PRÉKOPA

Mathematical Institute, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received 15 May, 1959)

Introduction

In the paper [3] we have given a rigorous mathematical model and a general method for solving special problems in connection with secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type. A random point distribution is a random selection of a finite or countably infinite number of points of an abstract set T where a σ-algebra $\mathfrak{S}_T$ is given. It is supposed that if $\xi(A)$ denotes the number of random points lying in the set $A \in \mathfrak{S}_T$ then it is a random variable i. e. $\xi(A)$ is measurable in the sample space (a sample element is a selection of a finite or countably infinite number of points of T). A random point distribution is called of Poisson type if to disjoint sets $A_1, \ldots, A_r$ of $\mathfrak{S}_T$ there correspond independent random variables $\xi(A_1), \ldots, \xi(A_r)$ and there is a σ-finite measure $\lambda(A)$, $A \in \mathfrak{S}_T$ such that

$$\mathbf{P}(\xi(A)=k)=\frac{\lambda^k(A)}{k!}e^{-\lambda(A)}, \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

for every finite $\lambda(A)$, $A \in \mathfrak{S}_T$.

If every random point is the starting point of a further „happening" then we have a secondary „process". Let Y be an abstract space with a σ-algebra $\mathfrak{S}_Y$ and suppose that the secondary happening consists of a random selection of an element $y \in Y$ to each random point $t \in T$. Then the whole phenomenon can be characterized as follows: we choose a finite or countable infinite number of points $t_1, t_2, \ldots$, from T, also the corresponding y's $y_1, y_2, \ldots$ from Y and thus a sample element of the secondary process is a random selection of the points $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots$ from the product space $T \times Y$. In [3] the case was considered where for different t's the corresponding y's are chosen independently.

If T is the positive part of the time axis and Y is the one-dimensional Euclidean space, then $T \times Y$ is the ensemble of points (t, y) where $t \geqq 0$.

In this case if $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots$ is a sample element of the whole phenomenon this can be represented on the plane so that we measure y_i on the line crossing at t_i the time axis and being vertical to it. This representation was applied by Lexis for the birth- and death-process.

If $\xi(A)$ denotes the number of events or what is the same the number of random points lying in the linear Borel-set A then it follows from (6) and (7) that if $|A| < \infty$ where $|A|$ is the Lebesgue-measure of A, then

$$\mathbf{P}(\xi(A)=n|\lambda)=\frac{(|A|\lambda)^n}{n!}e^{-|A|\lambda}, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{8}$$

$$\mathbf{P}(\xi(A)=n)=\int_0^\infty \frac{(|A|\lambda)^n}{n!}e^{-|A|\lambda}dU(\lambda), \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{9}$$

moreover

$$\mathbf{P}(\xi(A_1)=k_1,\ldots,\xi(A_n)=k_n|\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(\xi(A_i)=k_i|\lambda), \tag{10}$$

where $A_1,\ldots,A_n$ are disjoint linear Borel-sets with finite Lebesgue measures. These are simple consequences of the extension theory of stochastic set functions (see [2]). Thus the mixed Poisson process can be considered as a special random point distribution of mixed Poisson type.

In the special case when $u(\lambda)=U'(\lambda)$ exists and

$$u(\lambda)=\frac{1}{b}\frac{\lambda^{\frac{1}{b}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)}e^{-\frac{\lambda}{b}}, \qquad b>0, \tag{11}$$

we obtain from (6)

$$\begin{aligned} P_n(t)&=\mathbf{P}(\xi_t=n)=\left(\frac{t}{1+bt}\right)^n\frac{(1+b)\cdots(1+(n-1)b)}{n!}P_0(t)\\ P_0(t)&=(1+bt)^{-\frac{1}{b}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Such a process was called by LUNDBERG a Pólya process. Letting $b\to 0$, the probability distribution (12) tends to

$$\frac{t^n}{n!}e^{-t}, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Let $p_n(t)$ denote the intensity function of the Pólya-process, i. e. $p_n(t)\Delta t+\sigma(\Delta t)$ is the probability of an event occuring during the interval $(t, t+\Delta t)$ under the condition that $\xi_t=n$, then a simple calculation shows that

$$p_n(t)=\frac{1+nb}{1+tb}, \qquad n=0,1,2,\ldots \tag{14}$$

(see [1]). It is not difficult to prove that

$$p_n(t)=\mathbf{M}(\lambda|\xi_t=n). \tag{15}$$

its starting point is $t \in T$ and λ is given. Now we are in the position to formulate our

THEOREM. *If the random point distribution* $\{(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots\}$ *is generated by the random point distribution of a mixed Poisson type* $\{t_1, t_2, \ldots\}$ *with the random parameter measure* $\gamma(A, \lambda)$ $(A \in \mathfrak{S}_T)$ *moreover Conditions* α) *and* β) *hold, then the former one is also of mixed Poisson type and*

$$\mathbf{P}(\eta(D) = n) = \int_0^\infty \frac{(\nu^*(D, \lambda))^n}{n!} e^{-\nu^*(D,\lambda)} dU(\lambda), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

where ν^* *is the extended measure of* ν *which is given for the rectangular sets* $D = A \times C$ $(A \in \mathfrak{S}_T, C \in \mathfrak{S}_T)$ *by*

$$\nu(D, \lambda) = \int_A \mu(C, \lambda, t)\gamma(dt, \lambda) \tag{5}$$

when λ *is fixed and* $U(\lambda)$ *is the probability distribution of the random variable* λ.

Our theorem is a simple consequence of the results of [3] therefore we omit the proof.

§ 2. Illustration

A process of random events is called a mixed Poisson process,[1] if

$$\mathbf{P}(\xi_t = n) = \int_0^\infty \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-t\lambda} dU(\lambda), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

where ξ_t is the number of events occuring during the time interval $(0, t)$ and $U(x)$ is a distribution function ($U(\lambda) = 0$ for $\lambda \leqq 0$) and if λ is fixed, then ξ_t has independent increments. More precisely, if $t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_{2n-1} \leqq t_{2n}$ then

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\xi_{t_2} - \xi_{t_1} = k_1, \ldots, \xi_{t_{2n}} - \xi_{t_{2n-1}} = k_n | \lambda) = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\xi_{t_{2i}} - \xi_{t_{2i-1}} = k_i | \lambda) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{((t_{2i} - t_{2i-1})\lambda)^{k_i}}{k_i!} e^{-(t_{2i} - t_{2i-1})\lambda} \end{aligned} \tag{7}$$

[1] This process was considered first by O. LUNDBERG [1] who called it a compound Poisson process. Since the terminology „compound Poisson process" is often used for a process ξ_t with the characteristic function $\exp t \sum_{k=1}^\infty C_k(e^{ikx} - 1)$ (called also a *Composed* Poisson process) we call the process with absolute probabilities (6) mixed Poisson process.

[3], this is a random point distribution of Poisson type. More precisely, if $\eta(A)$ denotes the number of points lying in the plane Borel-set A then to disjoint sets $A_1, \ldots, A_r$ there correspond independent random variables $\eta(A_1), \ldots, \eta(A_r)$ and $\eta(A)$ has a Poisson distribution with

$$\mathbf{M}(\eta(A)) = \lambda \iint_A d_x F(x, t) dt, \tag{22}$$

provided (22) is finite, where $F(x, t)$ is the distribution function of the secondary happening starting at the time point t. If $F(x, t)$ has a density

$$f(x, t) = F'_x(x, t) \tag{23}$$

then

$$\mathbf{M}(\eta(A)) = \lambda \iint_A f(x, t) dx dt. \tag{24}$$

For the application of formulas (22), (24) see [3].

Now we can generalize this result to the case of a random λ. In this case clearly

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\eta(A_1) = k_1, \ldots, \eta(A_r) = k_r | \lambda) = \\ &= \prod_{i=1}^{r} \mathbf{P}(\eta(A_i) = k_i | \lambda) \end{aligned} \tag{25}$$

provided $A_1, \ldots, A_r$ are disjoint plane Borel-sets. Also we have

$$\mathbf{M}(\eta(A) | \lambda) = \lambda \iint_A d_x F(x, t) dt, \tag{26}$$

(here we have supposed that the duration of the secondary happening do not depend on λ) hence $\eta(A)$ has a mixed Poisson distribution, i. e.

$$\mathbf{P}(\eta(A) = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda \nu^*(A))^n}{n!} e^{-\lambda \nu^*(A)} dU(\lambda), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

where

$$\nu^*(A) = \iint_A d_x F(x, t) dt. \tag{28}$$

If $U(\lambda)$ is the distribution function with

$$u(\lambda) = U'(\lambda) = C^r \frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-C\lambda}, \qquad C > 0, r > 0 \tag{29}$$

then

$$\mathbf{P}(\eta(A) = n) = \left(\frac{C}{C + \nu^*(A)}\right)^r \left(\frac{\nu^*(A)}{C + \nu^*(A)}\right)^n \frac{r(r+1) \cdots (r+n-1)}{n!} \tag{30}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

In fact, using the theorem of BAYES we obtain

$$\mathbf{M}(\lambda|\xi_t=n)=\frac{\int_0^\infty \lambda\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}u(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}u(\lambda)d\lambda}=$$

(16)
$$=\frac{\frac{n+1}{t}\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda t}u(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}u(\lambda)d\lambda}=\frac{\frac{n+1}{t}P_{n+1}(t)}{P_n(t)}=\frac{1+nb}{1+tb},$$

where $u(\lambda)$ is the function given by (11) and $P_n(t)$ the probability given by (12).

If λ has the probability density

(17)
$$u(\lambda)=C^r\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r)}e^{-C\lambda},\qquad r>0,\ C>0$$

which is a Pearson type III curve then instead of (11) we get

(18)
$$P_n(t)=\left(\frac{C}{C+t}\right)^r\left(\frac{t}{C+t}\right)^n\frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

A simple argument shows that in this case

(19)
$$p_n(t)=\mathbf{M}(\lambda|\xi_t=n)=\frac{r+n}{C+t},$$

(20)
$$\mathbf{M}(\xi_t)=\sum_{n=1}^\infty nP_n(t)=\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}u(\lambda)d\lambda=$$
$$=t\int_0^\infty \lambda u(\lambda)d\lambda=t\mathbf{M}(\lambda)=t\frac{r}{C}.$$

(21)
$$\mathbf{D}^2(\xi_t)=\sum_{n=1}^\infty n^2P_n(t)-t^2\frac{r^2}{C^2}=t\frac{r}{C}\left(1+\frac{t}{C}\right).$$

Let us now consider the secondary process generated by a mixed Poisson process. We suppose that every event is a starting point of a further happening the duration of which is also a random variable. If we measure this duration on lines going out from the points where the events occured and drawn vertically to the time axis then we obtain a random point distribution on the plane. If λ is a constant then according to the results of the paper

then in view of (30) the probability that at time t there are n conversations, is

$$\mathbf{P}(\eta_t = n) = \frac{1}{(\beta+b)^n} \frac{(a+b)\cdots(a+(n-1)b)}{n!} \left(\frac{\beta}{\beta+b}\right)^{\frac{a}{b}}, \tag{36}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

When $b \to 0$, this reduces to the Poisson distribution with the parameter $\frac{a}{\beta}$.

If $T = (-\infty, \infty)$, λ is a constant and $F(x, t)$ is independent of t then we know that η_t is a stationary process in the strict sense. This property remains true if λ is a random variable. In fact

$$\mathbf{P}(\eta_{t_1+\tau} = k_1, \ldots, \eta_{t_n+\tau} = k_n) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\eta_{t_1+\tau} = k_1, \ldots, \eta_{t_n+\tau} = k_n | \lambda) dU(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}(\eta_{t_1} = k_1, \ldots, \eta_{t_n} = k_n | \lambda) dU(\lambda) = \mathbf{P}(\eta_{t_1} = k_1, \ldots, \eta_{t_n} = k_n). \tag{37}$$

Let m denote the expectation of λ,

$$m = \int_0^\infty \lambda dU(\lambda). \tag{38}$$

Then the covariance of η_{s+t} and η_t is given by

$$R(t) = \mathbf{M}[(\eta(A_{s+t}) - m\nu^*(A_{s+t}))(\eta(A_s) - m\nu^*(A_s))], \tag{39}$$

where $A_t = \{(\tau, x),\ \tau < t,\ x > t - \tau\}$. Since for a fixed λ and disjoint sets $B_1, \ldots, B_r$ the random variables $\eta(B_1), \ldots, \eta(B_r)$ are independent, it follows that

$$R(t) = m\nu(A_s A_{s+t}). \tag{40}$$

Suppose that $F(x, t) = 1 - e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, $x > 0$, then we get

$$R(t) = \frac{m}{\beta} e^{-\beta|t|}. \tag{41}$$

Thus if $\xi_t = \eta_t - \mathbf{M}(\eta_t) = \eta_t - m\nu^*(A_t)$, then the best linear least squares prediction of ξ_{s+t}, based on the variables ξ_τ, $\tau \leqq s$, is given by

$$\tilde{\xi}_{s+t} = \xi_s e^{-\beta|t|}. \tag{42}$$

Bibliography

[1] O. Lundberg, *On random processes and their application to sickness and accident statistics*, (Uppsala, 1940).

[2] A. Prékopa, On stochastic set functions I., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 215—263.

[3] A. Prékopa, On secondary processes generated by a random point distribution of Poisson type, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **1** (1958), 153—170.

and

$$\mathbf{M}(\eta(A)) = \nu^*(A)\frac{r}{C}, \tag{31}$$

$$\mathbf{D}^2(\eta(A)) = \nu^*(A)\frac{r}{C}\left(1+\frac{\nu^*(A)}{C}\right). \tag{32}$$

The underlying random process (the events of which are the starting points of the secondary happenings) is a Pólya-process if $C = r = \frac{1}{b}$, $b > 0$. In this case

$$\mathbf{P}(\eta(A) = n) = \left(\frac{\nu^*(A)}{1+b\nu^*(A)}\right)^n \frac{(1+b)\cdots(1+(n-1)b)}{n!}\frac{1}{(1+b\nu^*(A))^{\frac{1}{b}}}, \tag{33}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

With the aid of this model of secondary processes we can solve a number of special problems. Suppose e. g. that the underlying eventprocess is the process of the calls arriving at a telephone centre and the secondary happenings are the conversations. Suppose moreover that the number of lines in the centre is infinite and the calls arrive according to a mixed Poisson process. Let furthermore $F(x, t) = 1 - e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, $x > 0$. We want to determine the distribution of the random variable η_t denoting the number of conversations going on at time t. Clearly

$$\eta_t = \eta(A)$$

if $A = \{(\tau, x): 0 \leqq \tau < t, x > t - \tau\}$ and thus

$$\mathbf{P}(\eta_t = n) = \mathbf{P}(\eta(A) = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda\nu^*(A))^n}{n!} e^{-\lambda\nu^*(A)}\, dU(\lambda), \tag{34}$$

where

$$\nu^*(A) = \iint_A \beta e^{-\beta x}\, dx\, dt = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t}). \tag{35}$$

It is not difficult to complete this results with the case when the process of calls is considered on the whole time axis $-\infty < t < \infty$. Then we interpret the probability (6) as the probability of arriving n calls in a time interval with the length t. If η_t denotes the same as before then $\eta_t = \eta(A)$ where $A = \{(\tau, x): \tau < t, x > t - \tau\}$. Formula (26) remains true but $\nu^*(A)$ in this case equals $\frac{1}{\beta}$. If $U(\lambda)$ is given by (29) and $C = \frac{1}{b}$, $r = \frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$,

H has the property C) if $\mathfrak{A} \in H$, $\mathfrak{B} \in H$ and $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} (\mathrm{mod}\, \{\lambda'\})$ imply $\mathfrak{A} \rhd_\lambda \mathfrak{B} \in H$ for any $\lambda \in \Lambda$.

H has the property D) if whenever for an element $\mathfrak{A} \in G$ there exists an index λ such that

1. $\lambda' \neq \lambda$ and $\lambda^* \neq \lambda$ imply that $\varrho(\mathfrak{A}_{\lambda'}, \mathfrak{A}_{\lambda^*})$ is true, and

2. $\varrho(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_{\bar\lambda})$ is true for a suitable index $\bar\lambda \neq \lambda$,

then $\mathfrak{A} \in H$.

H has the property E) if whenever for an element $\mathfrak{A} \in G$ there exists an index $\bar\lambda$ such that $\varrho(\mathfrak{A}_{\bar\lambda}, \mathfrak{A}_\lambda)$ is true for every λ, then $\mathfrak{A} \in H$.

3. Results. THEOREM 1. *If Λ is a finite set, then the properties* A) *and* B) *are equivalent for H.*

We shall write in the proof i for λ' and k for λ^*.

A) *implies* B). By the transitivity of the relation ε we have $a_k \equiv c_j$ (ε) since $a_k \equiv a_i = b_i = b_k = c_k \equiv c_j$ (ε) (where j can be an arbitrary index).

B) *implies* A). Let ε be the equivalence relation induced by ϱ. First we are going to prove the following fact: if ε holds for the elements $a \in A_{j_1}$, $b \in A_{j_2}$ $(j_1 \neq j_2)$, then also ϱ holds for a and b. Indeed, we must have a sequence of vectors $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ such that a occurs in $\mathfrak{A}_1$, b occurs in $\mathfrak{A}_r$, and $\mathfrak{A}_{s-1}, \mathfrak{A}_s$ $(s = 2, \ldots, r)$ contain a common component. Let $\mathfrak{A}_s$ $(1 < s \leqq r)$ be an arbitrary vector in the sequence; we assume that the j_2-component of the vector $\mathfrak{A}_{s-1}$ is in relation ϱ to a, and we shall prove that also the j_2-component of $\mathfrak{A}_s$ is in relation ϱ to a. Let $\mathfrak{D}$ be a vector containing a as its j_1-component and having its j_2-component common with $\mathfrak{A}_{s-1}$. Then B) assures that $\mathfrak{A}_s \rhd_{j_2} \mathfrak{D}$ is a vector (the assumption of B) holds with $\mathfrak{A}_{s-1}$ as $\mathfrak{B}$). The statement can be verified inductively.[4]

Now we can verify that $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_n$ (ε) implies that $(a_1, \ldots, a_n)$ is a vector. Assume that the subset $\{a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ $(1 < r \leqq n)$ of the set $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ can be extended to a vector; let $\mathfrak{V}$ be a vector containing all of $a_1, \ldots, a_{r-1}$. The two elements a_1, a_r can be extended to a vector $\mathfrak{W}$ (by the statement proved in the preceding part of the proof). Thus $\mathfrak{W} \rhd_r \mathfrak{V}$ is a vector by B) (with $\mathfrak{V}$ as $\mathfrak{B}$), therefore also the set $\{a_1, \ldots, a_r\}$ can be extended to a vector. This fact completes the proof by induction.

THEOREM 2. *If Λ contains at least three elements, then the properties* B) *and* C) *are equivalent for H.*

[4] Let us observe that our inference up to now has not made use of the finiteness of Λ.

ON SUBSETS OF SET PRODUCTS

By

A. ÁDÁM

J. Bolyai Mathematical Institute of the University, Szeged

(Received April 20, 1959)

1. Preliminaries, notation. The present paper is suggested by the idea of an algebraic paper[1] of L. FUCHS. He uses there an inference of set-theoretical nature without declaring it explicitly. His idea is the particular case $\Lambda = \{1, 2\}$ of our Theorem 1 concerning subsets of the product of a finite number of sets.

Let be given the disjoint sets A_λ where λ runs over an index set Λ containing at least two elements. If we shall assume that Λ is finite, then let Λ consist of the natural numbers $1, 2, \ldots, n$. Let the set-theoretical product of the A_λ's be denoted by G; let H be a subset of G such[2] that any element of each A_λ occurs in at least one element of H. The elements of H will be called *vectors*.

Let $\mathfrak{A}_\lambda$ denote the λ-component of $\mathfrak{A}(\in G)$. Let the relation ϱ be true for $a \in A_\lambda$ and $b \in A_{\lambda'}$ if there exists a vector $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A}_\lambda = a$ and $\mathfrak{A}_{\lambda'} = b$.

If we have $\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{B}_\lambda$ for $\mathfrak{A} \in G$ and $\mathfrak{B} \in G$ and for each index $\lambda \in \Lambda^* (\subseteq \Lambda)$, then we say that $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \pmod{\Lambda^*}$. Let $\mathfrak{A} \rhd_\lambda \mathfrak{B}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in G)$ denote the element of G defined by

$$\mathfrak{A} \rhd_\lambda \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \pmod{\{\lambda\}}, \quad \mathfrak{A} \rhd_\lambda \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \pmod{\Lambda - \{\lambda\}}.$$

2. Some definitions. *H has the property* A) if there exists a classification ε of the union $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ such that $(\ldots, a_\lambda, \ldots) \in G$ belongs to H if and only if $\cdots = a_\lambda \equiv \cdots (\varepsilon)$ (i. e. all the components of $(\ldots, a_\lambda, \ldots)$ lie in a common class modulo ε.[3])

H has the property B) if $\mathfrak{A} \in H$, $\mathfrak{B} \in H$, $\mathfrak{C} \in H$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \pmod{\{\lambda'\}}$ and $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \pmod{\{\lambda^*\}}$ imply $\mathfrak{A} \rhd_{\lambda^*} \mathfrak{C} \in H$.

[1] L. FUCHS, On subdirect unions. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), 103—119, especially pp. 108—109. See also pp. 210—211 in the paper

K. SHODA, Allgemeine Algebra, *Osaka Math. Journal*, 1 (1949), 182—225.

[2] Evidently, this is no essential restriction.

[3] It is obvious that each class modulo ε must have a non-empty intersection with any A_λ. The classification is uniquely determined by H.

PROOF. If $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$, then B) implies obviously C). Conversely from the assumption of B) we can infer, by applying successively C), that

$$\mathfrak{A} \rhd_{\lambda^*} \mathfrak{C} = \mathfrak{C} \rhd_{\bar{\lambda}} ((\mathfrak{B} \rhd_{\bar{\lambda}} \mathfrak{A}) \rhd_{\lambda^*} (\mathfrak{B} \rhd_{\bar{\lambda}} \mathfrak{C})) \in H$$

where $\bar{\lambda}$ is an arbitrary index $\neq \lambda', \lambda^*$.

THEOREM 3. *If Λ contains at least three elements, then the properties* A), D) *and* E) *are equivalent for H.*

PROOF. A) *implies* E) obviously.

E) *implies* D). Let the assumption of D) be true for an element $\mathfrak{A} \in G$. Then the assumption of E) holds for $\mathfrak{A}$, and so $\mathfrak{A} \in H$.

D) *implies* A). It is easy to see that D) implies C), and thus (by Theorem 2) B). Let us consider an element of G all the components of which are equivalent in the equivalence relation induced by ϱ. The first part of our proof of B) $\rightarrow$ A) remains valid also for an infinity of indices, therefore ϱ holds for any two components. D) assures that the element considered above belongs to H (λ can be arbitrary).

4. Counter-examples. We shall construct two counter-examples in order to show that our results cannot be sharpened concerning the cardinality of Λ. The third example will serve an other purpose.

Let $A_1=\{a_1, b_1\}$ and $A_2=\{a_2, b_2\}$. The set $H=\{(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, b_2)\}$ has not the properties A) and B); but C), D) and E) are fulfilled trivially in case $\Lambda=\{1, 2\}$.

Let Λ be an arbitrary infinite set, and let each A_λ contain at least two elements. We choose an element $e_\lambda \in A_\lambda$ for every λ and define $\mathfrak{A} \in H$ if and only if $\mathfrak{A}$ is incongruent only for a finite number of indices to the element of G consisting of the e_λ's. Then H has the properties B) and C), but it satisfies neither A), nor D) nor E).

Finally, we are going to show that the property D) in Theorem 3 can not be substituted by the weaker property: if ϱ holds for any two components of $\mathfrak{A} \in G$, then $\mathfrak{A} \in H$. Let each A_λ contain at least two elements; let us choose the e_λ's as in the preceding example. Let $\mathfrak{A} \in H$ hold for $\mathfrak{A} (\in G)$ if and only if at most one e_λ occurs in $\mathfrak{A}$. Then H has not the property A), but it has the property mentioned above.

The author is grateful to Mr. A. HAJNAL for his valuable remarks.

$2n-1$ au plus, qui coïncide avec $f(x)$ en regard à ses valeurs et à celles de sa dérivée prises aux abscisses (1). Il découle de (4) que

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1} |f(x)-F_{2n-1}(x)| = 2,$$

tandis que de la forme connue

$$T_{2n-1}(x) = f(x) - \tau_{2n}(x)$$

du polynome $T_{2n-1}(x)$ il résulte:

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1} |f(x)-T_{2n-1}(x)| = 1$$

donc, que l'écart maximum de $F_{2n-1}(x)$ à $f(x)$, sur l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ *est exactement le double* de l'écart fourni par $T_{2n-1}(x)$, donc le minimum des écarts obtenus avec les polynomes de degré $2n-1$ au plus (remarque de M. PAUL ERDŐS, déjà faite par M. FEJÉR[2] lui-même au cas où $n=1$). Un résultat surprenant de M. FEJÉR[3] est qu'une fonction étant continue sur l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, de plus sur cet intervalle le groupe de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant de *distribution normale*, parmi les paraboles de degré $2n-1$ au plus passant par les points $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ il s'en trouve toujours une dont l'écart maximum à $f(x)$ est, sur cet intervalle, *au plus le double* de l'écart maximum à $f(x)$ de celui des polynomes de degré $2n-1$ au plus qui approche le mieux la fonction $f(x)$; un tel polynome remarquable est celui qui coïncide avec ce $T_{2n-1}(x)$ en regard à ses dérivées prises aux abscisses x_k. Si donc sur cet intervalle, nous désignons par E_{2n-1} le minimum de l'écart maximum (fourni par $T_{2n-1}(x)$) à $f(x)$ de tous les polynomes de degré $2n-1$ au plus, et par E^*_{2n-1} ce minimum relatif aux polynomes coïncidant avec $f(x)$ aux points x_k, il résulte alors du résultat de M. FEJÉR que nous venons de citer que

$$E^*_{2n-1} \leqq 2E_{2n-1}.^4 \tag{5}$$

Dans ce qui suit, nous montrerons que *sous* (5), *l'égalité peut s'ensuivre.* Nous démontrerons notamment que *dans le cas spécial sous* (1) *et* (2), *parmi les polynomes de degré* $2n-1$ *au plus qui coïncident avec* $f(x)$ *aux points* x_k, *le polynome* $F_{2n-1}(x)$ *figurant dans* (4) *est justement le seul dont l'écart maximum à* $f(x)$ *est le plus petit possible sur l'intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$.

[2] LEOPOLD FEJÉR o. c., § 7, 338—341, spécialement 341.

[3] LEOPOLD FEJÉR, On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points, *American Mathematical Monthly*, 41 (1934), 1—14, spec. 11—13.

[4] L'existence du minimum E^*_{2n-1} peut se démontrer de la même façon que celle du minimum E_{2n-1}. Pour cette dernière, voir p. e. É. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, etc. (Paris, 1905), 82—84.

REMARQUE SUR UN OUVRAGE DE M. LÉOPOLD FEJÉR*

Par

PAUL SZÁSZ

Institut de Mathématiques, Université Eötvös Loránd, Budapest

(Reçu le 17 juillet 1959)

Considérons sur l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ les abscisses de Tchebycheff

$$x_k = \cos (2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

et la fonction continue

$$f(x) = 2^{2n-1} x^{2n}. \tag{2}$$

Soit $T_{2n-1}(x)$ le polynome de degré $2n-1$ au plus qui, sur l'intervalle, approche le mieux possible *au sens de Tchebycheff* la fonction $f(x)$, c'est-à-dire pour lequel

$$\max_{1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - T_{2n-1}(x)|$$

est le plus petit possible. Alors, le polynome $F_{2n-1}(x)$ de degré $2n-1$ au plus qui est égal à la fonction (2) aux abscisses (1) et dont la dérivée est identique à celle de $T_{2n-1}(x)$ aux mêmes abscisses, c'est-à-dire qui vérifie les conditions

$$F_{2n-1}(x_k) = f(x_k), \quad F'_{2n-1}(x_k) = T'_{2n-1}(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

peut s'écrire, selon M. FEJÉR[1]

$$F_{2n-1}(x) = T_{2n-1}(x) - 1, \tag{3}$$

ou, sous une autre forme,

$$F_{2n-1}(x) = f(x) - 2\tau_n(x)^2, \tag{4}$$

où

$$\tau_n(x) = [\cos n\vartheta]_{x=\cos\vartheta} = 2^{n-1}x^n + \cdots$$

est le polynome de Tchebycheff de première espèce correspondant à l'indice n. En outre le polynome $F_{2n-1}(x)$ figurant sous (3) et (4) — comme M. FEJÉR l'accentue dans son ouvrage cité — est identique au polynome de degré

* Version d'une note précédente en hongrois par l'auteur: Megjegyzés FEJÉR LIPÓT egy munkájához, *A Természettudományi Kar Évkönyve*, (Budapest, 1954), 15—18.

[1] LEOPOLD FEJÉR, Beste Approximierbarkeit einer gegebenen Funktion durch ein Polynom gegebenen Grades, etc., *Matematische Nachrichten*, 4 (1950—51), 328—342, spécialement 339, form. (ν), (ω).

car dans ce cas le polynome $\varphi(x) \not\equiv 0$ serait au moins de degré n.[5] Donc, en un certain point η_i,

$$\operatorname{sg} \varphi(\eta_i) = -\operatorname{sg} \omega(\eta_i),$$

lorsque $\gamma_{2n-1}(\eta_i) < 0$ en vertu de (11), et ainsi d'après (10)

$$g_{2n-1}(\eta_i) < F_{2n-1}(\eta_i).$$

Par conséquent

$$f(\eta_i) - g_{2n-1}(\eta_i) > f(\eta_i) - F_{2n-1}(\eta_i)$$

à ce point η_i, c'est-à-dire selon la condition (7)

$$f(\eta_i) - g_{2n-1}(\eta_i) > \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - F_{2n-1}(x)|,$$

donc à plus forte raison (9) est vérifiée.

Ce lemme a pour conséquence immédiate notre assertion énoncée plus haut. En effet pour les racines

$$\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{n-1}$$

de l'équation $\tau_n'(x) = 0$, il découle de (4)

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |f(x) - F_{2n-1}(x)| = 2 \quad f(\eta_k) - F_{2n-1}(\eta_k),$$

car $\tau_n(\eta_k) = +1$ en ces points, de plus

$$f(+1) - F_{2n-1}(\pm 1) = 2\tau_n(+1)^2 = 2.$$

[5] Ceci peut être prouvé le plus simplement en raisonnant par récurrence, comme il suit.

La proposition est vraie pour $n = 1$. Car si $\varphi(\eta_0) \leqq 0$, $\varphi(\eta_1) \geqq 0$, alors $\varphi(x)$ ne peu être de degré nul, c'est-à-dire une constante; dans ce cas on aurait simultanément $\varphi(\eta_1) \leqq 0$, donc $\varphi(\eta_1) = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x) = 0$, ce qui contredirait notre hypothèse. Et si la proposition est vraie pour $n-1$, alors elle l'est aussi pour n. En effet, il découle de l'hypothèse que

$$\frac{\varphi(\eta_1) - \varphi(\eta_0)}{\eta_1 - \eta_0} \geqq 0, \quad \frac{\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \leqq 0, \quad \frac{\varphi(\eta_3) - \varphi(\eta_2)}{\eta_3 - \eta_2} \geqq 0, \ldots$$

tour à tour, par suite, en vertu de la formule des accroissements finis, on a successivement

$$\varphi'(\zeta_1) \geqq 0, \quad \varphi'(\zeta_2) \leqq 0, \quad \varphi'(\zeta_3) \geqq 0, \ldots$$

où

$$\eta_0 < \zeta_1 < \eta_1 < \zeta_2 < \eta_2 < \cdots < \eta_{n-1} < \zeta_n < \eta_n.$$

Or $\varphi'(x)$ ne peut être nul partout, car $\varphi(x)$ serait alors constante et identiquement nulle selon notre hypothèse, ce qui est exclu. Par conséquent, en vertu de notre hypothèse inductive, $\varphi'(x)$ est au moins de degré $n-1$ et par suite $\varphi(x)$ est au moins de degré n, la proposition est vraie pour n aussi, donc pour chaque n.

En ce qui concerne une autre démonstration, cf. par l'auteur: *A differenciál- és integrálszámitás elemei*, 2ième édition, (Budapest, 1951), § 90, Volume I, 136–137 (dans la première édition § 233, Vol I, 401—402).

D'autre part, selon le théorème de ROLLE, en comparant avec les racines de l'équation $\tau_n(x)=0$ figurant sous (1):

$$x_n < \eta_1 < x_{n-1} < \eta_2 < \cdots < x_2 < \eta_{n-1} < x_1;$$

on voit que dans ce cas, lorsque

$$a=-1, \quad b=1, \quad \xi_k = x_{n-k+1}, \quad \eta_0=-1, \quad \eta_n=1$$

et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ étant les racines de l'équation $\tau_n'(x)=0$, notre lemme peut s'appliquer à la fonction $f(x)$ figurant sous (2) et au polynome $F_{2n-1}(x)$ figurant dans (4). Il en résulte que pour tout polynome $g_{2n-1}(x)$ de degré $2n-1$ au plus, différent de $F_{2n-1}(x)$ et coïncidant avec $f(x)$ aux abscisses (1), l'inégalité

$$\max_{-1\leqq x\leqq 1} |f(x)-g_{2n-1}(x)| > \max_{-1\leqq x\leqq 1} |f(x)-F_{2n-1}(x)|$$

subsiste. C. q. f. d.

INDEX

TOMUS II

LÉOPOLD FEJÉR 1880—1959 3

ACZÉL, J., Sur l'équation differentielle des polynomes orthogonaux classiques . . . 27

ÁDÁM, A., On subsets of set products 147

CSÁSZÁR, Á., Sur la représentation canonique des fonctionnelles linéaires 85

ERDŐS, P. and RÉNYI, A., On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_n}$ 93

FEJES TÓTH, L., An arrangement of two-dimensional cells 61

FRIED, E., Über eine Verallgemeinerung der Auflösbarkeit von Gleichungen 67

FUCHS, L., Notes on abelian groups. I 5

GALLAI, T., Über extreme Punkt- und Kantenmengen 133

KÁRTESZI, F., Über ein elementargeometrisches Problem 49

KUCZMA, M., Note on convex functions 25

MIKOLÁS, M., Bemerkungen über den Wertvorrat durch Potenzenreihen definierter, insbesondere meromorpher Funktionen 123

MOLNÁR, J., Bemerkungen zu den Grundkonstruktionen der hyperbolischen Ebene . . 31

MOLNÁR, J., Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise 33

PÁL, L. G., Über die kanonische Darstellung der linearen Operationen 73

PÉTER, RÓZSA, Über die Partiell-Rekursivität der durch Graphschemata definierten zahlentheoretischen Funktionen 41

PRÉKOPA, A., On secondary processes generated by random point distributions . . . 139

RÉNYI, A. and ERDŐS, P., On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_n}$ 93

RÉVÉSZ, P., A generalization of the zero-one law 111

SASIADA, E., On two problems concerning endomorphism groups 65

SZÁSZ, P., Über die Rektifikation von Kurvenbogen im Poincaréschen Kreismodell der hyperbolischen Geometrie der Ebene 115

SZÁSZ, P., Remarque sur un ouvrage de M. Léopold Fejér 151

Technikai szerkesztő: Scharnitzky Viktor

A kiadásért felelős: Az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora
A kézirat nyomdába érkezett: 1959. május 20. — Terjedelem: 13³/₄ A/5 ív, 59 ábra
Példányszám: 500
Készült kéziszedésről ives magasnyomással

Szegedi Nyomda Vállalat 59-2393