

ANNALES  
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM  
BUDAPESTINENSIS  
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS VII.

REDIGIT

Á. CSÁSZÁR

ADIUVANTIBUS

L. FUCHS, G. HAJÓS, F. KÁRTESZI, A. KÓSA,  
J. MOLNÁR, R. PÉTER, A. RÉNYI, J. SURÁNYI,  
P. SZÁSZ, P. TURÁN



1964



## International ACTA Journals from Hungary

publish original scientific treatises in English, German,  
French or Russian.

### **ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS de Rolando Eötvös Nominatae**

Scientific yearbooks in congress languages published by the  
L. Eötvös University, Budapest.

#### **SECTIO MATHEMATICA**

*Editor:* A. Császár

*Size:* 24 cm, 150 to 200 pp.

Vols. 1-12, 1958-1969, mostly reprinted,	clothbound set	US \$	144,-
Vols. 1, 2, 5-12	unbound, per vol.	US \$	10,-
Vol. 3/4, 1960/1961 (404 pp.) reprinted, memorial vol. devoted to L. Fejér	clothbound	US \$	22,-

#### **SECTIO PHILOLOGICA**

*Editors:* L. Kardos, L. Ligeti, Gy. Ortutay, A. Mádl, F. Molnár, O. Süpek

*Size:* 24 cm, 150 to 200 pp.

Vols. 1-9, 1957-1969.	per vol.	US \$	8,-
	Clothbound set	US \$	90,-

#### **SECTIO PHILOSOPHICA ET SOCIOLOGICA**

*Editor:* P. Sándor

*Size:* 24 cm, 100 to 200 pp.

Vols. 1-7, 1962-1969	per vol.	US \$	8,-
	Clothbound set	US \$	70,-

#### **OPUSCULA ZOOLOGICA**

Instituti Zoosystematici Universitatis Budapestinensis

*Editors:* I. Andrassy, Á. Berczik

*Size:* (Vols. 1-4) 20 cm, 100 to 200 pp.

(Vols. 5-9) 24 cm, 300 to 400 pp.

Vols. 1,4-9, 1957-1969	per vol.	US \$	8,-
Reprint of vol. 2 & 3 planned for 1970			

**ANNALES  
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM  
BUDAPESTINENSIS  
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE**

**SECTIO MATHEMATICA**

**TOMUS VII.**

**REDIGIT**

**Á. CSÁSZÁR**

**ADIUVENTIBUS**

**L. FUCHS, G. HAJÓS, F. KÁRTESZI, A. KÓSA,  
J. MOLNÁR, R. PÉTER, A. RÉNYI, J. SURÁNYI,  
P. SZÁSZ, P. TURÁN**



**1964**

# ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

## SECTIO BIOLOGICA

incepit anno MCMLVII

## SECTIO CHIMICA

incepit anno MCMLIX

## SECTIO GEOLOGICA

incepit anno MCMLVII

## SECTIO HISTORICA

incepit anno MCMLVII

## SECTIO PHYSICA

incepit anno MCMLXIII

## SECTIO IURIDICA

incepit anno MCMLIX

## SECTIO MATHEMATICA

incepit anno MCMLVIII

## SECTIO PHILOLOGICA

incepit anno MCMLVII

## SECTIO PHILOSOPHICA

incepit anno MCMLXII

A kiadásért felelős:  
az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora  
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Minden jog fenntartva

Kulföldi terjesztés:

KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP  
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT  
BUDAPEST 62,  
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published  
in Budapest

All rights reserved

General Distributors:

KULTURA Hungarian Trading Company  
for Books and Newspapers  
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,  
Hungary  
Printed in Hungary, 1969

# DOUBLE COMPACTIFICATION D'ESPACES SYNTOPOGÈNES

Par

Á. CSÁSZÁR

Chaire d'Analyse Mathématique, Université Eötvös Loránd, Budapest

(Reçu le 11 février 1964)

Dans la monographie [1], j'ai montré que chaque espace syntopogène peut être plongé, de manière isomorphe, dans un espace syntopogène doublement complet et que, en admettant certaines conditions supplémentaires, cet espace doublement complet est univoquement déterminé à isomorphie près par l'espace donné. On peut dire la même chose quant au plongement d'espaces syntopogènes *simples* dans des espaces syntopogènes simples doublement compacts (v. [1], chapitre 16). En tenant compte du fait que, parmi les espaces uniformes, ce ne sont que les espaces uniformes *totalement bornés* (ou précompacts) qui admettent un plongement dans un espace uniforme compact, je ne me suis pas occupé du plongement d'espaces syntopogènes *non-simples* dans d'espaces syntopogènes compacts. Tout de même, j'ai aperçu récemment que les méthodes élaborées dans le chapitre cité de [1] fournissent sans difficulté l'extension de la théorie de double compactification aux espaces syntopogènes quelconques.

Le but de cet ouvrage est de présenter cette extension. Les références du type  $(x \cdot y)$  (où  $x$  et  $y$  sont des nombres naturels) se réfèrent à la monographie [1], tandis que celles de type  $(x)$  indiquent les formules du présent article. Pour la terminologie et la notation, nous renvoyons le lecteur à [1].

1. Soit  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène quelconque. Désignons par  $E^*$  un ensemble de grilles comprimées dans  $E$ , contenant l'ensemble  $E_0^*$  des grilles fondamentales (c'est-à-dire ayant la forme  $\{\{x\}\}$  où  $x \in E$ ). Posons  $\mathcal{T} = \mathcal{S}^{st}$  et observons que les éléments de  $E^*$  sont également comprimés par rapport à  $\mathcal{T}$  (cf. (15.47)).

Appliquons à  $E^*$  et à  $\mathcal{T}$  la construction décrite dans (16.40). De façon plus détaillée, posons pour  $A \subset E$ ,  $A \neq 0$

$$(1) \quad g(A) = \{x^* : x^* \in E^*, x^* \subset A\}, \quad g(0) = 0$$

(cf. (16.34)) et, pour  $\langle \cdot \rangle \in \mathcal{S}$  ou  $\langle \cdot \rangle \in \mathcal{T}$ ,  $A^*, B^* \subset E^*$ , soit  $A^* \prec_{(\langle \cdot \rangle, \langle \cdot \rangle)} B^*$  si et seulement si il existe deux ensembles  $A$  et  $B$  tels que  $A^* \subset g(A)$ ,  $A \prec B$ ,  $g(B) \subset B^*$  (cf. (16.2)). On pose alors

$$(2) \quad \mathcal{S}^* = \{ \prec_{(\langle \cdot \rangle, \langle \cdot \rangle)} : \langle \cdot \rangle \in \mathcal{S} \},$$

$$(3) \quad \mathcal{T}^* = \{<(g, g)q : <\in \mathcal{T}\}$$

cf. (16.26)).

De plus, les grilles  $x^* \in E^*$  étant comprimées dans  $\mathcal{T}$ , dans  $\mathcal{S}^s$  et dans  $\mathcal{S}$  (cf. 15.47)), on peut appliquer (16.65) pour  $\mathcal{S}$ , pour  $\mathcal{S}^s$  et pour  $\mathcal{T}$ . Autrement dit, posons pour  $A \subset E$

$$(4) \quad h(A) = \{x^* : x^* \in E^*, x^*(\cap) A \neq 0\}$$

(cf. (16.51)) et, pour  $<\in \mathcal{S}$ ,  $<\in \mathcal{S}^s$  ou  $<\in \mathcal{T}$ ,  $A^*, B^* \subset E^*$ , soit  $A^* <^{(g, h)} B^*$  valable si et seulement si l'on peut trouver deux ensembles  $A$  et  $B$  tels que  $A^* \subset g(A)$ ,  $A < B$ ,  $h(B) \subset B^*$ . Posons enfin

$$(5) \quad \mathcal{S}^{**} = \{<(g, h) : <\in \mathcal{S}\},$$

$$(6) \quad \mathcal{S}^{s**} = \{<(g, h) : <\in \mathcal{S}^s\},$$

$$(7) \quad \mathcal{T}^{**} = \{<(g, h) : <\in \mathcal{T}\}$$

(cf. (16.61)).

D'après (16.40) et (16.65),  $\mathcal{S}^*$ ,  $\mathcal{T}^*$ ,  $\mathcal{S}^{**}$ ,  $\mathcal{S}^{s**}$  et  $\mathcal{T}^{**}$  sont des structures syntopogènes sur  $E^*$ . De plus, si l'on pose pour  $x \in E$

$$(8) \quad f(x) = \{x\} \in E_0^*$$

(cf. (16.33)), on a

$$(9) \quad \begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{S}^*) &= f^{-1}(\mathcal{S}^{**}) = \mathcal{S}, & f^{-1}(\mathcal{S}^{s**}) &= \mathcal{S}^s, \\ f^{-1}(\mathcal{T}^*) &= f^{-1}(\mathcal{T}^{**}) = \mathcal{T}. \end{aligned}$$

D'après (16.56) et (16.62), on a encore

$$(10) \quad \mathcal{S}^{**} \sim \mathcal{S}^*, \quad \mathcal{S}^{s**} \sim \mathcal{S}^{s**}, \quad \dots \quad ** = \dots$$

On déduit aisément de (10)

$$(11) \quad \mathcal{S}^{*st} = \mathcal{S}^{s**st} = \mathcal{S}^{s**st}$$

(cf. (8.36)). Nous démontrons encore l'égalité

$$(12) \quad \mathcal{S}^{s***t} = \mathcal{T}^*$$

d'où résulte

$$(13) \quad \mathcal{S}^{*st} = \mathcal{T}^*.$$

En effet, posons

$$\{<_1^*\} = \mathcal{S}^{s***t}, \quad \{<_2\} = \mathcal{T} = \mathcal{S}^{st}.$$

Si  $A^* <_1^* B^*$ , on a  $A^* <^{(g, h)} B^*$  pour un ordre  $<\in \mathcal{S}^s$ , donc

$$A^* \subset g(A), \quad A < B, \quad h(B) \subset B^*$$

pour deux ensembles convenables  $A$  et  $B$ , d'où  $A <_2 B$  et  $A^* <_2^{(g, h)} B^*$ . D'autre part, si  $A^* <_2^{(g, h)} B^*$ , on a

$$A^* \subset g(A), \quad A <_2 B, \quad h(B) \subset B^*,$$

par suite  $A < B$  pour un ordre convenable  $<\in \mathcal{S}^s$  et alors  $A^* <_{(g,h)} B^*, <_{(g,h)} \in \mathcal{S}^{s**}$ , donc  $A^* <_1^* B^*$ . En regard à la formule  $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^{**} = \{<_2^{(g,h)}\}$ , on obtient (12).

En résumant, on peut donc énoncer le lemme suivant:

**LEMME 1.** Soient  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène,  $\mathcal{T} = \mathcal{S}^{st}, E_0^*$  l'ensemble des grilles fondamentales de  $E$ ,  $E^* \supset E_0^*$  un ensemble de grilles comprimées dans  $[E, \mathcal{S}]$  et  $\mathcal{S}^*$  et  $\mathcal{T}^*$  soient définis suivant (1), (2) et (3). On a alors

$$\mathcal{S}^{st} = \mathcal{T}^*.$$

Supposons maintenant que  $E^* - E_0^*$  coïncide avec l'ensemble de tous les filtres comprimés, ronds et non-convergents par rapport à  $\mathcal{S}^s$  ou, ce qui veut dire la même chose, par rapport à  $\mathcal{T}$  (cf. (15.47), (16.42) et (15.13)). Dans ce cas, la structure syntopogène  $\mathcal{T}^*$  est doublment compact en vertu de (16.90). On en déduit d'après (13) et (15.95) que  $\mathcal{T}^*$  est également doublement compact. De plus,  $[E^*, \mathcal{S}^*]$  est relativement séparé par rapport à  $E_0^*$ ; en effet,  $[E^*, \mathcal{T}^*]$  est relativement séparé par rapport à  $E_0^*$  en vertu de (16.90), et il en est de même quant à  $[E^*, \mathcal{S}^*]$  en vertu de (16.47),<sup>1</sup> (13) et (14.4). Enfin,  $E_0^*$  est dense dans  $[E^*, \mathcal{T}^*]$  d'après (16.40), par conséquent dans  $[E^*, \mathcal{S}^{s*}]$  et dans  $[E^*, \mathcal{S}^*]$  (cf. (13) et (15.13)).

D'après ce qui précède, nous sommes amenés à introduire la définition suivante (cf. [1], p. 265):

**DÉFINITION 1.** Nous appelons *double compactification* d'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$  le triple  $(E', \mathcal{S}', f')$  d'un ensemble  $E'$ , d'une structure syntopogène doublement compacte  $\mathcal{S}'$  sur  $E'$  et d'un isomorphisme  $f'$  de  $[E, \mathcal{S}]$  sur  $[E'_0, \mathcal{S}'|E'_0]$ , où  $E'_0$  est une partie de  $E'$ , dense dans  $[E', \mathcal{S}'^s]$  et telle que  $[E', \mathcal{S}']$  est relativement séparé par rapport à  $E'_0$ .

En faisant usage de cette terminologie, nous avons donc démontré:

**THÉORÈME 1.** Soit  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène quelconque. Il existe alors des doubles compactifications  $(E', \mathcal{S}', f')$  de  $[E, \mathcal{S}]$ . Il en existe même telles que  $\mathcal{S}' = f'^{-1}(\mathcal{S}')$ ; un exemple en est fourni par le triple  $(E^*, \mathcal{S}^*, f)$  où  $E^*$  est l'ensemble de toutes les grilles fondamentales et de tous les filtres ronds, comprimés et non-convergents dans  $\mathcal{S}^s$ ,  $\mathcal{S}^*$  est défini par (1) et (2), et  $f$  désigne l'application (8).

On déduit aisément de (16.91) que la double compactification d'un espace syntopogène est déterminée de manière univoque, à isomorphie près:

**THÉORÈME 2.** Soient  $(E', \mathcal{S}', f')$  et  $(E'', \mathcal{S}'', f'')$  deux doubles compactifications d'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$ . Il existe une seule application  $(\mathcal{S}'^{st}, \mathcal{S}''^{st})$ -continue  $g$  de  $E'$  dans  $E''$  telle que  $g|f'(E) = f'' \circ f'^{-1}$ , et cette application  $g$  est un isomorphisme de  $[E', \mathcal{S}']$  sur  $[E'', \mathcal{S}'']$ .

Si  $\mathcal{S}$  est une structure syntopogène simple, sa double compactification étudiée ici coïncide évidemment avec celle dont l'existence et l'unicité essentielle ont été démontrées dans [1], (16.94) et (16.95). La proposition (16.96) se généralise de la manière suivante:

<sup>1</sup> Dans (16.47), on doit remplacer  $E_0^*$  par  $E_0$  (faute d'impression).

**THÉORÈME 3.** Si  $[E, \mathcal{S}]$  est un espace syntopogène symétrique, il existe une double compactification  $(E', \mathcal{S}', f')$  de  $[E, \mathcal{S}]$  telle que  $\mathcal{S}'$  soit symétrique et que  $f'^{-1}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$ .

Ceci se déduit du th. 1 et du théorème suivant:

**THÉORÈME 4.** Si  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une double compactification de l'espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$ , alors  $(E', \mathcal{S}'^s, f')$  est une double compactification de  $[E, \mathcal{S}^s]$ .

En effet,  $\mathcal{S}'$  étant doublement compact,  $\mathcal{S}'^s$  l'est aussi (cf. (15.95)),  $f'$  est un isomorphisme de  $[E, \mathcal{S}^s]$  sur  $[f'(E), \mathcal{S}'^s|f'(E)]$  (cf. (10.12) et (9.12)),  $\mathcal{S}'^s$  est relativement séparé par rapport à  $f'(E)$  (cf. (16.47)), enfin  $f'(E)$  est dense dans  $[E', \mathcal{S}'^{ss}] = [E', \mathcal{S}'^s]$ .

Le théorème suivant, analogue au précédent, met en évidence le rapport des doubles compactifications d'espaces syntopogènes quelconques aux doubles compactifications d'espaces syntopogènes simples:

**THÉORÈME 5.** Si  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une double compactification d'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$ , alors  $(E', \mathcal{S}'^t, f')$  est une double compactification de  $[E, \mathcal{S}^t]$ .

Pour le voir, on raisonne comme plus haut, eu égard à ce que  $f'(E)$  est dense dans  $[E', \mathcal{S}'^{ts}]$  en vertu de l'égalité  $\mathcal{S}'^{ts} = \mathcal{S}'^{st}$  (cf. (8.51)) et de (15.13).

On déduit aisément de (16.46) et (14.10):

**THÉORÈME 6.** Si  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une double compactification d'un espace syntopogène séparé, alors  $\mathcal{S}'$  est également séparé.

2. Le th. (16.102) de [1] montre que le problème de construire une double compactification d'un espace syntopogène simple se ramène à celui de construire une complétion d'une structure syntopogène (biparfait). Nous allons montrer que, réciproquement, la connaissance d'une double compactification d'un espace syntopogène (quelconque) permet de déterminer une complétion de cet espace. En effet, ceci est contenu dans le théorème suivant:

**THÉORÈME 7.** Si  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une double compactification d'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$ ,  $f'(E) = E'_0$  et  $E'_1$  désigne la fermeture de  $E'_0$  dans  $[E', \mathcal{S}'^{sb}]$ , alors  $(E'_1, \mathcal{S}'[E'_1], f')$  est une complétion de  $[E, \mathcal{S}]$ .

**DÉMONSTRATION.** La structure  $\mathcal{S}'^s$  étant compacte par définition, elle est complète (cf. (15.81)). Par conséquent,  $\mathcal{S}'^{sb}$  est également complète d'après (15.63), et  $\mathcal{S}'^{sb}|E'_1$  l'est aussi (cf. (15.67)). Donc

$$(\mathcal{S}'|E'_1)^{sb} = \mathcal{S}'^{sb}|E'_1$$

(cf. (9.12)) est une structure syntopogène complète ce qui veut dire que  $\mathcal{S}'|E'_1$  est doublement complète.  $E'_0$  est dense dans  $[E'_1 (\mathcal{S}'|E'_1)^{sb}]$  (cf. (15.28)) et  $f'$  est un isomorphisme de  $[E, \mathcal{S}]$  sur  $[E'_0, \mathcal{S}'|E'_0] = [E'_0, (\mathcal{S}'|E'_1)|E'_0]$  (cf. (9.15)). Enfin,  $[E'_1, \mathcal{S}'|E'_1]$  est évidemment relativement séparé par rapport à  $E'_0$  (cf. (6.22)).

D'autre part, cette construction fournit essentiellement toutes les complétions d'un espace syntopogène:

**THÉORÈME 8.** Soit  $(E', \mathcal{S}', f')$  une complétion d'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$ . Si  $(E'', \mathcal{S}'', f'')$  est une double compactification de  $[E', \mathcal{S}']$ , alors  $(E'', \mathcal{S}'', f'' \circ f')$  est une double compactification de  $[E, \mathcal{S}]$  et  $f''$  est un isomorphisme de  $[E', \mathcal{S}']$  sur la fermeture de  $f''(f'(E))$  dans  $[E'', \mathcal{S}''^{sb}]$ .

**DÉMONSTRATION.** Posons  $E'_0 = f'(E)$ ,  $E''_0 = f''(E'_0)$ ,  $E''_1 = f''(E')$ . L'application  $f'' \circ f'$  est un isomorphisme de  $[E, \mathcal{S}]$  sur  $[E''_0, \mathcal{S}''|E''_0]$  (cf. (10.18))

et (10.8)).  $E''_0$  est dense dans  $[E'', \mathcal{S}''^s]$ ; en effet,  $E'_0$  est dense dans  $[E', \mathcal{S}'^{sb}]$  et par conséquent dans  $[E', \mathcal{S}''^s]$  (cf. (15.13)), donc  $E''_0$  est dense dans  $[E'_1, \mathcal{S}''^s|E'_1]$ , de plus  $E''_1$  est dense dans  $[E'', \mathcal{S}''^s]$  d'où résulte

$$\mathcal{S}''^s[E'_0] = \mathcal{S}''^s[\mathcal{S}''^s[E''_0]] \supset \mathcal{S}''^s[E'_1] = E''$$

(cf. (15.27)).  $[E'', \mathcal{S}'']$  est relativement séparé par rapport à  $E''_1$  et  $[E'_1, \mathcal{S}''|E'_1]$  l'est par rapport à  $E''_0$  d'où s'ensuit aisément que  $[E'', \mathcal{S}'']$  est relativement séparé par rapport à  $E''_0$  (cf. (6.22)). Tout cela montre la validité de la première assertion.

Pour compléter la démonstration, il suffit de vérifier l'égalité

$$\mathcal{S}''^{sb}[E''_0] = E''_1.$$

Or,  $E'_0$  étant dense dans  $[E', \mathcal{S}'^{sb}]$  et  $f''$  étant un isomorphisme de  $[E', \mathcal{S}']$  sur  $[E'_1, \mathcal{S}''|E'_1]$ , on a évidemment

$$\mathcal{S}''^{sb}[E''_0] \supset E''_1,$$

tandis que l'inclusion

$$E''_1 \supset \mathcal{S}''^{sb}[E''_0]$$

résulte du fait que  $E''_1$  est fermé dans  $[E'', \mathcal{S}''^{sb}]$ , conséquence de (15.68) dont les hypothèses se vérifient parce que  $[E'', \mathcal{S}'']$  et par suite  $[E'', \mathcal{S}''^{sb}]$  est relativement séparé par rapport à  $E''_1$  ce qui entraîne que  $E''_1$  est fermé dans  $[E'', \mathcal{S}''^{sb}]$  en vertu du lemme suivant:

**LEMME 2.** *Un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$  est relativement séparé par rapport à  $A \subset E$  si et seulement si  $x \in E - A$  implique  $x <_0 x$  pour  $\{<_0\} = \mathcal{S}^{sb}$ .*

En effet, si  $[E, \mathcal{S}]$  est relativement séparé par rapport à  $A$ , alors  $x \in E - A, y \in E - x$  impliquent  $x < E - y$  ou  $x <^c E - y$  pour un ordre  $< \in \mathcal{S}$ , donc  $x <^s E - y$  et  $x <_1 E - y$  où  $\{<_1\} = \mathcal{S}^s$ , par suite  $x <_1 x$  puisque  $y \in E - x$  est quelconque; on a donc  $x <_0 x$ . Réciproquement, si  $x \in E - A$  implique  $x <_0 x$ , on a pour  $x \in E - A, y \in E - x$  la formule  $x <_0 E - y$ , donc  $x <^s E - y$  et  $x <_1 E - y$  (cf. (5.38)), par suite  $x <^s E - y$  pour un ordre  $< \in \mathcal{S}$ , c'est-à-dire ou bien  $x < E - y$ , ou bien  $x <^c E - y$  (cf. (3.6)), de sorte que  $[E, \mathcal{S}]$  est relativement séparé par rapport à  $A$ .

3. Considérons un espace uniforme  $[E, \mathcal{U}]$ , et soit  $\mathcal{S}$  la structure syntopogène biparfaite et symétrique associée à  $\mathcal{U}$ . D'après th. 3, il existe une double compactification  $(E', \mathcal{S}', f')$  de  $[E, \mathcal{S}]$  telle que  $\mathcal{S}'$  soit une structure syntopogène symétrique (satisfaisant même à la condition  $f'^{-1}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$ ), et en vertu de th. 5,  $(E', \mathcal{S}'', f')$  est une double compactification de  $[E, \mathcal{S}']$ , c'est-à-dire de l'espace topogène symétrique associée à l'espace de proximité déduit de  $[E, \mathcal{U}]$ . Cependant, il serait erroné de croire que  $\mathcal{S}'$  soit associé à une structure uniforme; en effet, en général,  $\mathcal{S}'$  ne sera pas biparfait. C'est pourquoi on peut poser le problème de déterminer tous les espaces syntopogènes qui admettent une double compactification  $(E', \mathcal{S}', f')$  où  $\mathcal{S}'$  est une structure syntopogène biparfaite.

Cette question se résout complètement par le théorème suivant:

**THÉORÈME 9.** *Pour qu'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$  possède une double compactification  $(E', \mathcal{S}', f')$  telle que  $\mathcal{S}'$  soit biparfait, il faut et il suffit que  $\mathcal{S}$  soit totalement borné.*

La démonstration se compose de quelques lemmes.

**LEMME 3.** Si  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une double compactification de  $[E, \mathcal{S}]$  et  $\mathcal{S}'^b = \mathcal{S}'$ , alors  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une complémentation de  $[E, \mathcal{S}]$  et  $\mathcal{S}$  est totalement borné.

En effet, il suffit de montrer que  $f'(E)$  est dense dans  $[E', \mathcal{S}'^b]$  et d'appliquer th. 7. Or,  $f'(E)$  est dense dans  $[E', \mathcal{S}'^s]$ , donc dans  $[E', \mathcal{S}'^sp]$  (cf. (15.13)) et  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'^b$  implique

$$\mathcal{S}'^sp = \mathcal{S}'^bsp = \mathcal{S}'^b$$

(cf. (5.29)). Ainsi  $(E', \mathcal{S}', f')$  est une complémentation de  $[E, \mathcal{S}]$  et, d'après (19.28),  $\mathcal{S}$  est totalement borné.

**LEMME 4.** Si  $[E, \mathcal{S}]$  est un espace syntopogène totalement borné, alors chaque complémentation  $(E', \mathcal{S}', f')$  de  $[E, \mathcal{S}]$  est une double compactification de  $[E, \mathcal{S}]$ .

En effet d'après (19.28),  $\mathcal{S}'^b$  est compact, par conséquent  $\mathcal{S}'^s$  est également compact (cf. (15.79)) et  $\mathcal{S}'$  est doublement compact (cf. (15.95) et (15.78)). De plus,  $f'(E)$  étant dense dans  $[E', \mathcal{S}'^b]$ , il est dense dans  $[E', \mathcal{S}'^s]$  (cf. (15.13)).

**LEMME 5.** Un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$  totalement borné possède une double compactification  $(E', \mathcal{S}', f')$  telle que  $\mathcal{S}'^b = \mathcal{S}'$ . Si, en outre,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^b$ , on peut choisir  $\mathcal{S}'$  de la manière qu'on ait

$$(14) \quad f'^{-1}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}.$$

Si  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^b$ , on peut assujettir  $\mathcal{S}'$  aux conditions (14) et  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'^b$ .

En effet,  $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}^b$  d'après (19.13). Soit  $(E', \mathcal{S}', f')$  une complémentation de  $[E, \mathcal{S}^b]$  telle que  $f'^{-1}(\mathcal{S}') = \mathcal{S}^b$  et  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'^b$  (cf. (16.74)). Si  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^b$ , choisissons  $\mathcal{S}'$  de la manière qu'on ait  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'^b$  (cf. (16.74)). D'après lemme 4, on en déduit l'énoncé.

Les lemmes 3 et 5 fournissent th. 9. Il en résulte encore:

**THÉORÈME 10.** Si  $[E, \mathcal{S}]$  est un espace syntopogène totalement borné, alors les complémentations de  $[E, \mathcal{S}]$  coïncident avec les doubles compactifications de  $[E, \mathcal{S}]$ .

En effet, toute complémentation de  $[E, \mathcal{S}]$  est une double compactification d'après lemme 4. D'autre part, une double compactification  $(E', \mathcal{S}', f')$  de  $[E, \mathcal{S}]$  telle que  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^b$  est une complémentation en vertu de lemme 3, et il existe des doubles compactifications de cette sorte d'après lemme 5. Or, si  $(E'', \mathcal{S}'', f'')$  est une autre double compactification de  $[E, \mathcal{S}]$ , il existe en vertu de th. 2 un isomorphisme  $g$  de  $[E', \mathcal{S}']$  sur  $[E'', \mathcal{S}'']$  tel que  $g \circ f'(E) = f'' \circ f'^{-1}$  d'où résulte évidemment que  $(E'', \mathcal{S}'', f'')$  est une complémentation de  $[E, \mathcal{S}]$  (cf. (15.62) et (15.18)).

4. Les questions concernant les structures fonctionnelles se généralisent sans aucune difficulté. On démontre d'abord de la même manière que (16.99):

**LEMME 6.** Soient  $(E', \mathcal{S}', f')$  une double compactification d'un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$  et  $\mathcal{S}'_1$  une structure syntopogène sur  $E'$  telle que  $\mathcal{S}'_1 \leq \mathcal{S}'$ ,  $\mathcal{S}'_1|f'(E) \sim \mathcal{S}'|f'(E)$ . Alors  $(E', \mathcal{S}'_1, f')$  est également une double compactification de  $[E, \mathcal{S}]$  et  $\mathcal{S}'_1 \sim \mathcal{S}'$ .

La combinaison des démonstrations de (16.84) et (16.91) fournit:

**LEMME 7.** Soient  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène,  $[E', \mathcal{S}']$  un espace syntopogène doublement compact,  $E_0 \subset E$  dense dans  $[E, \mathcal{S}^s]$  et  $\varphi_0$  un ensemble  $(\mathcal{S}|E_0)$ -continu d'applications de  $E_0$  dans  $E'$ . Alors chaque application  $f_0 \in \varphi_0$  possède un prolongement sur  $E$  de la manière que ces prolongements constituent un ensemble  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ -continu.

En combinant les démonstrations de (16.85) et (16.100), on déduit des lemmes 6 et 7:

**THÉORÈME 11.** Soit  $\Phi$  une structure fonctionnelle sur un ensemble  $E$ . Il existe alors une structure fonctionnelle  $\Phi'$  sur un ensemble  $E'$  et une application biunivoque  $h$  de  $E$  sur une partie  $E'_n \subset E'$  telles que  $(E', \mathcal{S}_{\Phi'}, h)$  soit une double compactification de  $[E, \mathcal{S}_{\Phi}]$ ; les familles fonctionnelles  $\varphi \in \Phi$  sont en correspondance biunivoque aux familles fonctionnelles  $\varphi' \in \Phi'$ , ainsi que les fonctions  $f' \in \varphi'$  aux fonctions  $f \in \varphi$ , où  $\varphi'$  correspond à  $\varphi$ . Pour la fonction  $f$  correspondant à  $f'$ , on a  $f = f' \circ h$  et par suite

$$\rightarrow_{\Phi} = h^{-1}(\mathcal{S}_{\Phi'}).$$

Si  $\Phi$  est une structure ordonnatrice, en particulier symétrique ou simple, alors on peut assujettir  $\Phi'$  à la même condition.

On peut encore ajouter comme conséquence de th. 2 et (16.90):

**THÉORÈME 12.** Si  $\Phi$  est une structure fonctionnelle sur  $E$  et  $(E', \mathcal{S}_{\Phi'}, h')$  et  $(E'', \mathcal{S}_{\Phi''}, h'')$  deux doubles compactifications de  $[E, \mathcal{S}_{\Phi}]$  du type décrit dans th. 11, alors il existe une application  $g$  ( $\mathcal{S}_{\Phi'}, \mathcal{S}_{\Phi''}$ )-continue et une seule satisfaisant à la condition

$$g|h'(E) = h'' \circ h'^{-1}.$$

Cette application  $g$  est un isomorphisme de  $[E', \mathcal{S}_{\Phi'}]$  sur  $[E'', \mathcal{S}_{\Phi''}]$  et les familles fonctionnelles  $\varphi' \in \Phi'$  et  $\varphi'' \in \Phi''$  sont en correspondance biunivoque, ainsi que les fonctions  $f' \in \varphi'$  et  $f'' \in \varphi''$  des familles fonctionnelles correspondantes, notamment  $f' = f'' \circ g$ . Si  $\Phi'$  est une structure ordonnatrice, en particulier symétrique ou simple, alors  $\Phi''$  l'est également.

5. Afin de pouvoir généraliser la théorie des compactifications de topologies uniformisables ([1], pp. 268 à 270), nous avons besoin d'une généralisation de (15.89).

**LEMME 8.** Soient  $\mathcal{S}$  une structure syntopogène compacte et  $\mathcal{S}'$  une structure syntopogène symétrique sur un ensemble  $E$  et supposons qu'on a  $\mathcal{S}' \ll \mathcal{S}^p$ . Alors  $\mathcal{S}' \ll \mathcal{S}$ .

**DÉMONSTRATION.** Étant donné un ordre  $< \in \mathcal{S}'$ , posons  $<_1 \in \mathcal{S}$ ,  $<_1 \subset <_2^2$  (cf. (S<sub>2</sub>)),  $<_1 \subset <_1^p$ ,  $<_1 \subset <_1^2$ ,  $< \in \mathcal{S}$ . Si  $A <_1 B$ , il existe un ensemble  $C$  tel que  $A <_1 C <_1 B$ . Pour  $x \in C$ , on a  $x <_1 B$  (cf. (4.7)) de sorte qu'il existe un ensemble  $V_x$  tel que  $x < V_x < B$ . D'autre part, si  $x \in E - C$ , on a  $x <_1 E - A$  en conséquence de la symétrie de  $\mathcal{S}'$ , donc  $x <_1^p E - A$ ,  $x <_1 E - A$ .  $\mathcal{S}$  étant compact, un nombre fini des ensembles  $V_x$  et  $E - A$  recouvrent l'espace  $E$  (cf. (15.77)), donc

$$A \subset \bigcup_1^n V_{x_i} \quad (x_i \in C).$$

Comme  $V_{x_i} < B$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on a donc  $A < B$ , c'est-à-dire  $< \subset <$ .

La généralisation mentionnée de (15.89) est la suivante:

**THÉORÈME 13.** Soient  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène compact,  $[E', \mathcal{S}']$  un espace syntopogène symétrique et  $f$  une application  $(\mathcal{S}^p, \mathcal{S}'^p)$ -continue. Alors  $f$  est  $(\mathcal{S}', \mathcal{S}')$ -continue.

En effet,  $f^{-1}(\mathcal{S}')$  est une structure syntopogène symétrique (cf. (9.7)) et  $f^{-1}(\mathcal{S}') \ll f^{-1}(\mathcal{S}')^p = f^{-1}(\mathcal{S}'^p) \ll \mathcal{S}^p$ . D'après lemme 8, on a donc  $f^{-1}(\mathcal{S}') \ll \mathcal{S}$ .

Considérons maintenant un espace syntopogène  $[E, \mathcal{S}]$  et supposons qu'il existe une structure syntopogène symétrique  $\mathcal{S}_1$  telle que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^p$ . Dans ce cas, nous dirons que la structure  $\mathcal{S}$  (ou l'espace  $[E, \mathcal{S}]$ ) est symétrisable:

**DÉFINITION 2.** Une structure syntopogène (parfaite)  $\mathcal{S}$  est dite symétrisable s'il existe une structure syntopogène symétrique  $\mathcal{S}_1$  telle que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^p$ .

Une structure topogène est symétrisable si et seulement si elle est une topologie uniformisable. Toute syntopologie symétrique est symétrisable.

**DÉFINITION 3.** Nous appelons compactification d'un espace syntopogène (parfait) symétrisable  $[E, \mathcal{S}]$  le triple  $(E', \mathcal{S}', f')$  d'un ensemble  $E'$ , d'une structure syntopogène symétrisable, parfaite et compacte  $\mathcal{S}'$  sur  $E'$  et d'une application  $f'$  de  $E$  dans  $E'$  telle que  $f'$  soit un isomorphisme de  $[E, \mathcal{S}]$  sur  $[f'(E), \mathcal{S}'|f'(E)]$ ,  $f'(E)$  soit dense dans  $[E', \mathcal{S}']$  et  $[E', \mathcal{S}']$  soit relativement séparé par rapport à  $f'(E)$ .

**DÉFINITION 4.** Si  $(E', \mathcal{S}', f')$  et  $(E'', \mathcal{S}'', f'')$  sont deux compactifications d'un espace syntopogène symétrisable  $[E, \mathcal{S}]$ , nous disons que la première est plus fine que la seconde si il existe une application  $g$  ( $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ )-continue de  $E'$  dans  $E''$  telle que  $g|f'(E) = f'' \circ f'^{-1}$ ; nous disons que ces deux compactifications sont équivalentes si il existe un isomorphisme  $g$  de  $[E', \mathcal{S}']$  sur  $[E'', \mathcal{S}'']$  satisfaisant à la même égalité.

On peut alors repérer la démonstration de (16.104) en remplaçant (16.96) par th. 3 et (15.89) par th. 13 et aboutir au théorème suivant:

**THÉORÈME 14.** Soit  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène symétrisable. Il existe une correspondance biunivoque entre les classes de structures syntopogènes symétriques équivalentes  $\mathcal{S}_1$  telles que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^p$  et les classes de compactifications équivalentes de  $[E, \mathcal{S}]$ . Si  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^p = \mathcal{S}_2^p$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont des structures syntopogènes symétriques et  $(E'_1, \mathcal{S}'_1, f'_1)$  et  $(E'_2, \mathcal{S}'_2, f'_2)$  sont des compactifications appartenant aux classes qui correspondent aux classes contenant  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  respectivement, alors  $(E'_2, \mathcal{S}'_2, f'_2)$  est plus fine que  $(E'_1, \mathcal{S}'_1, f'_1)$  si et seulement si  $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$ . Deux compactifications sont équivalentes si et seulement si chacune d'elles est plus fine que l'autre.

Pour obtenir les compactifications correspondant à la classe d'équivalence contenant la structure syntopogène symétrique  $\mathcal{S}_1$  telle que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^p$ , on considère les doubles compactifications  $(E', \mathcal{S}'_1, f')$  de  $[E, \mathcal{S}_1]$  telles que  $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{S}_1$  et les compactifications cherchées de  $[E, \mathcal{S}]$  (les unes équivalentes aux autres) sont fournies par la formule  $(E', \mathcal{S}'_1^p, f')$ .

Dans le th. 14, il s'agit évidemment d'une généralisation du théorème de compactification de Yu. M. SMIRNOV. Nous ajoutons encore une généralisation du théorème de compactification de M. H. STONE – E. ČECH.

Dans ce but, nous avons besoin de la généralisation suivante de la première partie de (12.63):

**LEMME 9.** Si  $\mathcal{S}$  est une structure syntopogène symétrisable, il existe une structure syntopogène symétrique  $\mathcal{S}_0$  telle que  $\mathcal{S}_0^p < \mathcal{S}$  et plus fine que toutes les structures syntopogènes symétriques  $\mathcal{S}_1$  satisfaisant à la condition  $\mathcal{S}_1^p < \mathcal{S}$ .

Pour le voir, il suffit de poser

$$\mathcal{S}_0 = \vee \{\mathcal{S}_1 : \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1^p, \mathcal{S}_1^p < \mathcal{S}\}.$$

En effet,  $\mathcal{S}_0^s = \mathcal{S}_0$  d'après (8.102), on a évidemment  $\mathcal{S}_0 < \mathcal{S}$  et par conséquent  $\mathcal{S}_0^p < \mathcal{S}$ , enfin  $\mathcal{S}_1^p = \mathcal{S}$  étant valable pour au moins une structure syntopogène symétrique  $\mathcal{S}_1$ , on a aussi  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^p < \mathcal{S}_0^p$ .

On en déduit similairement à la démonstration de (12.64):

**LEMME 10.** Soient  $[E, \mathcal{S}]$  et  $[E', \mathcal{S}']$  deux espaces syntopogènes symétrisables,  $\mathcal{S}_0$  la plus fine structure syntopogène symétrique telle que  $\mathcal{S}_0^p < \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'_0$  une structure syntopogène symétrique quelconque telle que  $\mathcal{S}'_0^p < \mathcal{S}'$ . Alors toute application,  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ -continue est  $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}'_0)$ -continue.

Ceci étant établi, on peut répéter la démonstration de (16.106) en remplaçant (12.64) par lemme 10 et (15.89) par th. 13. On obtient:

**THÉORÈME 15.** Soient  $[E, \mathcal{S}]$  un espace syntopogène symétrisable et  $(E_0, \mathcal{S}_0, f_0)$  la plus fine compactification de  $[E, \mathcal{S}]$ . Si  $g$  est une application  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ -continue de  $E$  dans un espace syntopogène symétrisable, compact et séparé  $[E', \mathcal{S}']$ , alors  $g \circ f_0^{-1}$  admet un prolongement  $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}')$ -continu et un seul.

### Littérature

[1] Á. CSÁSZÁR, *Grundlagen der allgemeinen Topologie* (Budapest – Leipzig, 1963).



## NOTE ON ORDERABLE GROUPS

By

L. FUCHS and E. SĄSIADA

Department of Algebra, Eötvös Loránd University, Budapest and  
Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences, Toruń

(Received March 10, 1964)

DEDICATED TO RÓZSA PÉTER ON HER 60TH BIRTHDAY

The aim of this note is to give some comments on groups which can be ordered.<sup>1</sup>

If in a group  $G$  a full order relation  $\leq$  is defined such that  $a \leq b$  implies  $ca \leq cb$  and  $ac \leq bc$  for all  $a, b, c$  in  $G$ , then  $G$  is said to be a fully ordered group. If  $G$  is an abstract group in which a full order relation can be introduced making  $G$  into a fully ordered group, then  $G$  is called an  $O$ -group. If in  $G$  every partial order relation can be extended to a full order relation then  $G$  is said to be an  $O^*$ -group. Trivially, every  $O^*$ -group is an  $O$ -group, and it has been an open question whether or not  $O$ -groups are necessarily  $O^*$ -groups. We shall show that the answer to this question is in the negative. Namely we prove that free groups  $F_n$  of rank  $n \geq 3$  (which are known to be  $O$ -groups) are not  $O^*$ -groups.

Next we exhibit an example of an  $O^*$ -group which admits exactly four full orders. Then we show that the wreath product of an  $O$ -group by an  $O$ -group is again an  $O$ -group.

1. Let  $F_n$  denote the free group of rank  $n$  where  $n$  is a natural integer. It is well known that the groups  $F_n$  are  $O$ -groups (see e. g. [1]). In order to show the existence of  $O$ -groups which are not  $O^*$ -groups, we verify:

**THEOREM 1.** *The free group  $F_n$  of rank  $n \geq 3$  is not an  $O^*$ -group.*

Recall that by a result of M. OHNISHI, a group  $G$  is an  $O^*$ -group if and only if it satisfies: (i) if  $b, c \in S(a)$ , then  $S(b)$  and  $S(c)$  have a non-void intersection, (ii)  $e \in S(a)$  implies  $a = e =$  the neutral element of  $G$ . Here we have denoted by  $S(a)$  the normal subsemigroup of  $G$  generated by  $a \in G$ , i. e. the set of products of conjugates of  $a$ . Since the factor group of any group satisfying condition (i) again satisfies the same condition, for the proof of Theorem 1 it will suffice to show that the group

$$G = \{x\} * \{y\} * \{z\}$$

which is the free product of an infinite cyclic group  $\{x\}$  and two cyclic groups  $\{y\}, \{z\}$  of order 2, does not satisfy condition (i).

<sup>1</sup> For the terminology and basic facts on ordered groups we refer to [1].

For the elements  $g \in G$ , define

$\nu_y(g)$  = the number of all  $x^k$  with  $k > 0$  (in the reduced form of  $g$ ) situated between two  $y$ 's minus the number of all  $x^k$  with  $k < 0$  situated between two  $y$ 's;

$\nu_z(g)$  = the same number defined by  $z$  instead of  $y$ ;

and we put

$$\nu(g) = \nu_y(g) - \nu_z(g).$$

For instance, if  $g = yx^{-2}yzxyx^3yxz^{-1}zxyzx^2y$  then  $\nu_y(g) = 2 - 1 = 1$ ,  $\nu_z(g) = 0 - 1 = -1$ , and  $\nu(g) = 2$ . It follows at once that

$$(1) \quad \nu(g^{-1}) = -\nu(g) \quad \text{for every } g \in G.$$

The main property of the function  $\nu(g)$  is the following:

$$(2) \quad \nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) + \eta \quad \text{with } \eta = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1,$$

for all  $g, h \in G$ . Denote by  $l(g)$  (the length of  $g$ ) the number of letters in the reduced form of  $g$ . (In the example above we have e. g.  $l(g) = 17$ .) Then (2) is obvious whenever either  $l(g) \leq 1$  or  $l(h) \leq 1$ , hence we may restrict ourselves to the case when both  $l(g) \geq 2$  and  $l(h) \geq 2$ . Since then

$$g = g_1yx^k \text{ or } g = g_1zx^k \text{ with } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

and

$$h = x^lyh_1 \text{ or } h = x^lzhh_1 \text{ with } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

for some  $g_1, h_1 \in G$  (so that the last letter of  $g_1$  and the first letter of  $h_1$  differ from  $y$  in the first and from  $z$  in the second alternative), we have

LEMMA. If  $l(gh) \leq l(g) + l(h) - 1$ , then

- I.  $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) - 1$  if and only if either  $g = g_1yx^k$  and  $h = x^lyh_1$  with  $k+l < 0$  or  $g = g_1zx^k$  and  $h = x^lzhh_1$  with  $k+l > 0$ ;
- II.  $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h)$  if and only if either  $g = g_1yx^k$  and  $h = x^lzhh_1$  or  $g = g_1zx^k$  and  $h = x^lyh_1$ ;
- III.  $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) + 1$  if and only if either  $g = g_1yx^k$  and  $h = x^lyh_1$  with  $k+l > 0$  or  $g = g_1zx^k$  and  $h = x^lzhh_1$  with  $k+l < 0$ .

The proof is immediate and may be left to the reader.

In the cases covered by the Lemma, (2) obviously holds. Hence it is sufficient to consider the cases when  $l(gh) < l(g) + l(h) - 1$ . In these cases we may write

$$g = g_1b \quad \text{and} \quad h = b^{-1}h_1$$

where  $b, b^{-1}$  are the maximal parts of  $g, h$  which cancel in the product  $gh$ , i. e.,  $g_1h_1$  is a product for which  $\nu(g_1h_1) = \nu(g_1) + \nu(h_1) + \eta$  with  $\eta = 0, -1$  or  $1$ . We distinguish three cases.

Case 1.  $\nu(g_1h_1) = \nu(g_1) + \nu(h_1) - 1$ . Then, by the Lemma, we have two possibilities which can be dealt with analogously. For definiteness, let  $g_1 = g_2yx^k$  and  $h_1 = x^lyh_2$  with  $k+l < 0$ . Then the only case in which  $\nu(g) \neq \nu(g_1) + \nu(b)$  [and  $\nu(h) \neq \nu(b^{-1}) + \nu(h_1)$ ] is when  $k \neq 0, l \neq 0$  and  $b = yb_1$ . Now  $\nu(g) = \nu(g_1) + \nu(b) \pm 1$  and  $\nu(h) = \nu(b^{-1}) + \nu(h_1) \pm 1$  where  $1$  or  $-1$  stands according as  $k$  (or  $l$ ) is  $> 0$  or  $< 0$ . Because of  $k+l < 0$  one of  $k, l$  is certainly  $< 0$ , hence

$$\begin{aligned}\nu(gh) &= \nu(g_1h_1) = \nu(g_1) + \nu(h_1) - 1 = \nu(g) - \nu(b) + \nu(h) - \nu(b^{-1}) + \\ &\quad + 1 \pm 1 - 1 = \nu(g) + \nu(h) \pm 1.\end{aligned}$$

*Case 2.*  $\nu(g_1h_1) = \nu(g_1) + \nu(h_1) + 1$ . This case can be disposed of analogously by making use of the Lemma.

*Case 3.*  $\nu(g_1h_1) = \nu(g_1) + \nu(h_1)$ . We may assume that  $g_1 = g_2yx^k$  and  $h_1 = x^lzh_2$ . Then the first letter of  $b$  is either  $y$  or  $z$  if  $k \neq 0$  or  $l \neq 0$ , and is  $x^m$  ( $m \neq 0$ ) if  $k = l = 0$ . If the first letter of  $b$  is  $y$ , then  $\nu(g) = \nu(g_1) + \nu(b) \pm 1$ ,  $\nu(h) = \nu(b^{-1}) + \nu(h_1)$ , so that  $\nu(gh) = \nu(g_1h_1) = \nu(g) + \nu(h) \pm 1$ . The same holds if  $z$  is the first letter of  $b$ . If  $g_1 = g_2y$ ,  $h_1 = zh_2$  and  $b = x^mb_1$ , then  $\nu(g) = \nu(g_1) + \nu(b) \pm 1$ ,  $\nu(h) = \nu(b^{-1}) + \nu(h_1)$  or  $\nu(g) = \nu(g_1) + \nu(b)$ ,  $\nu(h) = \nu(b^{-1}) + \nu(h_1) \pm 1$  according as the first letter of  $b_1$  is  $y$  or  $z$ , while if  $b = x^m$  then  $\nu(g) = \nu(g_1) + \nu(b)$ ,  $\nu(h) = \nu(b^{-1}) + \nu(h_1)$ . In any case,  $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) + \eta$  with  $\eta = 0$ , 1 or  $-1$ .

This completes the proof of (2).

The next step is to verify that

$$(3) \quad \nu(g^{-1}xyxyg) = 1 \text{ for every } g \in G.$$

This is obvious if  $g = e$  or if the first letter of  $g$  is  $z$ . If the first letter of  $g$  is  $y$ , then we may think of using  $yxyx$  instead of  $xyxy$ , so that the only case of interest is when  $g = x^kg_1$  with  $k \neq 0$  and  $g_1 \neq e$ . If  $g_1$  begins with  $z$ , then (3) is trivial. If  $g = xyg_2$ , then  $g^{-1}xyxyg = g_2^{-1}xyxyg_2$  and we have a shorter word  $g_2$ , so that the case  $g = x^kyg_2$  ( $k \neq 0, 1$ ) remains. Now the reduced form is  $g_2^{-1}yx^{-k+1}xyyx^kyg_2$  with  $g_2$  written out explicitly, and for this element  $\nu$  equals 1.

Similarly we have

$$(4) \quad \nu(g^{-1}xzxzg) = -1 \text{ for every } g \in G.$$

Now (2) and (3) imply that for conjugates  $u_i$  of  $xyxy$  we have

$$\nu(u_1u_2 \dots u_n) \equiv \nu(u_1) + \nu(u_2) + \dots + \nu(u_n) - (n-1) = 1,$$

while for conjugates  $v_i$  of  $xzxz$  we have, in view of (2) and (4),

$$\nu(v_1v_2 \dots v_m) \equiv \nu(v_1) + \nu(v_2) + \dots + \nu(v_m) + (m-1) = -1.$$

Consequently, the semigroups  $S(xyxy)$  and  $S(xzxz)$  do not intersect, though  $xyxy$  and  $xzxz$  are in  $S(x)$ . Thus  $G$  violates (i), and this completes the proof.

2. It is of some interest to find examples for groups which admit but a finite number of different full orders. The infinite cyclic group, and more generally, every non-trivial subgroup of the additive group of the rational numbers is an  $O$ -group with exactly two full orders. The torsion-free abelian groups of rank  $\geq 2$  have already continuously many different full orders, so the groups with a finite number of full orders must be non-commutative, except for the mentioned cases.

**THEOREM 2.** *The group*

$$G = \{a, b \mid ba = ab^2\}$$

*is an  $O^*$ -group with exactly four different full orders.*

In this group  $G$  we have, for every natural integer  $k$ ,  $(a^kba^{-k})^2 = a^{k-1}ba^{-(k-1)}$  and if we define

$$b^{2^{-k}} = a^k b a^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(which obviously holds for  $k = 0, -1, -2, \dots$ ), then the powers of  $b$  to dyadic rational exponents have a meaning and for every dyadic rational  $\alpha$

$$a^{-\alpha} b^\alpha a^\alpha = b^{\alpha \cdot 2^k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Hence the elements of  $G$  may be written in the form  $a^n b^\alpha$  with integers  $n$  and dyadic rationals  $\alpha$ , and it follows that  $a^n b^\alpha = a^m b^\beta$  if and only if  $n = m$  and  $\alpha = \beta$ . The dyadic powers of  $b$  form a normal subgroup  $N$  of  $G$  such that the factor group  $G/N$  is an infinite cyclic group (generated by  $aN$ ). It is straightforward to check that if we take any full orders on  $N$  and on  $G/N$ , then the lexicographic extension leads to a full order on  $G$ . In order to show that  $G$  admits no full order other than these four ones, observe that because of

$$b^{-\beta} a^{-m} (a^n b^\alpha) a^m b^\beta = a^n b^{-\beta 2^n + \alpha 2^m + \beta}$$

any two elements of the form  $a^n b^\alpha$  with dyadic rationals  $\alpha$  are conjugate. Thus in any full order of  $G$ , either  $a > b^\alpha$  for all  $\alpha$  or  $a < b^\alpha$  for all  $\alpha$ . Therefore  $N$  is always convex and there exist no more than four full orders corresponding to the cases  $e < b < a$ ,  $e < b^{-1} < a$ ,  $e < b < a^{-1}$ ,  $e < b^{-1} < a^{-1}$ .

We have to show that our group  $G$  is an  $O^*$ -group. Let  $y$  and  $z$  be products of conjugates of some  $x \in G$ ,  $x = a^n b^\alpha$ . By raising  $y$  and  $z$  to appropriate powers, if necessary, we may assume that the same numbers of conjugates of  $x$  are multiplied to obtain  $y$  and  $z$ . Then  $y = a^{kn} b^\beta$  and  $z = a^{kn} b^\gamma$ . For an arbitrary positive integer  $t$  we have

$$y^t = a^{knt} b^{\beta T} \quad \text{where} \quad T = 1 + 2^{kn} + \dots + 2^{(t-1)kn}$$

and

$$z^{t-1} b^{-\delta} z b^\delta = a^{knt} b^{\gamma T + \delta(1 - 2^{kn})}$$

Hence if we choose  $t = 2^{kn} - 1$ , then  $T$  is divisible by  $t$ , and a dyadic  $\delta$  can be chosen so that  $\beta T = \gamma T + \delta(1 - 2^{kn})$ . This completes the proof.

### 3. Now we turn our attention to the wreath product of two $O$ -groups.

Recall the definition of wreath product  $G \wr H$  of two groups  $G$  and  $H$ . For every  $h \in H$  take an isomorphic copy  $G_h$  of  $G$  with a fixed isomorphism  $\eta_h : g \rightarrow g_h$  of  $G$  onto  $G_h$ . Form the direct product  $\prod G_h$  and define  $G \wr H$  as the splitting extension of  $\prod G_h$  by  $H$  subject to the rule

$$h^{-1} g_{h'} h = g_{h',h} \quad \text{for all } h, h' \in H.$$

**THEOREM 3.** *The wreath product of two  $O$ -groups is again an  $O$ -group.*

Let  $G$  and  $H$  be  $O$ -groups, and define arbitrarily a full order  $P$  on  $G$  and one  $Q$  on  $H$ . Then  $P$  gives rise through  $\eta_h$  a full order  $P_h$  on  $G_h$  for each  $h \in H$ . The direct product  $\prod G_h$  can lexicographically be ordered if the index set is ordered as prescribed by  $Q$ . It follows readily that the arising full order of the

direct product  $\prod G_h$  is left invariant under conjugation by elements of  $H$ . If the order relation of  $G \wr H$  is defined by taking this full order of  $\prod G_h$  and then extending lexicographically by  $H$ , then  $G \wr H$  becomes a fully ordered group. Consequently,  $G \wr H$  is again an  $O$ -group if so are  $G$  and  $H$ .

### Reference

- [1] L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press (Oxford – London – New York – Paris), 1963.



# ÜBER FLUCHTPUNKTE EINER 2-ZELLE

Von

V. SCHARNITZKY und J. SZENTHE

Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest und  
Lehrstuhl für Darstellende Geometrie der Technischen Universität, Budapest  
*(Eingegangen am 14. März 1964.)*

Im Folgenden zeigen wir, daß die Anzahl der Fluchtpunkte in einer 2-dimensionalen Zelle — unter gewissen naheliegenden Bedingungen — mindestens 3 ist. Zuerst geben wir einen Überblick der Vorkenntnisse und der Voreignisse.

Sei  $R$  ein metrischer Raum und bezeichne  $\varrho(x, y)$  den Abstand der Punkte  $x, y$  von  $R$ . Sind  $a, b, c$  Punkte von  $R$  und besteht  $\varrho(a, c) + \varrho(c, b) = \varrho(a, b)$ , dann sagt man, daß  $c$  ein *Zwischenpunkt*<sup>1</sup> von  $a$  und  $b$  ist. Der Raum  $R$  heißt *konvex*<sup>2</sup>, falls je zwei verschiedene Punkte des Raumes einen von diesen beiden Punkten verschiedenen Zwischenpunkt haben. Ist  $\langle\alpha, \beta\rangle$  eine abgeschlossene Strecke der Zahlengeraden und  $\varphi$  eine Abbildung dieser Strecke in  $R$ , für die

$$\varrho(\varphi(\tau'), \varphi(\tau'')) = |\tau' - \tau''| \text{ bei allen } \tau', \tau'' \in \langle\alpha, \beta\rangle$$

gilt, dann nennt man die Menge  $\varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$  einen *geodätischen Bogen*<sup>3</sup>. Mit anderen Worten ist der geodätische Bogen ein isometrisches Bild der Strecke  $\langle\alpha, \beta\rangle$ .

Ist  $R$  ein kompakter und konvexer metrischer Raum, sind ferner  $x, y$  verschiedene Punkte von  $R$ , dann existiert ein geodätischer Bogen  $S$ , der diese beiden Punkte verbindet<sup>4</sup>. Auf Grund dieses Satzes, läßt sich der Begriff der Konvexität im Falle eines kompakten Raumes mit Hilfe des geodätischen Bogens folgender Weise erklären: Der kompakte metrische Raum  $R$  heißt konvex, wenn je zwei seiner Punkte mit einem geodätischen Bogen verbunden sind.

Der kompakte metrische Raum  $R$  wird *stark konvex*<sup>5</sup> genannt, falls zwei beliebige Punkte von  $R$  durch einen einzigen geodätischen Bogen verbindbar sind. In einem stark konvexen metrischen Raum heißt der einzige geodätische Bogen, der die verschiedenen Punkte  $a, b$  des Raumes verbindet, die durch die Punkte  $a, b$  bestimmte *Strecke*<sup>6</sup> des Raumes.

<sup>1</sup> [3], 77.

<sup>2</sup> [3], 82.

<sup>3</sup> [3], 89.

<sup>4</sup> [3], 89.

<sup>5</sup> [1], 44.

<sup>6</sup> [3], 105.

Ein Punkt des metrischen Raumes  $R$  heißt *Fluchtpunkt*<sup>7</sup>, falls er ein Endpunkt jedes ihn enthaltenden geodätischen Bogens ist. Die Menge der Fluchtpunkte eines metrischen Raumes  $R$  bezeichnen wir mit  $F(R)$ . Ist  $R$  ein kompakter, konvexer metrischer Raum, dann bildet  $F(R)$  eine  $G_\circ$ -Menge<sup>8</sup>.

Wie bekannt, nennt man den metrischen Raum  $X$ , der das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes bei einer topologischen Abbildung  $\Phi$  ist, eine  $n$ -Zelle; der Rand — also die  $(n-1)$ -dimensionale Sphäre — wird durch  $\Phi$  in eine Teilmenge  $R(X)$  von  $X$  abgebildet, die wir den *Rand* der  $n$ -Zelle nennen.

Im Jahre 1959 hat K. BORSUK das folgende Problem gestellt: *Es ist zu entscheiden, ob jede stark konvexe metrisierte  $n$ -Zelle mindestens  $n+1$  Fluchtpunkte besitzt*<sup>9</sup>.

Im Falle  $n = 1$  ist das Problem trivial und zwar mit bejahender Antwort. A. LELEK und W. NITKA haben gezeigt, daß im Falle  $n \geq 2$  das Problem eine verneinende Antwort hat, nämlich sie haben für jede gegebene  $n$ -Zelle  $I^n$  eine Metrik  $\varrho_m^n$  konstruiert, bei der die  $n$ -Zelle  $I^n$  genau  $m$  Fluchtpunkte besitzt, wo  $m = 0, 1, 2, \dots$  sein kann<sup>10</sup>.

Wie man leicht einsehen kann, weisen die erwähnten Metriken  $\varrho_m^n$  gewisse metrische Singularitäten auf; in dieser Arbeit zeigen wir, daß man mit Ausschließen dieser Singularitäten, im Falle  $n = 2$  das Problem im bejahenden Sinne beantworten kann; dazu führen wir die folgenden Erklärungen an.

Sind  $x, y, z', z''$  Punkte des metrischen Raumes  $R$ , für die  $x \neq y, z' \neq z''$  und  $\varrho(y, z') = \varrho(y, z'')$  gelten, ist ferner  $y$  ein Zwischenpunkt einerseits von  $x, z'$  und anderseits von  $x, z''$ , dann wird  $y$  ein *Verzweigungspunkt*<sup>11</sup> von  $R$  genannt.

Ist  $\varphi : <\alpha, \beta> \rightarrow R$  eine Abbildung der abgeschlossenen Strecke  $<\alpha, \beta>$  der Zahlengeraden in  $R$ , die lokalisometrisch ist, d. h. gibt es zu jedem  $\tau \in <\alpha, \beta>$  ein  $\varepsilon(\tau) > 0$  so, daß im Falle  $|\tau' - \tau| < \varepsilon, |\varphi(\tau') - \varphi(\tau)| < \varepsilon, \tau', \tau'' \in <\alpha, \beta>$  die Bedingung

$$\varrho(\varphi(\tau'), \varphi(\tau'')) = |\tau' - \tau''|$$

erfüllt ist, dann heißt  $\varphi : <\alpha, \beta> \rightarrow R$  eine *geodätische Kurve* von  $R$ <sup>12</sup>.

Den metrischen Raum  $R$  nennen wir einen *geraden Raum*, wenn jede geodätische Kurve von  $R$  ein geodätischer Bogen ist.

Mit Hilfe der obigen Erklärung stellen wir den folgenden

**SATZ.** *Ist die 2-Zelle  $X$  ein stark konvexer gerader metrischer Raum, der keine Verzweigungspunkte enthält, dann besitzt  $X$  mindestens 3 Fluchtpunkte.*

Zuerst beweisen wir den

**HILFSSATZ.** *Ist die 2-Zelle  $X$  ein stark konvexer metrischer Raum ohne Verzweigungspunkte und  $p$  ein Punkt am Rand  $R(X)$  von  $X$ , der kein Fluchtpunkt ist, dann existiert im  $R(X)$  eine Strecke, die den Punkt  $p$  im Inneren enthält.*

<sup>7</sup> [3], 102.

<sup>8</sup> [3], 103.

<sup>9</sup> [1], 44. und [2], 183.

<sup>10</sup> [1], 44–45.

<sup>11</sup> [4], 162.

<sup>12</sup> [4], 164.

Wie es angenommen war, ist  $p$  kein Fluchtpunkt, daraus folgt, daß wenigstens eine Strecke  $S$  existiert, die den Punkt  $p$  im Inneren enthält. Gibt es einen Bogen  $S'$  mit  $S' \subset S \cap R(X)$ , der den Punkt im Inneren enthält, — sei das als Fall I. bezeichnet — dann ist  $S'$  die im Hilfssatz geforderte Strecke. (Fig. 1.)

Wir zeigen, daß der obige der einzige mögliche Fall ist, nähmlich alle anderen führen auf Widersprüche. Wir haben also noch zwei überbliebene Fälle zu untersuchen:

1. In jeder Umgebung von  $p$  bezüglich des Randes  $R(X)$  gibt es auf beiden Seiten von  $p$  einen Punkt, der der Strecke  $S$  nicht angehört.

2. Die Fälle I. und I. bestehen nicht.

Untersuchen wir zuerst den Fall 2. Der Punkt  $p$  bestimmt auf  $S$  zwei Strecken  $S_1$  und  $S_2$ . Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $X$ , die einerseits durch einen Bogen  $B$  in  $X$  berandet ist, und anderseits die beiden Strecken  $S_1, S_2$  haben Punkte außerhalb  $U$ . Es folgt weiter, daß genau eine von den beiden obigen

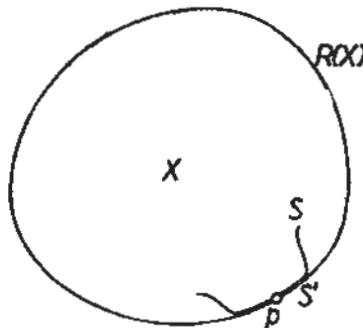


Fig. 1.

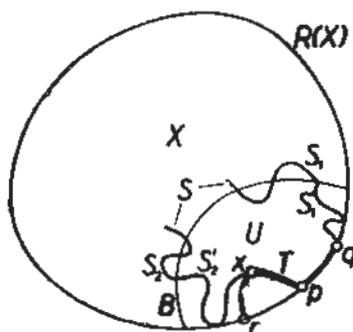


Fig. 2.

Strecken — die ohne der Beschränkung der Allgemeinheit  $S_1$  sein kann — eine Teilstrecke  $S'_1$  enthält, die dem Rand  $R(X)$  angehört. Es gibt ferner eine maximale Strecke  $S'_2$ , für die  $S'_2 \subset (U \cup B) \cap S_2$  und  $p \in S'_2$  gelten. Der Punkt  $p$  bestimmt auf  $R(X) \cap U$  zwei offene Bögen, von denen einer zu  $S'_1$  punktfremd ist, und es folgt aus unseren Annahmen, daß auf diesem Bogen ein Punkt  $r$  existiert, der der Strecke  $S_2$  nicht angehört. Sei  $q \neq p$  ein Punkt von  $S'_1$ . Es ist — aus Stetigkeitsgründen — leicht einzusehen, daß wir die Punkte  $q, r$  so gewählt haben können, daß die Strecke  $T$ , die sie bestimmen, in  $U$  liegt. Wir unterscheiden zwei Fälle nach dem, ob  $p$  der Strecke  $T$  angehört oder nicht.

a) Sei  $p \in T$ . Bezeichne  $x$  den Punkt von  $T \cap S'_1$ , der vom  $p$  im größtmöglichen Abstand liegt. Die Teilstrecken von  $S$  und  $T$ , die zwischen  $q$  und  $x$  liegen, müssen identisch sein — da ja  $X$  stark konvex ist — daraus folgt aber, daß  $x$  ein Verzweigungspunkt ist, was wir ausgeschlossen haben. (Fig. 2.)

b) Sei  $p \notin T$ . Wie man leicht einsehen kann, trennt die Strecke  $S'_2$  in  $U \cup B$  die Punkte  $q$  und  $r$ . Die Strecke  $T$  muß daher die Strecke  $S'_2$  in einem Punkt  $y$  schneiden, der wegen  $p \notin T$  von  $p$  verschieden ist. Die Punkte  $q$  und  $y$  bestimmen auf den Strecken  $S$  und  $T$  zwei verschiedene Teilstrecken, was aber der starken Konvexität von  $X$  widerspricht. (Fig. 3.)

Betrachten wir jetzt den Fall 1. Seien  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $B$  und  $U$  wie oben definiert. Es gibt zwei maximale Strecken  $S'_1$  und  $S'_2$ , für die  $S'_1 \subset (U \cup B) \cap S_1$ ,  $p \in S'_1$  und  $S'_2 \subset (U \cup B) \cap S_2$ ,  $p \in S'_2$  gelten. Der Punkt  $p$  bestimmt auf dem Bogen  $(U \cup B) \cap R(X)$  zwei Teilbögen  $R_1$  und  $R_2$ . Auf Grund der Annahmen die den Fall 1. charakterisieren, kann man zwei von  $p$  verschiedene Punkte  $q$  und  $r$  finden, für die  $q \in R_1$ ,  $r \in R_2$ , und  $q, r \notin S$  gelten. Es ist leicht einzusehen einerseits, daß wir die Punkte aus Stetigkeitsgründen so gewählt haben können, daß die von ihnen bestimmte Strecke  $Z$  in  $U \cup B$  liegt, anderseits, daß die beiden Bögen  $S'_1$ ,  $S'_2$  die Punkte  $q$  und  $r$  in  $U \cup B$  trennen. Hier hat man wieder zwei Fälle zu unterscheiden nach dem, ob  $p \in Z$ , oder nicht.

a) Sei  $p \notin Z$ . In diesem Fall hat  $Z$  wenigstens zwei verschiedene gemeinsame Punkte  $u, v$  mit  $S$ , das steht aber im Widerspruch mit der starken Konvexität von  $X$ . (Fig. 4.)

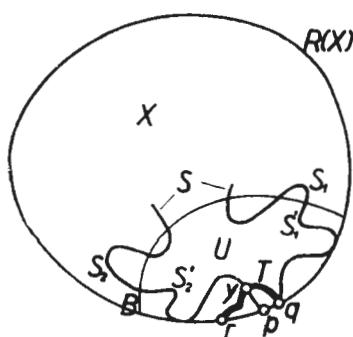


Fig. 3.

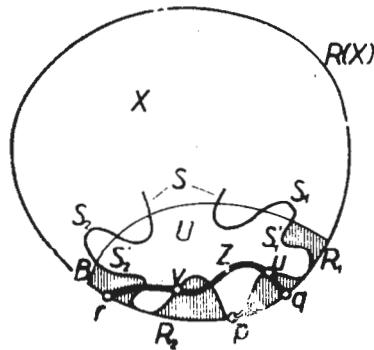


Fig. 4.

b) Sei  $p \in Z$ . Bezeichne  $x$  den Punkt von  $S_2 \cap Z$ , der im größtmöglichen Abstand von  $p$  liegt. Falls  $x \neq p$  gilt, bestimmen die Punkte  $p$  und  $x$  – wegen der starken Konvexität von  $X$  – genau eine Strecke, die eine Teilstrecke von  $S$  und  $Z$  ist.  $x$  muß also ein Verzweigungspunkt sein, was aber wir ausgeschlossen haben. Wenn  $x = p$  ist, dann muß  $p$  ein Verzweigungspunkt sein. Sei nähmlich  $z$  der von  $p$  verschiedener anderer Endpunkt von  $S_2$  und betrachten wir die durch  $q$  und  $z$  bestimmte Strecke  $W$ ; diese Strecke muß den Punkt  $p$  enthalten, da sonst hätte sie zwei verschiedene gemeinsame Punkte mit  $S$  im Gegensatz mit der angenommenen starken Konvexität von  $X$ . Die Punkte  $q$  und  $p$  bestimmen aber auf  $W$  und  $Z$  dieselbe Teilstrecke, woraus folgt, daß  $p$  ein Verzweigungspunkt ist.

Der Beweis des Hilfssatzes ist damit beendet.

Zum Beweis des Satzes nehmen wir an, daß die Menge  $F(X)$  der Fluchtpunkte von  $X$  aus weniger als 3 Punkten besteht. Man kann also zwei verschiedene Punkte  $a, b$  auf  $R(X)$  so auswählen, daß  $F(X) \subset \{a, b\}$  gilt. Die Punkte  $a, b$  bestimmen auf  $R(X)$  zwei Bögen  $C', C''$ ; wir zeigen, daß diese beiden Bögen geodätische Kurven sind. Sind nämlich  $x, y$  verschiedene Punkte im inneren eines von den erwähnten Bögen, — sei er  $C'$  — dann bestimmen sie auch einen

Teilbogen  $C^* \subset C'$ . Auf Grund des Satzes von HEINE-BOREL ist es einfach einzusehen, daß es eine lokalisometrische Abbildung einer abgeschlossenen Strecke der Zahlgeraden auf  $C^*$  gibt, also, daß  $C^*$  eine geodätische Kurve ist. Aus der Bedingung, daß  $X$  ein gerader metrischer Raum ist, folgt aber, daß  $C^*$  eine Strecke sein muß. Im Falle  $x \rightarrow a$  und  $y \rightarrow b$  konvergiert  $C^*$  nach  $C'$  und so folgt, daß  $C'$  auch eine Strecke ist<sup>18</sup>. Auf gleicher Weise kann man einsehen, daß auch  $C''$  eine Strecke ist. Wir haben aber damit einen Widerspruch zu der Annahme, daß  $X$  ein stark konvexer Raum ist, erhalten, da die Punkte  $a, b$  mit zwei verschiedenen Strecken verbunden sind.

Die Verfasser sprechen ihren besten Dank Herrn Prof. Á. CSÁSZÁR für seine werten Bemerkungen aus.

### Literatur

- [1] A. LELEK and W. NITKA, On convex metrics in compact spaces, *II. Hungarian Mathematical Congress, Abstracts of Lectures*, Vol. I, 44–45.
- [2] A. LELEK and W. NITKA, On convex metric spaces I., *Fund. Math.*, **49** (1961), 183–204.
- [3] K. MENGER, Untersuchungen über allgemeine Metrik, *Math. Annalen*, **100** (1928), 75–163.
- [4] W. RINOW, *Die innere Geometrie der metrischen Räume* (Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1961).

<sup>18</sup> [3], 92.



# ON THE DISTRIBUTION OF NUMBER-THEORETICAL FUNCTIONS

By

J. GALAMBOS

Department of Theory of Probability, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received December 6, 1963)

**INTRODUCTION.** In the present paper we give a new proof for some well-known theorems, which are simpler than the original ones and we deal in detail with the distribution of the function  $a(n)$  which is equal to the number of Abelian groups of order  $n$ .

It is known (see [1]) that if  $a(n)$  denotes the number of essentially distinct Abelian groups of order  $n$ , then it follows that  $a(n)$  is equal to the number of ways in which  $n$  can be expressed as the product of powers of primes (the order of the factors being irrelevant). (Concerning the investigation of the function  $a(n)$  see [2] and [3].)

We need the following lemma of WINTNER (see [2]) a proof of which we give here for the sake of completeness.

**LEMMA.** Let

$$(1) \quad \xi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$(2) \quad F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \xi(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \xi(s)G(s) \quad (\text{for } s = \sigma + it \text{ and } \sigma > 1)$$

and let the Dirichlet series on the right of (2) be absolutely convergent when  $\sigma = 1$ . Then

$$(3) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n}.$$

**PROOF.** In consequence of (2)

$$f(n) = \sum_{m|n} g(m)$$

and thus

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{m=1}^N g(m) \left[ \frac{N}{m} \right],$$

i. e.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{m=1}^N g\left(\frac{m}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N |g(m)|\right).$$

Now write

$$G(m) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{|g(n)|}{n}$$

so that  $\lim_{m \rightarrow +\infty} G(m) = 0$ . Then

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N |g(m)| = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N G(m) - G(N+1)$$

tends also to zero as  $N$  tends to infinity, in virtue of the consistency theorem for (C, 1) summability.

### 1 §. Schoenberg's theorem

Let  $g(n)$  be an arbitrary additive number-theoretical function.

**THEOREM 1.** (see [6]) *Let be*

$$\|g(n)\| = \begin{cases} |g(n)| & \text{for } |g(n)| \leq 1 \\ 2 & \text{for } |g(n)| > 1 \end{cases}$$

thus if

$$(4) \quad \sum_p \frac{\|g(p)\|}{P} < +\infty$$

where  $p$  runs on all primes, then the asymptotic distribution of  $g(n)$  exists.

**PROOF.** Let be  $f(n) = e^{iug(n)}$ , thus (with the notations of the lemma)

$$F(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{iug(n)}}{n^s} = \prod_p \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{iug(p^k)}}{p^{ks}} \right)$$

and

$$G(s) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{iug(p^k)}}{p^{ks}} \right) = \prod_p \left( 1 + \frac{e^{iug(p)} - 1}{p^s} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{iug(p^k)} - e^{iug(p^{k-1})}}{p^{ks}} \right)$$

so

$$(5) \quad |G(s)| \leq \prod_p \left( 1 + \left| \frac{e^{iug(p)} - 1}{p^s} \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{p^{ks}} \right) \leq \prod_p \left( 1 + \frac{\|g(p)\|}{p^\sigma} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} \right)$$

if  $s = \sigma + it$ .

The product being on the right side of (5) is absolutely convergent for those  $\sigma$ , for which

$$\sum_p \left( \frac{\|g(p)\|}{p^\sigma} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} \right) < +\infty.$$

Since

$$\sum_p \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} = \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1 - 1/p^\sigma} < +\infty \quad \text{for} \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

thus in view of condition (4) the lemma can be used and so SCHOENBERG'S theorem follows using the method of the characteristic functions. In addition it results too, that the characteristic function of the asymptotic distribution of  $g(n)$  is

$$(6) \quad \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{iug(p^k)}}{p^k}\right).$$

Particularly let  $V(n)$  resp.  $U(n)$  denote the number of all prime factors of  $n$  resp. the number of different prime factors of  $n$ , i. e. if

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

where  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$  are primes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  natural numbers, then let us put  $V(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ ,  $U(n) = r$  and let us consider the number-theoretical function  $\Delta(n) = V(n) - U(n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Clearly  $\Delta(n)$  is an additive arithmetical function, and since  $\Delta(p) = 0$ , (4) holds, thus at the same time we have given a new simple proof for the following well-known theorem of A. RÉNYI:

**THEOREM 2.** (see [4] and [5]) *The density of those natural numbers for which  $\Delta(n) = k$ , exists, let it be  $d_k$ , then*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p-z}\right)$$

where  $|z| < 2$  and  $p$  runs over all primes.

Namely in view of (6)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} d_k z^k &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{\Delta(p^k)}}{p^k}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{p^k}\right) = \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p-z}\right). \end{aligned}$$

RÉNYI [4] proves essentially more, namely he proves also the following theorem which we shall use in the proof of the Theorem 5.

**THEOREM 3.** *The density of those natural numbers  $m$ , which can be written in the form  $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} Q$ , where  $Q$  is a squarefree integer,  $(Q, p_i) = 1$ , and  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  are fixed integers  $> 1$ , while  $p_1, p_2, \dots, p_r$  are arbitrary primes, exists and this density is positive.*

We give a new proof for this theorem by the lemma. This proof is interesting from two points of views, namely here we use the lemma for neither additive nor multiplicative function, on the other hand thus this paper will be self-contained.

PROOF. Let be  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ , ( $\alpha_i > 1$ ) and

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} Q, \quad (Q, p_i) = 1, \quad p_i \neq p_j \text{ if } i \neq j, \\ & \text{and } Q \text{ is a squarefree number.} \\ 0 & \text{in other falls.} \end{cases}$$

Thus with the notations of the lemma

$$\begin{aligned} F_\alpha(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{\substack{(p_1, p_2, \dots, p_r) \\ p_i \neq p_j \text{ if } i \neq j \\ p_i \text{ prime}}} \frac{1}{p_1^{\alpha_1 s} p_2^{\alpha_2 s} \cdots p_r^{\alpha_r s}} \left| \sum_Q \frac{|\mu(Q)|}{Q^s} \right| = \\ &= \sum_{(p_1, p_2, \dots, p_r)} \frac{1}{p_1^{\alpha_1 s} p_2^{\alpha_2 s} \cdots p_r^{\alpha_r s}} \prod_p \left( 1 + \frac{1}{p^s} \right) \frac{1}{\prod_{i=1}^r \left( 1 + \frac{1}{p_i^s} \right)}, \end{aligned}$$

i. e.

$$G_\alpha(s) = \frac{F_\alpha(s)}{\zeta(s)} = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^{2s}} \right) \sum_{(p_1, p_2, \dots, p_r)} \frac{1}{p_1^{\alpha_1 s} p_2^{\alpha_2 s} \cdots p_r^{\alpha_r s}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^r \left( 1 + \frac{1}{p_i^s} \right)}$$

since  $\prod_p (1 - 1/p^{2s})$  is absolutely convergent for  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ , thus  $G(1)$  is absolutely convergent if

$$\sum_{(p_1, p_2, \dots, p_r)} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^r \left( 1 + \frac{1}{p_i} \right)}$$

is convergent. Clearly

$$\sum_{(p_1, p_2, \dots, p_r)} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 + \frac{1}{p_i}} \leq \sum_{(p_1, \dots, p_r)} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}} \leq \prod_{i=1}^r \frac{1}{p^{\alpha_i}}.$$

Since  $\sum_p 1/p^{\alpha_i} < +\infty$  for  $\alpha_i > 1$ , thus according to the lemma the proof of the Theorem 3 is completed.

## 2 §. On the number of Abelian groups of order $n$

Let  $P(m)$  be the number of partitions of  $m$  into positive parts and  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  ( $p_i \neq p_j$  if  $i \neq j$ ), then in view of the theorem quoted in the introduction

$$a(n) = P(\alpha_1)P(\alpha_2) \cdots P(\alpha_r).$$

**THEOREM 4.** *The density of the sequence of those numbers  $n$  for which  $a(n) = k$  exists for  $k = 1, 2, \dots$  and if it is equal to  $S_k$ , then*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} S_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k}{k^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{-k}}{P(k)^s}\right)$$

where  $A(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k \cdot k^{-s}$  is an entire function.<sup>1</sup>

**PROOF.** Since  $a(p) = 1$ , i. e.  $\log a(p) = 0$ , so for  $g(n) = \log a(n)$  (4) holds, and  $a(n)$  is a multiplicative function, thus  $\log a(n)$  is an additive one, and so according to SCHOENBERG's theorem resp. in view of (6)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} S_k e^{iu \log k} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{iu \log P(k)}}{p^k}\right),$$

i. e.

$$(7) A(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k}{k^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{-k}}{P(k)^s}\right) = \prod_p \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \left(\frac{1}{P(k)^s} - \frac{1}{P(k-1)^s}\right)\right).$$

According to one of RAMANUJAN's theorems (see [7])  $P(n) \sim \frac{1}{n} Ae^{B\sqrt{n}}$  ( $A$  and  $B$  are absolutely constants), and thus the product on the right side of (7) is absolutely convergent for any  $\sigma$ , i. e.  $A(s)$  is an entire function, and

$$A(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k}\right) = 1$$

thus the proof of the Theorem 4 is completed.

**COROLLARY.** All moments  $A_m = A(-m) = \sum_{k=1}^{+\infty} S_k \cdot k^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) of the asymptotic distribution of  $a(n)$  exist, and

$$A_m = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(k)^m}{p^k}\right).$$

**PROOF.** Since  $A(s)$  is an entire function, thus  $A_m = A(-m)$  is finite for any positive integer  $m$ .

It is a natural question what is the order of  $S_k$ .

We shall show that an asymptotical formula does not exist for  $S_k$ , namely we shall prove that for any  $k_0$  exists  $k \geq k_0$  that  $S_k = 0$ , we prove even more.

**THEOREM 5.** *For any  $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{\substack{S_k=0 \\ k \leq x}} 1 = x + o(x^\varepsilon).$$

<sup>1</sup> The question of the existence of numbers  $S_k$  was raised by P. TURÁN, but as it appeared it had already been considered in [2].

PROOF. According to one of RAMANUJAN'S theorems (quoted above)

$$P(n) > e^{c\sqrt{n}} \quad (c \text{ is constant}).$$

Let  $\mathfrak{A} = \{\prod_i P(i)\}$  be the increasing set of all products of the factors  $P(i)$  (with multiplicity),  $A(x)$  is the number of  $m \in \mathfrak{A}$  not exceeding  $x$ . According to the theorem, quoted in the introduction, we have to prove that  $A(x) = o(x^\epsilon)$  for any  $\epsilon > 0$ .

According to the Theorem 3 it is clear that  $S_k = 0$  if and only if  $k \notin \mathfrak{A}$ . Let us consider instead of  $\mathfrak{A}$  the set  $\mathfrak{B} = \{\prod_i b_i\}$  with  $b_i = e^{c\sqrt{i}}$  where  $\mathfrak{B}$  is also the increasing set of all products of factors  $b_i$  (also with multiplicity) and let  $B(x)$  be the number of  $m \in \mathfrak{B}$  not exceeding  $x$ , then  $A(x) \leq B(x)$ .

Clearly

$$B(x) = \sum_{\substack{\prod_i b_i \leq x \\ i}} 1 = \sum_{\substack{c \sum_i \sqrt{i} \\ i \\ \leq x}} 1 = \sum_{\substack{c \sum_i \sqrt{i} \leq \log x \\ i \\ \leq x}} 1.$$

Let be  $0 < \alpha < 1$  a real number, what we choose later. Let be

$$B(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

where

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{c \sum_i \sqrt{i} \leq \log x \\ i \leq (\log x)^\alpha}} 1, \quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{c \sum_i \sqrt{i} \leq \log x \\ \exists i, i > (\log x)^\alpha}} 1.$$

It is trivial that

$$\Sigma_1 \leq 2^{(\log x)^\alpha}.$$

In  $\Sigma_2$  the number of  $i$ 's satisfying  $i > (\log x)^\alpha$  are not larger than  $(\log x)^{1-\frac{\alpha}{2}}$  and thus

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq 2^{(\log x)^\alpha} \left[ \sum_{k=1}^{(\log x)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \binom{(\log x)^2}{k} \right] = 2^{(\log x)^\alpha} \binom{(\log x)^2 + 1}{(\log x)^{1-\frac{\alpha}{2}} + 1} = \\ &\leq 2^{(\log x)^\alpha} [(\log x)^2 + 1]^{(\log x)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq 2^{(\log x)^\alpha} e^{c(\log x)^{1-\frac{\alpha}{2}} \log \log x}. \end{aligned}$$

Choosing  $\alpha = \frac{2}{3}$  (thus  $\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ) we obtain

$$A(x) \leq B(x) = O(e^{c'(\log x)^{2/3}} \log \log x) = O\left(x^{\frac{c \log \log x}{\sqrt[3]{\log x}}}\right).$$

Thus Theorem 5 is proved.

It is clear according to Theorems 4 and 5 there exist for any  $k_0$  numbers  $k \geq k_0$  and  $k' \geq k_0$  such that  $S_k = 0$  and  $S_{k'} > 0$ , so we obtained that an asymptotical formula doesn't exist for  $S_k$ .

I wish to express my thanks to Professor A. RÉNYI for his valuable remarks.

### References

- [1] A. SPEISER, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, (Berlin, 1937), 49–51.
- [2] D. G. KENDALL – R. A. RANKIN, On the number of Abelian groups of a given order, *Quart. J. Math.*, 17 (1947), 197–208.
- [3] P. ERDŐS – G. SZEKERES, Über die Anzahl der Abelschen Gruppen gegebener Ordnung und über ein verwandtes zahlentheoretisches Problem, *Acta Sci. Math. Szeged*, 7 (1934), 95–102.
- [4] A. RÉNYI, On the density of certain sequences of integers, *Publ. Inst. Math. Belgrade*, 8 (1955), 157–162.
- [5] A. RÉNYI – P. TURÁN, On a theorem of Erdős–Kac, *Acta Arith.*, 4 (1958), 71–84.
- [6] I. J. SCHOENBERG, On the asymptotic distribution of arithmetical functions. *Transactions of the American Math. Soc.*, 39 (1936), 315–330.
- [7] H. H. OSTMANN, *Additive Zahlentheorie*, (Springer Verlag, Berlin, 1956).



EINE BEMERKUNG ZUR  
 "COMPARATIVE PRIME-NUMBER THEORY I—VIII"  
 VON S. KNAPOWSKI UND P. TURÁN

Von

I. KÁTAI

Lehrstuhl für Algebra der Eötvös Loránd Universität, Budapest

*(Eingegangen am 13. März 1964.)*

1. S. KNAPOWSKI und P. TURÁN haben sich in einer gemeinsamen Arbeit mit dem Vorzeichenwechsel der Funktion  $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$  beschäftigt. Angenommen, daß die Haselgrovesche Bedingung erfüllt ist, könnten Sie die Stelle des Vorzeichenwechsels lokalisieren. Ich werde mich in dieser Arbeit mit ähnlichen Fragen — im Falle der Erfüllung der Riemannschen Vermutung — beschäftigen.

In dieser Abhandlung sei

$p$  eine Primzahl,

$$(1,1) \quad A(n) = \begin{cases} \log p, & \text{wenn } n = p^t \text{ eine Primzahlpotenz von } p \text{ ist,} \\ 0 & \text{andererseits,} \end{cases}$$

$$(1,2) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} A(n), \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Es sei  $k \geq 1$  ganz,  $1 \leq l \leq k$  und  $l$  zu  $k$  teilerfremd, ferner

$$(1,3) \quad \psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l(k)}} A(n),$$

$$(1,4) \quad \theta(x, k, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l(k)}} \log p$$

$$(1,5) \quad \pi(x, k, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l(k)}} 1$$

$$(1,6) \quad \psi_0(x, k, l) = \frac{\psi(x+O, k, l) + \psi(x-O, k, l)}{2}.$$

Es sei bezeichnet mit  $N_k(l)$  die Anzahl der inkongruenten Lösungen von  $y^2 \equiv l \pmod{k}$ . Sei  $\chi$  ein Charakter mod  $k$  und  $L(s, \chi)$  die zugehörige  $L$  Funktion.

**DEFINITION.** Wir sagen, daß die Funktion  $L(s, \chi)$  die Haselgrovesche Bedingung erfüllt, wenn in der Strecke  $0 < s < 1$   $L(s, \chi) \neq 0$  ist. In ihren Abhandlungen haben S. KNAPOWSKI und P. TURÁN [1] eine Methode für Untersuchungen des Vorzeichenwechsels  $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$  ausgearbeitet. Sie bewiesen dort den folgenden Satz:

Ist die Haselgrovische Bedingung für alle Funktionen  $L(s, \chi) \chi \pmod{k}$  gültig, so wechselt die Funktion  $\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)$  mindestens einmal das Vorzeichen in allen Intervallen

$$\omega \leq x \leq e^{2\sqrt{\omega}} \quad [\omega > \omega_0(k)].$$

**BEMERKUNG.** Wenn die Haselgrovesche Bedingung für alle Funktionen  $L(s, \chi), \chi \pmod{k}$  richtig ist, dann existiert ein  $A(k) > 0$  so, daß im Rechteck  $0 < \sigma < 1, |t| \leq A(k)$  ( $s = \sigma + it$ ) für alle  $\chi \pmod{k}$   $L(s, \chi) \neq 0$  ist.

Wenn man  $A(k)$  kennt, dann kann man eine Abschätzung für  $\omega_0$  geben. Ferner ist dort noch Folgendes bewiesen:

Angenommen, daß  $l_1 \not\equiv l_2 \pmod{k}$  und  $N_k(l_1) = N_k(l_2)$  ist, ferner, daß im Gebiet  $\sigma > \frac{1}{2}, |t| \leq 2c_1 k^{10}$  ( $s = \sigma + it$ ), und in der Strecke  $\sigma = \frac{1}{2}, |t| \leq A(k)$  ( $A(k) > 0$ ) die Funktionen  $L(s, \chi)$  ( $\chi \neq \chi_0$ ) nicht verschwinden, sind für alle  $T > T_0(k)$  ( $T_0(k)$  ist eine explizite numerische Konstante) die Abschätzungen

$$\max_{T^{1/3} \leq x \leq T} \{ \pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2) \} > \sqrt{T} \cdot \exp \left( -44 \cdot \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T} \right)$$

$$\min_{T^{1/3} \leq x \leq T} \{ \pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2) \} < -\sqrt{T} \cdot \exp \left( -44 \cdot \frac{\log T \cdot \log_3 T}{\log_2 T} \right)$$

richtig.

Im Fall  $l_1 = 1$  haben die Verfasser einen stärkeren Satz bewiesen. Sie bewiesen in [1] nicht nur die Existenz des Vorzeichenwechsels, sondern sie lokalisieren diesen auch.

Nun werden wir zeigen, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} < 0$$

ist, wenn die Haselgrovesche Bedingung richtig ist. Wir beweisen ferner, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} > 0$$

und

$$\varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} < 0$$

ist, wenn die Anzahl der inkongruenten Lösungen von  $y^2 \equiv l_1 \pmod{k}$ ,  $y^2 \equiv l_2 \pmod{k}$  übereinstimmt. Die Grundlage unseres Beweises ist ein von LITTLEWOOD stammende Gedanke, mit Hilfe dessen er bewies, daß

$$\varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}} > 0$$

und

$$\varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}} < 0$$

ist [2].

**SATZ 1.** Wenn die Haselgrovesche Bedingung für alle Funktionen  $L(s, \chi)$ ,  $\chi \pmod{k}$  erfüllt ist, dann bestehen die Formeln

$$(2,1) \quad \varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} > 0$$

und

$$(2,2) \quad \varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} < 0.$$

**SATZ 2.** Wenn die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind und  $N_k(l_1) = N_k(l_2)$ , so ist

$$(2,3) \quad \varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} > 0$$

und

$$(2,4) \quad \varlimsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}} < 0.$$

Untersuchen wir nun die Funktion

$$f(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)] \frac{L'}{L}(s, \chi).$$

Bezeichne  $\rho$  die Nullstellen der  $L$ -Funktionen und  $m_{\rho}(\chi)$  ihre Vielfachheit (natürlich ist  $m_{\rho}(\chi) = 0$ , wenn  $L(\rho, \chi) \neq 0$  ist). Es ist nicht unmöglich,

daß irgendein  $\varrho$  eine gemeinsame Nullstelle mehreren  $L$  Funktionen mod  $k$  ist, und so hat die Funktion  $f(s)$  an dieser Stelle eventuell keinen Pol. Wenn ein Pol im Streifen  $0 < \operatorname{Re} \varrho < 1$  existiert, so folgt daraus, daß

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) = \Omega \pm (1).$$

Eine solche  $\varrho$  Stelle existiert! Dieses kann man trivialerweise von der expliziter Formel  $\psi_0(x, k, l)$  beweisen. (Den Beweis s. z. B.: [1] V. Abhandlung, Lemma VI, S. 52.) Von der Funktionalgleichung  $L(s, \chi)$  folgt, daß  $f(s)$  einen Pol in der Halbebene  $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$  hat. Ferner, wenn die Haselgrovesche Bedingung gültig ist, so sind diese Singularitäten nicht reelle.

Sei  $\Theta = \sup_{\varrho} \operatorname{Re} \varrho$ , wo  $\varrho$  die Polen durchläuft, und sei ferner  $\varepsilon > 0$  eine beliebige feste Konstante. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) \pm x^{\Theta-\varepsilon}}{x} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s} f(s) \pm \frac{1}{s - \Theta + \varepsilon},$$

und mittels des Satzes von E. LANDAU [3]\* finden wir die Formel

$$\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) = \Omega \pm (x^{\Theta-\varepsilon}).$$

Daraus folgt der Satz 1 im Fall  $\Theta > \frac{1}{2}$ .

Im Fall  $\Theta = \frac{1}{2}$  können wir einen genaueren Satz beweisen.

SATZ 3. Angenommen, daß die Funktion  $f(s)$  in der Halbebene  $\sigma > \frac{1}{2}$  und  $\operatorname{in} s = \frac{1}{2}$  regulär ist, kann man solche positive Konstanten  $\omega_0 = \omega_0(k)$ ,  $a = a(k)$ ,  $c = c(k)$  finden, daß für alle  $\omega > \omega_0$

$$(2,5) \quad \max_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \equiv c,$$

$$(2,6) \quad \min_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \equiv -c$$

ist.

Von Satz 3 folgt der noch nicht bewiesener Teil des Satzes 1. Die folgende Formel ist gut bekannt:

\* Der Satz von LANDAU ist der folgende: Sei  $a$  die Konvergenzabszisse von  $F(s) = \int_1^{\infty} \frac{b(x)}{x^s} dx$  und  $b(x) \geq 0$ , wenn  $x \geq x_0$ . Dann ist  $s = a$  eine singuläre Stelle von  $F(s)$ .

$$\psi_0(x, k, l_1) - \psi_0(x, k, l_2) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar{\chi}(l_2) - \bar{\chi}(l_1)] \sum_{e=\rho_{\chi}} \frac{x^e}{\varrho} + R(x, k, l_1, l_2),$$

wo

$$R(x, k, l_1, l_2) = O(\log x)$$

eine stetige Funktion von  $x$  ist. Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\Delta_0(x) = \psi_0(x, k, l_1) - \psi_0(x, k, l_2) - R(x, k, l_1, l_2),$$

$$\Delta_n(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \Delta_{n-1}(u) du \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Zum Beweis der Formel (2, 5) ist genügend beweisen, daß

$$\max_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\Delta_0(x)}{\sqrt{x}} \leq c_1,$$

wo  $c_1 > 0$  geeignete Konstante ist. Wir bekommen den Beweis der Formel (2, 6) trivialerweise von (2, 5), wenn wir  $l_1$  und  $l_2$  umtauschen. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß  $|\Delta_1(x)| \leq d_1 \cdot x^{1/2}$  ist, wenn  $x \geq 2$ . Daraus folgt für  $n \geq 1$  die Abschätzung  $|\Delta_n(x)| \leq \frac{d_1}{n!} x^{n+\frac{1}{2}}$ . Andererseits, mittels  $n$ -fachen Integrationen von  $\Delta_0(x)$  bekommt man

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar{\chi}(l_2) - \bar{\chi}(l_1)] \sum_{e=x_0} \frac{x^{e+n}}{\varrho(e+1) \dots (\varrho+n)} + O(x^n \log x).$$

Sei  $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma_e$ , wo  $\varrho$  ein Pol von  $f(s)$  im kritischen Streifen ist ( $0 < \operatorname{Re} \varrho < 1$ ), und seien ferner

$$b_e = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar{\chi}(l_2) - \bar{\chi}(l_1)] m_e(\chi) \quad (b_e \neq 0),$$

$$\gamma_0 = \min_{\gamma > 0} \gamma \quad \text{und} \quad \varrho_0 = \frac{1}{2} + i\gamma_0,$$

$$\varrho_0(\varrho_0+1) \dots (\varrho_0+n) \stackrel{\text{def}}{=} |\varrho_0(\varrho_0+1) \dots (\varrho_0+n)| \cdot e^{i\psi_n},$$

$$b_{e_0} = r_0 \cdot e^{i\varphi_0}.$$

Von der Funktionalgleichung folgt, daß  $b_{\bar{e}} = \bar{b}_e$ . So ist

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= 2 \cdot x^{n+\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{Re} \frac{r_0 \cdot e^{i\{\gamma_0 \log x + \varphi_0 - \psi_n\}}}{|\varrho_0(\varrho_0+1) \dots (\varrho_0+n)|} \left( 1 + \Theta \sum_{|e| > |e_0|} |b_e| \frac{|\varrho_0(\varrho_0+1) \dots (\varrho_0+n)|}{|\varrho(\varrho+1) \dots (\varrho+n)|} \right) + \\ &\quad + B(x) \cdot x^n \log x \end{aligned}$$

wo  $|\theta| = 1$  und  $|B(x)| < B$  ist ( $B$  ist eine absolute Konstante).  
Die Reihe

$$\sum |b_e| \left| \frac{\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+n)} \right|$$

konvergiert, und für alle  $|\varrho| > |\varrho_0|$

$$|b_e| \left| \frac{\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+n)} \right| \rightarrow 0,$$

(wenn  $n \rightarrow \infty$ ). So für ein  $n_0$  gilt:

$$\sum_{|\varrho| > |\varrho_0|} |b_e| \left| \frac{\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n)}{\varrho(\varrho+1)\dots(\varrho+n)} \right| < \frac{1}{2}.$$

Ferner ist die Ungleichung

$$|B(x) \cdot x^{n_0} \log x| < \frac{x^{n_0 + \frac{1}{2}} \cdot r_0}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n_0)|}$$

erfüllt, wenn  $x$  hinreichend groß ( $x \geq x_0$ ) ist. Sei  $x \geq x_0$ . Daraus folgt, daß

$$A_{n_0}(x) = \frac{2 \cdot x^{n_0 + \frac{1}{2}} \cdot r_0}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n_0)|} \left\{ \cos(\gamma_0 \log x + \varphi_0 - \psi_n) + \Theta_1 \cdot \frac{1}{2} \right\} \left\{ 1 + \Theta_2 \cdot \frac{1}{2} \right\},$$

wo  $|\Theta_1| \leq 1$ ,  $|\Theta_2| \leq 1$ .

Für alle  $\Omega(x_0 < e^{\gamma_0})$ , in den Intervallen  $(e^{\gamma_0}, e^{\gamma_0 + \frac{2\pi}{r_0}})$  existiert eine Stelle  $x_1$ , für welche  $\cos(\gamma_0 \log x_1 + \varphi_0 - \psi_n) = 1$  ist.

Hieraus folgt die Abschätzung

$$\max_{\frac{\varrho}{e^{\gamma_0}} \leq x \leq e^{\frac{2\pi + \varrho}{r_0}}} \frac{A_{n_0}(x)}{x^{n_0 + \frac{1}{2}}} > \frac{1}{2} \frac{r_0}{|\varrho_0(\varrho_0+1)\dots(\varrho_0+n_0)|} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \quad [= a_1(n_0)].$$

Es sei nun  $0 < \alpha < 1$  eine beliebige feste Zahl und  $n \geq 1$  eine ganze Zahl, dann

$$\frac{A_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} \int_{\alpha x}^x A_{n-1}(u) du + \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} \int_x^{\infty} A_{n-1}(u) du,$$

wohin folgt

$$\frac{A_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \max_{\alpha x \leq u \leq x} \frac{A_{n-1}(u)}{u^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}} A_n(\alpha x).$$

Ferner, bei  $\omega > 1$  ist

$$\max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{A_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cdot \max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{A_{n-1}(u)}{u^{n-\frac{1}{2}}} + \max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{A_n(\alpha x)}{x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Mittels der Abschätzung  $|A_n(\alpha x)| \leq c_1 \cdot (\alpha x)^{n+\frac{1}{2}}$  finden wir die

$$\max_{\omega^{n_0\omega} \leq x \leq d\omega} \frac{A_{n-1}(x)}{x^{n-\frac{1}{2}}} \geq \left( n + \frac{1}{2} \right) \left\{ \max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{A_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} - c_1 \alpha^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

Ungleichung.

Daraus folgt durch Iteration

$$\max_{\omega^{n_0\omega} \leq x \leq d\omega} \frac{A_0(x)}{x^{\frac{1}{2}}} \geq \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \dots \left( n_0 + \frac{1}{2} \right) \max_{\omega \leq x \leq d\omega} \frac{A_n(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}} - c_1 \cdot (n_0 + 2)! \alpha^{1/2}.$$

Wenn wir  $\alpha, d, n, \omega$  so wählen, daß

$$c_1 \cdot (n_0 + 2)! \alpha^{1/2} \leq \frac{a_1}{4}, \quad d \equiv e^{\frac{2\pi}{\gamma}}, \quad \omega > \omega_0,$$

dann ist

$$\max_{\omega^{n_0\omega} \leq x \leq d\omega} \frac{A_0(x)}{x^{1/2}} = n_0! a_1,$$

und so bekommen wir den Satz 3.

**3. SATZ 4.** Wenn neben den Voraussetzungen von Satz 3 auch noch  $N_k(l_1) = N_k(l_2)$  ist, dann

$$\max_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \geq c,$$

$$\min_{\omega \leq x \leq a\omega} \frac{\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2)}{\sqrt{x}} \leq -c.$$

Jetzt beweisen wir die Sätze 2 und 4.

Wenn wir

$$K(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^v \{\psi(t, k, l_1) - \psi(t, k, l_2)\} du$$

schreiben, dann ist

$$K(v) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} [\bar{\chi}(l_1) - \bar{\chi}(l_2)] \sum_{\varrho=\varrho_{\chi}} \frac{v^{\varrho-1}}{\varrho(\varrho+1)} + c_2 v \log v + O(v).$$

Nach den Voraussetzungen von Sätzen 2 und 4 gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, k, l_1) - \vartheta(x, k, l_2) &= \psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) - \sum_{\mu^2 \leq l_1(k)} \psi(\sqrt{x}, k, \mu) + \\ &+ \sum_{\nu^2 \leq l_2(k)} \psi(\sqrt{x}, k, \nu) + O(x^{1/3}) = \psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2) &= \int_2^x \frac{1}{\log u} d\{\vartheta(x, k, l_1) - \vartheta(x, k, l_2)\} = \\ &= \frac{\vartheta(x, k, l_1) - \vartheta(x, k, l_2)}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right) + \int_2^x \frac{1}{u \log^2 u} dK(u) = \\ &= \frac{\vartheta(x, k, l_1) - \vartheta(x, k, l_2)}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right) \end{aligned}$$

nach

$$\int_2^x \frac{dK(u)}{u \log^2 u} = \frac{K(x)}{x \cdot \log^2 x} + O(1) + \int_2^x \frac{K(u) \cdot (\log^2 u + 2 \log u)}{u^2 \log^4 u} du = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right).$$

Daraus folgt nun die folgende Formel:

$$\pi(x, k, l_1) - \pi(x, k, l_2) = \frac{\psi(x, k, l_1) - \psi(x, k, l_2)}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\right),$$

wohin die Sätze 2 und 4 sofort folgen.

### Literatur

- [1] S. KNAPOWSKI and P. TURÁN, Comparative prime-number theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, I - III, 13 (1962), 299 - 364; IV - VI, 14 (1963), 31 - 78; VII - VIII, 14 (1963), 241 - 268.
- [2] J. E. LITTLEWOOD, Mathematical notes, 3; On a theorem concerning the distribution of prime numbers, *Journal of the London Math. Soc.*, 2 (1927), 41 - 45.
- [3] E. LANDAU, Über einen Satz von Tschebyscheff, *Math. Ann.*, 61 (1905), 527 - 550.

# ISOGONALE SPHÄRISCHE NETZE

Von

A. HEPPE

Forschungsinstitut für Mathematik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest  
(Eingegangen am 10. Mai 1964.)

Unter einem sphärischen Netz werden wir im Folgenden ein zusammenhängendes System von Hauptkreisbögen verstehen, das die Oberfläche der Einheitskugel in (endlich viele) sphärische Polygone zerlegt, und zwar so, daß sich bei jeder Ecke mindestens drei Polygone treffen.

Ein Netz wird *isogonal* genannt, wenn sämtliche Winkel die bei den Ecken des Netzes bzw. der Polygone auftreten, gleich sind.

Die regulären Netze (die zentralen Projektionen der Kantensysteme der einzelnen regulären Polyeder auf die konzentrische Einheitskugel) sind aus kongruenten, regulären Polygonen aufgebaut, sind also isogonal. Folglich kann die Isogonalität des Netzes als eine Erweiterung der Regularität aufgefaßt werden.

Der Zweck dieser Arbeit ist sämtliche isogonale sphärischen Netze zu bestimmen.

1. Da bei jeder Ecke eines isogonalen Netzes mindestens drei gleiche Winkel liegen, sind die Winkel  $\leqq \frac{2\pi}{3}$ . Aus der Konvexität der Winkel folgt auch die Konvexität der sphärischen Polygone. So können wir leicht feststellen: Enthält ein Netz ein Zweieneck vom Winkel  $\alpha$ , so sind die benachbarten Polygone – und folglich sämtliche Polygone des Netzes – damit kongruente Zweienecke. Der Winkel  $\alpha$  ist notwendigerweise ein Teiler von  $2\pi$ , und umgekehrt, zu jedem  $\alpha \leqq \frac{2\pi}{3}$ , der ein Teiler von  $2\pi$  ist, gehört ein Netz, das aus  $\frac{2\pi}{\alpha}$  Zweienecken besteht.

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit solchen Netzen, die nicht zu der Klasse dieser „ausgearteten“ Netze gehören, die also kein Zweieneck enthalten.

2. Es sei die Ecken-, Kanten- bzw. Flächenzahl eines Netzes mit  $e$ ,  $k$  bzw.  $f$  bezeichnet. Da einerseits die Seitenzahl jedes Polygons mindestens drei ist, andererseits bei jeder Ecke  $t$  Polygone einander treffen, gelten die folgenden Relationen:

$$3f \leqq 2k$$

$$te = 2k.$$

Kombiniert man diese mit der Eulerschen Formel

$$f + e = k + 2,$$

so ergibt sich die Ungleichung

$$(6 - f)e \geq 12$$

und damit die Abschätzung, daß in jedem (nicht ausgearteten) Netz  $t < 6$  ist.

3. Nach der Inhaltsformel der sphärischen Polygone ist der Inhalt eines  $m$ -Ecks des Netzes

$$(1) \quad m \frac{2\pi}{t} - (m-2)\pi = \left| 2 - m \left( 1 - \frac{2}{t} \right) \right| \pi,$$

wo  $t$  wieder die Anzahl der Kanten bedeutet, die sich in einer Ecke treffen. Da für  $t = 4$  und für  $t = 5$  dieser Inhalt unter den möglichen Werten von  $m$  nur für  $m = 3$  positiv ausfällt, folgt es gleich, daß die isogonalen Netze – in diesen Fällen – aus regulären Dreiecken vom Winkel  $\frac{2\pi}{4}$  bzw.  $\frac{2\pi}{5}$  aufgebaut sind.

Damit sind aber die entsprechenden isogonalen Netze  $N^{(4)}$  und  $N^{(5)}$  – das sphärische Netz des regulären Oktaeders bzw. Ikosaeders – eindeutig bestimmt.

4. Wir brauchen noch die deutlich zahlreichere Menge der „dreizweigigen“ Netze ( $t = 3$ ) aufzuzählen.

Aus der obigen Inhaltsformel (I) ergibt sich sofort, daß die Polygone dieser Netze nur Drei-, Vier- oder Fünfecke sein können. Dementsprechend werden wir zuerst einige Hilfssätze bezüglich der sphärischen Drei-, Vier- und Fünfecke beweisen.

**HILFSSATZ 1.** Es seien  $A$  und  $A'$  die Ecken eines sphärischen Zweisecks vom Winkel  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ , und  $P$  ein Punkt an einem der Schenkel. Zum Punkt  $P$  sei am anderen Schenkel jener Punkt  $Q$  zugeordnet, für welchen der Winkel  $APQ$  mit dem vorgegebenen Wert  $\beta$ ,  $0 < \beta < \pi$ , übereinstimmt. Bewegt sich der Punkt  $P$  an dem Schenkel von  $A$  nach  $A'$ , so nimmt der Winkel  $AQP$  streng monoton zu.

Wir bezeichnen mit  $P_1$  und  $P_2$  zwei Lagen von  $P$  ( $\widehat{AP}_1 < \widehat{AP}_2$ ), mit  $Q_1$  und  $Q_2$  die entsprechenden zugeordneten Punkte am anderen Schenkel und mit  $P'_1$  und  $P'_2$  die den Punkten  $P_1$  bzw.  $P_2$  diametral gegenüberliegenden Punkte. Offenbar ist entweder das Dreieck  $AP_1Q_1$  im Dreieck  $AP_2Q_2$  oder  $AP'_2Q_2$  in  $AP'_1Q_1$  enthalten. Da je zwei entsprechende Winkel der verglichenen Dreiecke gleich sind, ergibt es sich aus dem Inhaltsvergleich für die dritten Winkel im ersten Fall  $AQ_1P_1 < AQ_2P_2$  und im zweiten Fall  $AQ_2P'_2 < AQ_1P'_1$ . Diese Ungleichungen sind aber mit der Behauptung identisch bzw. gleichwertig (Fig. 1).

Wir betrachten nun die gleichwinkligen Vierecke. Zwei gegenüberliegenden Seiten bestimmen ein Zweiseck. Die zwei Dreiecke, die das Viereck zu diesem Zweiseck ergänzen, sind gleichschänklig, da sie zwei gleiche Winkel haben. Daraus ergibt sich leicht

**HILFSSATZ 2.** In einem gleichwinkligen sphärischen Viereck sind die gegenüberliegenden Seitenpaare gleich. Ist der Winkel vorgegeben, so ist das Viereck durch die Angabe einer Seitenlänge eindeutig bestimmt.

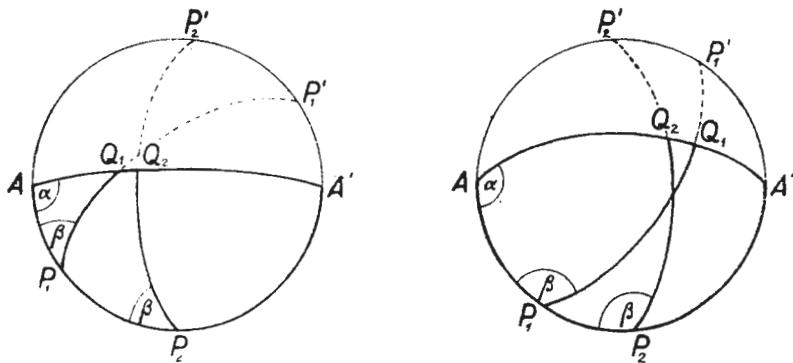


Fig. 1.

Zu einem gegebenen Viereck gibt es offenbar andere Vierecke von gleichen entsprechenden Winkeln, und zwar kann dabei eine Seitenlänge zwischen gewissen Grenzen frei vorgeschrieben werden.

Als Vorbereitung zur Untersuchung der Fünfecke beweisen wir

**HILFSSATZ 3.** Es seien  $A_1B_1C_1D_1$  und  $A_2B_2C_2D_2$  zwei sphärische Vierecke, die dieselben Winkel besitzen:  $A_1B_1C_1 \not\propto = A_2B_2C_2 \not\propto$ ,  $B_1C_1D_1 \not\propto = B_2C_2D_2 \not\propto$ ,  $C_1D_1A_1 \not\propto = C_2D_2A_2 \not\propto$  und  $D_1A_1B_1 \not\propto = D_2A_2B_2 \not\propto$ . Wir behaupten, daß für diese Vierecke die folgende Relation gilt: Ist die Seite  $A_1B_1 > A_2B_2$ , so sind  $B_1C_1 < B_2C_2$ ,  $C_1D_1 > C_2D_2$  und  $D_1A_1 < D_2A_2$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  und die Winkel  $D_1A_1B_1 \not\propto$  und  $D_2A_2B_2 \not\propto$  zusammenfallen, ferner  $B_2$  an der Seite  $A_1B_1$  liegt. Der Schnittpunkt des Hauptkreises  $B_2C_2$  und der  $C_1$  enthaltenden Seite des durch  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  bestimmten Zweiecks sei mit  $C$  bezeichnet. Laut Hilfssatz 1 ist  $B_2CD_1 \not\propto < B_1C_1D_1 \not\propto$ . Wäre auch  $A_1D_1 \cong A_2D_2$ , so folgte ähnlicherweise  $B_2C_2D_2 \not\propto \cong B_2CD_1 \not\propto$   $B_1C_1D_1 \not\propto = B_2C_2D_2 \not\propto$ . Damit haben wir gezeigt, dass einer größeren Seite sich eine kleinere Nachbarsseite anschließt. Das ist aber mit unserer Behauptung gleichwertig.

Eine einfache Folgerung dieses Hilfssatzes ist der folgende

**HILFSSATZ 4.** Sind  $A_1B_1C_1D_1E_1$  und  $A_2B_2C_2D_2E_2$  zwei sphärischen Fünfecke, deren sämtliche Winkel gleich  $\frac{2\pi}{3}$  sind, und deren Seiten die Bedingungen

$A_1B_1 = A_2B_2$  und  $B_1C_1 > B_2C_2$  erfüllen, so sind  $C_1D_1 < C_2D_2$ ,  $D_1E_1 > D_2E_2$ ,  $E_1A_1 < E_2A_2$ .

Ergänzt man nämlich die Fünfecke durch je ein (kongruentes) zur Seite  $A_1B_1$  bzw.  $A_2B_2$  anschliessendes Dreieck in Vierecke, so führt man das Problem auf den im Hilfssatz 3 betrachteten Fall zurück.

Im Folgenden verstehen wir unter Vielecken isogonale sphärische Vielecke vom Winkel  $\frac{2\pi}{3}$ , auch dann, wenn es nicht betont wird.

Wie man es nach Hilfssätzen 2 und 4 feststellen kann, ist das Dreieck eindeutig, das Viereck und das Fünfeck durch die Angabe von einer bzw. zwei Seiten eindeutig bestimmt. Die Seitenlänge des regulären  $n$ -Ecks sei mit  $a_n$  bezeichnet ( $n = 3, 4, 5$ ).

Es ist leicht einzusehen, daß die Vielecke die folgenden fünf Eigenschaften besitzen:

- a) Hat ein Fünfeck zwei gleiche Seiten, so ist es symmetrisch, und folglich:
- b) Hat ein Fünfeck drei gleiche Seiten, so ist es regulär.

c) Die kleinste Seite eines nichtsymmetrischen Fünfecks ist von der Größte und von der Zweitgrößte, die größte Seite ist von der Kleinste und von der Zweitkleinste benachbart.

Es ergibt sich aus dem Vergleich eines Fünfecks von den Seitenlängen  $s_1, s_2, \dots, s_5$  und seines Spiegelbildes, daß aus  $s_i > s_{i+1}$  die Ungleichung  $s_{i-1} < s_{i+2}$  ( $s_{i+5} = s_i$ ) folgt. Es sei  $s_1$  die kleinste Seite des Fünfecks. Ist  $s_2 < s_5$ , so ist also  $s_3 > s_4$ . Da aber  $s_1 < s_4$ , gilt auch  $s_2 > s_3$ , und damit die Relation  $s_1 < s_4 < s_3 < s_2 < s_5$ .

Entsprechendes kann auch bezüglich der symmetrischen (nicht regulären) Fünfecke ausgesprochen werden, insbesondere, daß eine jede kleinste und eine jede größte Seite miteinander benachbart sein müssen.

- d) Kein Fünfeck besitzt eine Seite von der Länge  $a_3$ .

Im entgegengesetzten Fall könnte man das Fünfeck durch ein Dreieck von den Winkeln  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{2\pi}{3}$  — die Hälfte eines Quadrats — also von den Seitenlängen  $a_3, a_4$  und  $a_4$  zu einem (gleichwinkligen) Viereck ergänzen, dessen jede Seite größer als  $a_4$  wäre.

e) Bezeichnen  $s$  und  $s_4$  bzw.  $s$  und  $s_5$  die Längen von zwei benachbarten Seiten eines Vierecks bzw. Fünfecks, so sind  $s_4$  und  $s_5$  verschieden.

Sonst könnte das Fünfeck durch ein Dreieck von den Winkeln  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{2\pi}{3}$  zu einem Viereck der Seitenlängen  $s$  und  $s_4$  ergänzt werden. Das ist aber — wie wir es eben gesehen haben — unmöglich.

5. Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns der Untersuchung der isogonalen sphärischen Netze vom Winkel  $\frac{2\pi}{3}$  zu. Wie wir es schon festgestellt haben, können in einem solchen Netz nur Drei-, Vier- und Fünfecke vorkommen.

Zuerst beschäftigen wir uns mit Netzen, die mindestens ein Dreieck enthalten. Die Nachbarn dieses Dreiecks können wegen d) nur Drei- oder Vierecke sein. Sind alle Nachbarvielecke Dreiecke, so ergibt sich eindeutig, das sphärische Netz  $N_1^{(3)}$  des regulären Tetraeders. Wenn aber unter den anschließenden Vielecken auch ein Viereck auftritt, so sind alle Nachbarn des Dreiecks notwendigerweise (kongruente) Vierecke, da die Seiten eines anschließenden Vierecks und Dreiecks nicht übereinstimmen können. In diesem Fall ist also ein Dreieck von drei kongruenten Vierecken umringt, deren „freie“ Seiten wieder ein Dreieck bilden. So gelangen wir zum sphärischen Netz  $N_2^{(3)}$  eines regulären dreieckigen Prismas (geeigneter Höhe). Damit haben wir die Netze, die Dreieck enthalten, erledigt.

Die übrigen Netze bestehen aus Vier-, und Fünfecken. Wir betrachten zuerst diejenigen Netze, die ein Viereckstripel mit gemeinsamer Ecke besitzen. Da ein Viereck durch die Angabe einer Seite eindeutig bestimmt ist, folgt aus der Gleichheit der gemeinsamen Seiten zweier Vierecke, daß das dritte – und damit alle drei – Quadrate sind. Zu diesen drei Quadraten können sich aber nur weitere Quadrate anschließen, weil Fünfecke wegen e) nicht auftreten können. In diesem Fall haben wir wieder ein einziges Netz, *das sphärische Netz  $N_3^{(3)}$  des Hexaeders* erhalten.

Im Folgenden können wir voraussetzen, daß die betrachteten Netze kein Vierecktripel mit gemeinsamem Eckpunkt enthalten. Die weitere Diskussion unterscheidet verschiedene Fälle je nach der größte Anzahl  $k$  der Vierecke, die im betrachteten Netze eine zusammenhängende Komponente bilden. Nach unserer Voraussetzung schließen sich die Vierecke „streifenweise“ an, und folglich sind die Vierecke derselben Komponente kongruent.

*Fall  $k \geq 3$ .* Es bezeichne  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  drei Vierecke, die einen Streifen bilden, ferner  $F_1$  und  $F_2$  die zwei Fünfecke, die sich zu  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  anschließen. Diese Fünfecke sind regulär (Eigenschaft b)), und folglich sind die an  $F_1$ ,  $F_2$  und  $V_1$  bzw. an  $F_1$ ,  $F_2$  und  $V_3$  anstossenden Vielecke mit den vorigen kongruente Vierecke. In diesem Fall gibt es also nur ein einziges Netz, *das sphärische Netz  $N_4^{(3)}$  eines regulären fünfeckigen Prismas* (geeigneter Höhe).

*Fall  $k = 2$ .* Wir bezeichnen mit  $V_1$  und  $V_2$  die zwei (kongruenten) benachbarten Vierecke, die durch vier Fünfecke umschlossen sind. Diese Fünfecke sind symmetrisch (Eigenschaft a)) und kongruent, weil in jedem zwei gleiche Seiten vorkommen und die übereinstimmenden Seiten es sichern, daß je zwei Seiten in allen diesen Fünfecken miteinander gleich sind. Um die Existenz und die metrische Eindeutigkeit dieser Konfiguration zu zeigen, betrachten wir ein Viereck von den Seitenlängen  $s$  und  $s'$ , ferner zwei symmetrische Fünfecke von den Seitenlängen (in Reihenfolge)  $s$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $b$  und  $a$  bzw.  $c$ ,  $d$ ,  $s'$ ,  $s'$  und  $d$ . Auf Grund des Hilfssatzes 3 (angewendet auf die durch die Symmetrieaxe abgeschnittene Hälfte symmetrischer Fünfecke) sieht man leicht, daß bei von  $a_4$  bis  $a_3$  wachsendem  $s$  der Wert  $d$  (von 0 bis zu einem gewissen Wert) monoton zunimmt, und  $a$  (von einem gewissen Wert bis 0) monoton abnimmt. So gibt es nur einen Wert  $s$ , für welchen  $a = d$  ausfällt.

Der schon bekannte Teil des zu diesem Fall gehörenden Netzes ist also eindeutig bestimmt. Das übrigbleibende Gebiet der Kugeloberfläche ist aber mit der Vereinigung der zwei Vierecke  $V_1$  und  $V_2$  kongruent, und kann nach e) nur durch zwei, mit  $V_1$  und  $V_2$  kongruente Vierecke ausgefüllt werden. Wir haben also das eindeutig bestimmte isogonale Netz  $N_4^{(3)}$  erhalten, das aus vier kongruenten Vierecken und vier kongruenten symmetrischen Fünfecken besteht.

*Fall  $k = 1$ .* Den hier betrachteten Netzen kommen nur alleinstehende Vierecke vor. Es seien  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  und  $F_4$  vier Fünfecke, die ein Viereck  $V_1$  (in dieser Reihenfolge) umringen. Wäre  $V_1$  nicht regulär, so könnte man mit Hilfe des Hilfssatzes 4 aus dem Vergleich von  $F_1$  und  $F_2$  bzw. von  $F_3$  und  $F_4$  darauf folgern, daß die gemeinsame Seite von  $F_2$  und  $F_3$  einerseits größer, andererseits kleiner als die gemeinsame Seite von  $F_4$  und  $F_1$  ist. Es folgt daraus, daß alle Vierecke Quadrate sind, ferner alle einem Quadrat benachbarten Fünfecke miteinander kongruent sind.

Im Folgenden unterscheiden wir zwei Unterfälle je nachdem, ob es unter den äußeren Nachbarn der umgebenden Fünfecke auch ein Quadrat  $V_2$  gibt, oder auch dieser zweite Ring aus lauter Fünfecken besteht.

Im ersten Unterfall folgt aus der Kongruenz und Anordnung der Fünfecke und aus der Eigenschaft e) die Existenz auch eines dritten Vierecks (Quadrats). Die anderen zwei Glieder des zweiten Ringes sind Fünfecke, da sich Vierecke in diesem Fall nicht berühren können. Damit wurde aber schon die ganze Kugeloberfläche aufgeteilt. Die Existenz eines solchen Netzes folgt daraus, daß der Diameter des Quadrats kleiner als  $\frac{2\pi}{3}$  ist, und deshalb ein geeignetes Netz leicht angegeben werden kann. Da jedes Fünfeck zwei nicht nebeneinander liegende Seiten von der Länge  $a_4$  besitzt, sind die Fünfecke und dadurch das ganze Netz auch metrisch eindeutig bestimmt. Das erhaltene Netz  $N_6^3$  besteht aus drei Quadraten und sechs kongruenten symmetrischen Fünfecken.

Im zweiten Unterfall ist das betrachtete Quadrat  $V_1$  durch zwei (aus je vier Gliedern bestehende) Fünfecksringe umschlossen. Die Fünfecke des ersten Ringes sind kongruent und zwei Nachbarn unter ihnen liegen symmetrisch bezüglich ihrer gemeinsamen Seite. Es folgt daraus, daß die Fünfecke des zweiten Ringes selbst symmetrisch und – infolge der gleichen entsprechenden Seitenpaare – auch kongruent sind. Das bringt aber umgekehrt die Symmetrie der Fünfecke des ersten Ringes mit sich und damit die Kongruenz aller Fünfecke. Das übrige Gebiet ist wieder ein Quadrat. (Die Existenz des hier beschriebenen Netzes folgt unmittelbar aus der Existenz eines symmetrischen Fünfecks mit der Basislänge  $a_4$ .) Das zu diesem Unterfall gehörende Netz  $N_7^3$  ist aus zwei Quadraten und acht kongruenten symmetrischen Fünfecken aufgebaut.

Fall  $k = 0$ . Es ist leicht einzusehen, daß jedes isogonale Netz, das nur Fünfecke enthält, topologisch mit dem sphärischen Netz des regulären Dodekaeders äquivalent ist. Wir werden zeigen, daß das einzige isogonale Netz, das aus lauter Fünfecken besteht, das sphärische Netz des Dodekaeders ist. Der Beweis wird in zwei Schritten durchgeführt.

Im ersten Schritt zeigen wir, daß in einem isogonalen Fünfecksnetz auch symmetrische Fünfecke auftreten. Im Gegensatz zu dieser Behauptung nehmen wir an, daß sich in jeder Ecke drei verschiedene Kanten (Seiten) treffen, und zu jedem Fünfeck fünf verschiedene Seiten gehören. Wir betrachten das

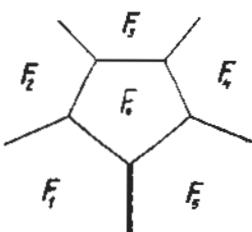


Fig. 2.

zu einem Endpunkt der längsten Kante (einer der längsten Kanten) anschließende Fünfeck  $F_0$  und die um  $F_0$  liegenden anderen Fünfecke  $F_1, F_2, F_3, F_4$  und  $F_5$  (Fig. 2). Die gemeinsame Seite von  $F_i$  und  $F_j$  wird mit  $s_{ij}$  bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß  $s_{15}$  die bzw. eine größte Seite ist. Daraus folgt sofort, daß

$$s_{15} > s_{01} \quad \text{und} \quad s_{15} > s_{05}$$

sind, ferner – als eine Folgerung der Eigenschaft c) bezüglich  $F_1$  und  $F_5$  ergeben sich noch die Ungleichungen

$$(2) \quad s_{12} > s_{01} \quad \text{und} \quad s_{15} > s_{05}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes 4 und der obigen Ungleichungen ergeben sich durch Vergleich von  $F_0$  und  $F_1$ ,  $F_0$  und  $F_5$ ,  $F_0$  und  $F_2$  bzw.  $F_0$  und  $F_4$  die Ungleichungen

$$(3) \quad s_{02} > s_{12}, \quad s_{01} > s_{15},$$

$$(4) \quad s_{03} > s_{23}, \quad s_{03} > s_{31}.$$

Benutzt man die Eigenschaft c) von  $F_0$  und die aus (2) und (3) folgenden Ungleichungen:  $s_{02} > s_{01}$  und  $s_{04} > s_{05}$ , so ergibt es sich gleich, daß  $s_{03}$  die kleinste Seite von  $F_0$  sein muß. Hieraus und aus (4) ergeben sich die Ungleichungen

$$s_{02} > s_{23} \quad \text{und} \quad s_{01} > s_{31},$$

die aber einander widersprechen, wie es aus dem Vergleich der Fünfecke  $F_0$  und  $F_3$  klar ist.

Im zweiten Schritt gehen wir aus einem symmetrischen Fünfeck  $F_1$  aus, dessen Existenz schon bewiesen ist. Da zwei Seiten das Fünfeck eindeutig bestimmen, ist jede Symmetriechse (Hauptkreis) des Fünfecks  $F_1$  gleich Symmetriechse des ganzen Netzes. Ist  $F_1$  regulär, so sind notwendigerweise alle Fünfecke regulär und das Netz stimmt mit dem des Dodekaeders überein. Wir setzen jetzt voraus, daß  $F_1$  nicht regulär ist. Dann hat es eine Basisseite und zwei Seitenpaare von den Längen  $s_1, s_2$  bzw.  $s_3$  (Fig. 3). Das zur Basis an-

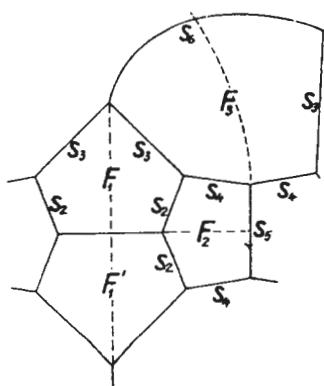


Fig. 3.

schließende Fünfeck  $F'_1$  ist mit  $F_1$  kongruent, weil ein symmetrisches Fünfeck durch die Angabe seiner Basis schon bestimmt ist (die zwei Fünfecke haben dieselbe Symmetriearchse). Folglich ist das neben  $F_1$  und  $F'_1$  liegende Fünfeck  $F_2$  symmetrisch. Seine Basislänge bzw. die Längen der gleichen Seitenpaare werden mit  $s_5$ ,  $s_4$  und  $s_2$  bezeichnet. Wie aus der Symmetrie von  $F_1$  auf die Symmetrie von  $F_2$  gefolgert wurde, folgert man aus der Symmetrie von  $F_2$  auf die Symmetrie des gemeinsamen Nachbars  $F_3$  von  $F_1$  und  $F_2$ .  $F_3$  hat je zwei Seiten von der Länge  $s_3$  bzw.  $s_4$  und eine Basis von der Länge  $s_6$ . Bezüglich der gemeinsamen Seiten von  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß für die Werte  $s_2$ ,  $s_3$  und  $s_4$  die Ungleichungen

$$s_2 < s_3 < s_4$$

gelten. Vergleichen wir  $F_1$  und  $F_3$ , so folgt aus  $s_2 < s_4$  die Ungleichung  $s_3 > s_6$ . Das widerspricht aber der Eigenschaft c), weil die kleinste und die größte Seite im Fünfeck  $F_3$  nicht benachbart sind. Damit haben wir gezeigt, daß im letzten Fall  $k = 0$  das einzige isogonale Netz *das sphärische Netz  $N_8^{(3)}$  des regulären Dodekaeders* ist.

# ÜBER DIE REGULÄREN MOSAIKEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Von

J. HORVÁTH

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie der Eötvös Loránd Universität, Budapest  
(Eingegangen am 23. Mai 1964.)

Betrachten wir auf der euklidischen Ebene ein elementares  $p$ -Eck,  $\Pi_0$  eines dem SCHLÄFLI-schen Symbol  $\{p, q\}$  entsprechendes reguläres Mosaik.<sup>1</sup>

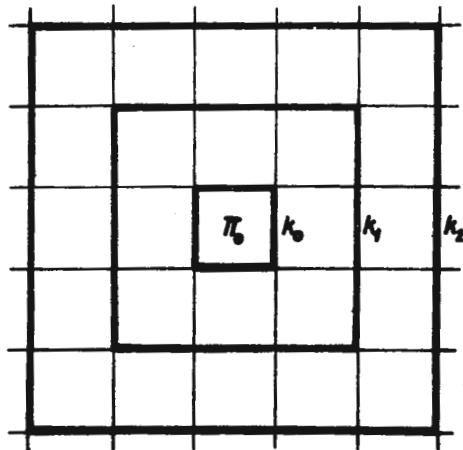


Fig. 1.

Das Mosaik besteht aus dem Polygon  $\Pi_0$  und aus den es umfassenden elementaren Polygonen.<sup>2</sup>

$R_i$  sei der Flächeninhalt des zwischen den Gürtelbegrenzungen  $k_{i-1}$  und  $k_i$  gelegenen Teils der Ebene,  $S_i$  der Flächeninhalt der durch die Begrenzung

<sup>1</sup> S. z. B. FEJES TÓTH [3].

<sup>2</sup> Die Figur 1. entspricht dem Falle  $\{4,4\}$ .

$k_i$  umschlossenen Fläche und bezeichnen wir den Grenzwert des Quotienten  $\frac{R_n}{S_n}$  für  $n \rightarrow \infty$  mit  $G(p, q)$ , d. h. sei  $G(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n}$ .

In der euklidischen Ebene ist offenbar, daß  $G(p, q) = 0$ . F. KÁRTESZI [2] hat gezeigt, daß auf der hyperbolischen Ebene  $G(3, q)$  immer endlich ist, und zwar eine irrationale Zahl ist.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung  $G(p, q)$  im Falle  $p > 3$ .

1. Betrachten wir ein  $p$ -seitiges reguläres Polygon der hyperbolischen Ebene, dessen Winkel von der Größe  $2\pi/q$  sind (Fig. 2.) Es soll durch die Eck-

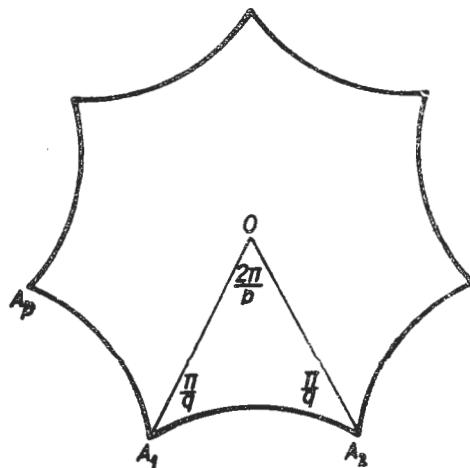


Fig. 2.

punkte mit dem Mittelpunkt verbindenden Geraden in gleichschenkelige Dreiecke aufgeteilt werden. Die Winkelsumme solcher Dreiecke ist kleiner als  $\pi$ , folglich ist

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{q} < \pi,$$

woraus

$$(p-2)(q-2)-2 > 2.$$

Bezeichnen wir in Folgendem  $c(p, q) = (p-2)(q-2)-2$  kurz mit  $c$ , d. h.

$$(1) \quad c = (p-2)(q-2)-2.$$

Es ist bekannt, daß bei  $c > 2$ ,  $\{p; q\}$  existiert, und wir wollen diesen Elementarpolygon mit  $[p, q]$  bezeichnen.

Betrachten wir ein elementares Polygon  $H_0$  von  $\{p, q\}$  der hyperbolischen Ebene.<sup>3</sup> (Fig. 3. representiert die  $\{4, 5\}$ )

<sup>3</sup> Es ist bekannt, daß  $\{p, q\}$  existiert. S. z. B. FEJES TÓTH [4], 96.

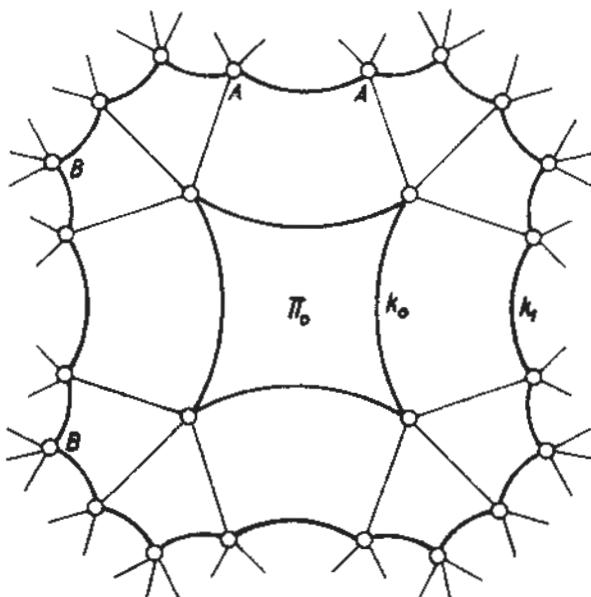


Fig. 3.

Der  $i$ -te Gürtel ist die Gesamtheit jener Elementarenpolygone  $\{p, q\} = \Pi$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), die Eckpunkte auf der Grenzlinie  $k_{i-1}$  besitzen, wobei die Elemente  $\Pi$  nicht zum Gürtel  $(i-1)$  gehören und  $\Pi_0$  der 0-te Gürtel ist; die Anzahl der Polygone  $\Pi$  im  $i$ -ten Gürtel sei  $z_i$ . Die Grenzlinie  $k_i$  besteht aus dem Seiten der Polygone  $\Pi$  des  $i$ -ten Gürtels; die keinen gemeinsamen Punkt mit Grenzlinie  $k_{i-1}$  haben, ihre Anzahl sei  $x_i$ ; die äußere Grenze des Gürtels  $(k_{i-1}, k_i)$  ist offenbar ein Polygon mit  $x_i$  Eckpunkten.

Indem wir die elementaren Polygone des Mosaik  $\{p, q\}$  in Gürtelreihen gruppiert betrachten, können die Seiten, sowie die Ecken der Elementarpolygone  $\Pi$  im zweierlei Kategorien eingeteilt werden. Grenzkante nennen wir eine Seite von  $\Pi$ , sobald sie eine Seite von  $k_i$  ist; wenn eine Seite von  $\Pi$  die Grenzlinie  $k_i$  mit jener von  $k_{i-1}$  verbindet, soll sie eine Querkante heißen.

Ein Eckpunkt von  $k_i$  heißt *A-Punkt*, wenn aus ihm eine Querkante zu  $k_{i-1}$  ausgeht; wenn aus dem Eckpunkte keine solche Kante ausgeht, sei er ein *B-Punkt*. Da  $p > 3$  ist, kann aus einem *A-Punkt* nur eine Querkante zu  $k_{i-1}$  gerichtet sein.

Nun wollen wir die Anzahl der  $\Pi$ -Polygone der einzelnen Gürtel bestimmen. Es ist einleuchtend, daß

$$(2) \quad z_0 = 1 \quad \text{und} \quad z_1 = p(q-2).$$

Es ist klar, daß die Anzahl der zur Grenzlinie von  $k_1$  gehörenden *A-Punkte*  $z_1$  bzw. *B-Punkte*  $(x_1 - z_1)$  ist. Die  $\Pi$ -Polygone des zweiten Gürtels schliessen sich zu dieser Gürtelgrenze im Falle  $q > 3$  einer Seite von  $k_1$  einzelseitig an, an je einen *A-Punkt*  $(q-4)$ -fach, und an je einen *B-Punkt*  $(q-3)$ -fach; im Falle

$q = 3$  aber schließt sich längs eines in jedem A-Punkte sich begegnenden Grenzkantenpaars, sowie längs durch jedes B-Punktpaare gebildeten Grenzkante je ein  $\Pi$  an  $k_1$  an.

Also gilt in beiden Fällen:

$$z_2 = x_1 + (q-3)(x_1 - z_1) + (q-4)z_1 = (q-2)x_1 - z_1$$

voraus laut (1) und (2)

$$(3) \quad z_2 = cp(q-2).$$

Für die weiteren Gürtel gilt die rekursive Formel:

$$(4) \quad z_i = cz_{i-1} - z_{i-2} \quad (i > 2).$$

Zu dessen Rechtfertigung folgt zunächst nach dem Muster des obigen Gedankenganges

$$z_i = x_{i-1} + (q-3)(x_{i-1} - z_{i-1}) + (q-4)z_{i-1} = (q-2)x_{i-1} - z_{i-1}$$

und

$$(5) \quad z_i + z_{i-1} = (q-2)(x_{i-1} + x_{i-2}) - (z_{i-1} + z_{i-2}).$$

Beide Seiten eines jeden den  $(i-1)$ -ten Gürtel bildenden  $\Pi$  Polygons liefern im Gürtel Querkanten, und längs einer jeden Querkante schließen sich je zwei  $\Pi$  Polygone aneinander. Die Querkanten abgerechnet erzeugen die Elementarpolygone mit den  $(p-2)z_{i-2}$  Seiten noch die Grenzlinien  $k_{i-2}$  und  $k_{i-1}$ , d. h. sie liefern  $x_{i-2} + x_{i-1}$  Grenzlinien, also ist

$$(6) \quad x_{i-2} + x_{i-1} = (p-2)z_{i-1}.$$

Aus (5) und (6) ergibt sich:

$$z_i = [(p-2)(q-2) - 2]z_{i-1} - z_{i-2},$$

d. h. (4) besteht also wirklich.

2. Die Flächenräume  $S_n$  und  $R_n$  sind durch die Anzahl der sie erfüllenden Elementarpolygone  $\sigma_n$  und  $\varrho_n$  charakterisierbar. Es ergibt sich für die Anzahl

$$\sum_{i=0}^n z_i = \sigma_n$$

unter Berücksichtigung von (1) – (4)

$$\sigma_n = \frac{(c-1)z_n - z_{n-1} - 2q}{c-2}.$$

Da aber  $\varrho_n = z_n$  ist, wird der gesuchte Quotient in der Form

$$\frac{\varrho_n}{\sigma_n} = \frac{c-2}{(c-1) - \frac{z_{n-1}}{z_n} - \frac{2q}{z_n}}$$

erscheinen. Aus (4) und (1) ist ersichtlich, daß  $z_n$  streng monoton zunähmend ist, also ist

$$\frac{z_{n-1}}{z_n} < 1.$$

Den Grenzwert, der wirklich existiert, soll

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n-1}}{z_n} = y \quad (y \leq 1)$$

darstellen.

Nach (4) ist aber

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} + \frac{z_{n-2}}{z_{n-1}} = c$$

also ist

$$\frac{1}{y} + y = c.$$

Die kleinere Wurzel dieser Gleichung ist wegen  $c > 2$  und (7)

$$y = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4}}{2}.$$

Aus dem Vorhandensein des Grenzwertes von  $\frac{z_{n-1}}{z_n}$  folgt, daß der Quotient

$\frac{\varrho_n}{\sigma_n}$  auch einen Grenzwert besitzt, da  $\varrho$  eine Konstante und  $z_n$  streng monoton zunähmend ist:

$$(8) \quad G(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_n}{\sigma_n} = \frac{\sqrt{c^2 - 4} - (c - 2)}{2}.$$

Laut (8) und (1) ist die Zahl  $G(p, q)$  irrational. Im Falle der dualen Mosaike  $\{p, q\}$  und  $\{q, p\}$  hat  $G(p, q)$  denselben Wert, der im Falle  $c = 3$  minimal ist.

### Literatur

- [1] A. HEPPE – J. MOLNÁR, Újabb eredmények a diszkrét geometriában, II, *Mat. Lapok*, 13 (1962), 39–72.
- [2] F. KÁRTESZI, Eine Bemerkung über das Dreiecknetz der hyperbolischen Ebene, *Publ. Math. Debrecen*, 5 (1957), 142–146.
- [3] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, (Berlin – Göttlingen – Heidelberg, 1953).
- [4] L. FEJES TÓTH, *Regular Figures*, (Oxford – London – New York – Paris, 1964).



# ÜBER KREISWOLKEN

Von  
G. HAJÓS

Lehrstuhl für Geometrie der Eötvös Loránd Universität, Budapest  
(Eingegangen am 1. Juni 1964.)

1. Eine Menge von in einem ebenen Parallelstreifen liegenden, einander nicht schneidenden Einheitskreisen wird  $k$ -fache Kreiswolke genannt, wenn jede auf den Randgeraden senkrechte Gerade mindestens  $k$  Kreise trifft. Als Breite der Wolke bezeichnen wir die Breite des schmalsten sie enthaltenden Streifens.

A. HEPPE [2] hat bewiesen, daß *die Breite einer  $k$ -fachen Kreiswolke von Einheitskreisen mindestens  $(k - 1)\sqrt{3} + 2$  beträgt.*

Im Folgenden geben wir einen neuen Beweis dieses Satzes. Es sei bemerkt, daß bei Teilwolken der dichtesten gitterförmigen Kreislagerung die angegebene untere Schranke als Breite auftritt.

2. Wir betrachten die im Streifen  $S$  enthaltene  $k$ -fache Kreiswolke  $W$ . Es sei  $b$  die Breite von  $S$  und  $W$ , ferner  $g$  eine Randgerade von  $S$ . Wir nehmen einen Vektor  $\mathbf{a}$  der Länge 2 an, der von  $g$  aus und senkrecht auf  $g$  nach dem Äusseren von  $S$  gerichtet ist und um  $30^\circ$  verdreht den Vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{v}$  ergibt (s. Fig. 1). Unser Beweis beruht auf folgendem Hilfssatz:

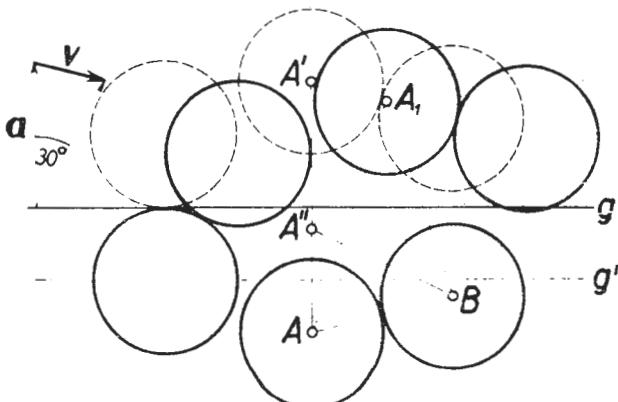


Fig. 1.

*Spiegelt man die Wolke  $W$  an der Randgeraden  $g$  und verschiebt das Spiegelbild um den Vektor  $v$ , so entsteht eine Wolke  $W_1$ , deren Kreise die zu  $W$  gehörenden Kreise nicht schneiden.*

Sind  $A, B$  Mittelpunkte zu  $W$  gehörender Kreise und  $A'$  das Spiegelbild von  $A$  an  $g$ , das um  $v$  verschoben den Punkt  $A_1$  ergibt, so ist  $AA_1 \geq 2$  und  $BA_1 \geq 2$  zu beweisen. Da die Abstände der Punkte  $A, B$  von  $g$  mindestens 1 sind, liegen  $A$  und  $B$  nicht im Inneren des durch  $g$  und  $g'$  berandeten Randstreifens der Breite 1. Ist  $A''$  das Spiegelbild von  $A$  an  $g'$ , so ist  $A'A'' = 2$  und  $g$  die Mittelsenkrechte der Strecke  $AA''$ , folglich ist  $\angle A'A''B \geq 90^\circ$  und  $A''B \geq AB \geq 2$ , wo wir es benutzt haben, daß die Kreise von den Mittelpunkten  $A, B$  einander nicht schneiden. Da  $\angle A'A''A_1 = 30^\circ$ , ist  $\angle A_1A''B \geq 60^\circ$  und die im  $\triangle A_1A''B$  gegenüber diesem Winkel liegende Seite  $BA_1 \geq 2$ , weil sonst diese die (einige) kleinste Seite wäre, gegenüber welcher immer ein Winkel  $< 60^\circ$  liegen muß. Ist  $A \neq A''$ , so ist das  $\triangle AA''A_1$  bei  $A''$  stumpfwinklig (vom Winkel  $150^\circ$ ) und  $AA_1 > A''A_1 = 2$ , also jedenfalls  $AA_1 \geq 2$ , was den Beweis des Hilfssatzes beendet.

Wendet man das Verfahren, durch welches  $W_1$  aus  $W$  entstanden ist, wiederholt an, und zwar immer in derselben Richtung fortschreitend, so ergibt sich als Vereinigung von  $n$  derart erhaltenen Wolken unserem Hilfssatz nach eine  $nk$ -fache Wolke der Breite  $nb - (n-1)(2 - \sqrt{3})$ , da die auf  $g$  orthogonale Komponente des Vektors  $v$  der Länge  $2 - \sqrt{3}$  ist.

3. Wir betrachten im Streifen  $S$  einen Abschnitt der Länge  $l$ , also ein Rechteck der Seiten  $b, l$ . Projiziert man die Kreise von  $W$  orthogonal auf  $g$ , so ist  $g$  durch die Projektionsstrecken überall mindestens  $k$ -fach bedeckt. Da diese Strecken der Länge 2 sind, ist die Anzahl der durch die Seite der Länge  $l$  vollständig enthaltenen Projektionsstrecken mindestens  $\frac{1}{2}k(l-2)$ . Folglich ist

der Gesamtinhalt der in  $R$  vollständig enthaltenen Kreise mindestens  $\frac{\pi}{2}k(l-2)$ . Enthält  $R$  wenigstens zwei Kreise, so ist dieser Gesamtinhalt laut einem Satze von L. FEJES TÓTH ([1], S. 67) kleiner als  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}bl$ . Es gilt also für jedes  $l \geq 6$

$$\frac{\pi}{2}k(l-2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}bl$$

und folglich

$$\frac{b}{k} \leq \sqrt{3}.$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die oben erwähnte  $nk$ -fache Wolke an, so ergibt sich

$$\frac{nb - (n-1)(2 - \sqrt{2})}{nk} \leq \sqrt{3}.$$

Da das für jedes natürliche  $n$  gilt, ist

$$\frac{b - (2 - \sqrt{3})}{k} \geq \sqrt{3},$$

was eben die zu beweisende Behauptung bestätigt.

#### Literaturverzeichnis

- [1] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1953).
- [2] A. HEPPE, Über Kreis- und Kugelwolken, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 209 – 214.



# ZUR STATISTIK DER PRIMFAKTOREN DER NATÜRLICHEN ZAHLEN

Von

F. GYAPJAS und I. KÁTAI

Lehrstuhl für Algebra der Eötvös Loránd Universität, Budapest  
(Eingegangen am 3. Juni 1964.)

Für eine natürliche Zahl  $m$  in der kanonischen Darstellung  $m = \prod_{p|m} p^{a_p}$   
sei

$$V_{k,l}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{p|m \\ p \equiv l \pmod{k}}} a_p,$$

wo  $k, l$  feste natürliche Zahlen sind.

Es bezeichne  $N_n(V_{k,l}, x)$  die Anzahl der natürlichen Zahlen  $m \leq n$  mit

$$\frac{V_{k,l}(m) - \frac{1}{\varphi(k)} \log \log n}{\sqrt{\frac{\log \log n}{\varphi(k)}}} < x,$$

wo  $\varphi(k)$  die Eulersche Funktion bezeichnet. Wir beweisen hier

SATZ 1. Wenn  $(k, l) = 1$ , dann ist

$$\frac{N_n(V_{k,l}, x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log n}}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

mit einer nur von  $k$  und  $l$  abhängigen Konstanten im Restglied.\*

Für  $k=1$  geht Satz 1 in ein Ergebnis von A. RÉNYI und P. TURÁN [1] über.  
Die hier verwendete Methode ist der von [1] sehr ähnlich. Es sei  $s = \sigma + it$  und

$$(1) \quad \lambda(s, u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{iuV_{k,l}(n)}}{n^s} \quad (u \text{ reell}, \sigma > 1).$$

Offenbar ist

$$(2) \quad \lambda(s, u) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{e^{iuV_{k,l}(p)}}{p^s}} = \prod_{p \equiv l(k)} \frac{1}{1 - \frac{e^{iu}}{p^s}} \cdot \prod_{p \not\equiv l(k)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (\sigma > 1).$$

\* Dasselbe gilt für alle im folgenden auftretende Restglieder.

es sei

$$(3) \quad \alpha = \frac{e^{iu} - 1}{\varphi(k)} + 1$$

und

$$(4) \quad \mu(s, u) = \frac{\lambda(s, u)}{\zeta(s)^{\alpha}},$$

wo

$$(5) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (\sigma > 1).$$

Aus (2), (3), (4) und (5) folgt

$$(6) \quad \log \mu(s, u) = \sum_{p \in l(k)} \frac{e^{iu} - 1}{p^s} + \sum_p \frac{1 - \alpha}{p^s} + \sum_{p \in l(k)} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{e^{ium} - 1}{m \cdot p^{ms}} + \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{mp^{ms}}.$$

Es ist stets den Hauptzweig des Logarithmus zu nehmen. Er ist regulär für  $\sigma > 1$ .

Wir bezeichnen mit  $\chi$  die Charaktere mod  $k$ .  $\chi_0(k)$  ist Hauptcharakter mod  $k$ .

Die folgende Formeln sind gut bekannt:

$$(7) \quad \sum_{p \in l(k)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \quad \sigma > 1$$

$$(8) \quad \sum_p \frac{1}{p^s} = \log L(s, \chi_0) - \sum_{p \neq k} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} + \sum_{p \neq k} \frac{1}{p^s}$$

$$(9) \quad \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} = \log L(s, \chi) + g(s) \quad (\sigma > 1),$$

wo  $g(s)$  in der Halbebene  $\sigma > 3/4$  regulär und beschränkt ist.

Aus (6), (7), (8) und (9)

$$(10) \quad \log \mu(s, u) = (\alpha - 1) \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(l) \log L(s, \chi) + g(s, u), \text{ für } \sigma > 1, u \rightarrow 0.$$

Hier ist  $g(s, u)$  eine reguläre Funktion von  $s$  in der Halbebene  $\sigma > 3/4$ , und  $|g(s, u)| = O(|u|)$  (für  $u \rightarrow 0$ ) ebendort.

$\log L(s, \chi)$  ist regulär für  $\chi \neq \chi_0$ ,  $\sigma > 1 - \frac{A}{\log t}$ ,  $|t| \geq t_0$  und  $\sigma > 1 - \frac{A}{\log t_0}$ ,  $|t| \leq t_0$ , deswegen ist (10) regulär ebendort.

Es sei

$$(11) \quad S(n, u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^n e^{iu V_k l(m)} \log \frac{n}{m}.$$

Es ist bekannt, daß

$$(12) \quad S(n, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \lambda(s, u)}{s^2} ds \quad (c > 1).$$

Es sei  $|u| \leq \frac{\pi}{6}$ , dann ist  $\cos u \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  und

$$(13) \quad \operatorname{Re} \alpha \leq 1.$$

Man zerlege  $s(n, u)$  in die Summe  $I_1$  und  $I_2$  zweien Integrale, wo

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu(s, u)}{s^2(s-1)^{\alpha}} ds \\ I_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \mu(s, u)}{s^2} \left| \zeta(s)^{\alpha} - \frac{1}{(s-1)^{\alpha}} \right| ds. \end{aligned}$$

Der Integrand von  $I_2$  ist regulär in  $\sigma \geq 1$  mit Ausnahme von  $s = 1$ , für  $s = 1$  ist der Integrand noch stetig, der Integrationsweg lässt sich also von  $\sigma = c$  nach  $\sigma = 1$  verlagern.

Es ist bekannt, daß

$$(14) \quad \begin{cases} e^{|\log L(1+it, \chi)|} = O(|t|^{\varepsilon}) \\ \frac{L'}{L}(1+it, \chi) = O(|t|^{\varepsilon}) \\ e^{|\log \zeta(1+it)|} = O(|t|^{\varepsilon}), \end{cases}$$

für beliebiges  $\varepsilon > 0$ ,  $|t| \geq t_1(\varepsilon)$ .

Wir zerlegen dann  $I_2$  durch Einführung der Teilpunkte

$$t = -1, -\frac{1}{\log n}, \frac{1}{\log n}, 1.$$

Aus (10) und (14)

$$(15) \quad \mu(s, u) = O(|t|^{\varepsilon}) \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Zunächst ist offensichtlich

$$\int_{1-\frac{i}{\log n}}^{1+\frac{i}{\log n}} \frac{n^s \mu(s, u)}{s^2} \left| \zeta(s)^{\alpha} - \frac{1}{(s-1)^{\alpha}} \right| ds = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

auf die restlichen 4 Teilintegrale wenden wir partielle Integration bezüglich  $n^{1+it}$  an, und wegen (13) und (15) erhalten wir, daß

$$(16) \quad I_2 = O\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad \left(|u| \leq \frac{\pi}{6}\right).$$

Wir zerlegen nun das Integral  $I_1$  auf die Integrale

$$I_{11} = \frac{\mu(1, u)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s}{s^2(s-1)^\alpha} ds$$

und

$$I_{12} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \cdot (s-1)^{1-\alpha}}{s^2} \cdot \frac{\mu(s, u) - \mu(1, u)}{s-1} ds.$$

In  $I_{12}$  kann der Integrationsweg von  $\sigma = c$  nach  $\sigma = 1$  verlegt werden und man findet nach partieller Integration

$$(17) \quad I_{12} = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \quad \left(|u| \leq \frac{\pi}{6}\right).$$

Wir zerlegen das Integral  $I_{11}$  auf die Integrale

$$(18) \quad I_{111} = \frac{\mu(1, u)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s}{(s-1)^\alpha} ds$$

und

$$(19) \quad I_{112} = \frac{-\mu(1, u)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{n^s \cdot (s-1)^{1-\alpha} \cdot (s+1)}{s^2} ds.$$

In  $I_{112}$  kann der Integrationsweg von  $\sigma = c$  nach  $\sigma = 1$  verlegt werden und man findet nach partieller Integration

$$(20) \quad I_{112} = O\left(\frac{n}{\log n}\right) \quad \left(|u| \leq \frac{\pi}{6}\right).$$

Nach der Hankelschen Integralformel für die  $I'$  Funktion ist

$$(21) \quad I_{111} = \mu(1, u) \cdot \frac{n \cdot (\log n)^{\alpha-1}}{I'(e^\alpha)} \quad \left(|u| \leq \frac{\pi}{6}, \quad u \neq 0\right)$$

wobei

$$I'(z) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \quad Rez > 0.$$

Aus (16), (17), (20) und (21)

$$(22) \quad S(n, u) = n \cdot \frac{\mu(1, u)}{\Gamma(\alpha)} \cdot (\log n)^{\alpha-1} + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Es sei

$$(23) \quad s(n, u) = \sum_{m \leq n}^{\text{def}} e^{iu V_{k,l}(m)}.$$

Wegen  $|s(y, u) - s(x, u)| \leq |y - x|$  und  $S(n, u) = \int_1^n \frac{s(x, u)}{x} dx$

ist

$$(24) \quad s(n, u) = \frac{S(n + \lambda n, u) - S(n, u) + \int_n^{n+\lambda n} \frac{s(n, u) - s(x, u)}{x} dx}{\log(1 + \lambda)}$$

für  $\lambda > 0$ .

Aus (24) und (22) für  $\lambda = \sqrt{\frac{|u|}{\log n}}$  folgt

$$\frac{s(n, u)}{n} = \frac{\mu(1, u)}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^{\alpha-1} \left\{ 1 + O\left(\left|\frac{|u|}{\log n}\right|^{1/2}\right) \right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|u| \cdot \log n}}\right)$$

$$(25) \quad |u| \leq \frac{\pi}{6}, \quad u \neq 0.$$

$\frac{s(n, u)}{n}$  ist die charakteristische Funktion zur Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen  $\xi$ , die die Werte

$$V_{k,l}(1), V_{k,l}(2), \dots, V_{k,l}(n)$$

mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt.

Es sei

$$\varphi_n(u) = \frac{s\left(n, u \sqrt{\frac{\log \log n}{\varphi(k)}}\right) \cdot e^{-tu\sqrt{\frac{\log \log n}{\varphi(k)}}}}{n}.$$

$\varphi_n(u)$  ist die charakteristische Funktion zur Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen  $\xi'_n$ , die die Werte

$$\frac{V_{k,l}(m) - \frac{1}{\varphi(k)} \log \log n}{\sqrt{\frac{\log \log n}{\varphi(k)}}} \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

mit gleichen Wahrscheinlichkeit annimmt.

Aus (25)

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(u) = & \frac{\mu \left| 1, \frac{u \cdot \sqrt{\varphi(k)}}{\sqrt{\log \log k}} \right|}{\Gamma(\alpha')} \cdot (\log n)^{\alpha'-1} \left\{ 1 + O \left[ \left( \frac{|u|}{\sqrt{\log \log n \log n}} \right)^{1/2} \right] \right\} + \\
 & + O \left( \frac{\sqrt{\log \log n}}{|u| \cdot \log n} \right) \quad u \neq 0, |u| \leq \frac{\pi}{6} \\
 \alpha' = & \frac{e^{\frac{i u \sqrt{\varphi(k)}}{\sqrt{\log \log n}} - 1}}{\varphi(k)} + 1.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Wir werden einen Satz von C. G. ESSEEN [2] benützen:

Wenn  $F(x)$  und  $G(x)$  beide Verteilungsfunktionen sind, und  $G'(x)$  für alle  $x$  existiert und  $|G'(x)| \leq A$ , ferner  $f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x)$  und  $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dG(x)$  ihre charakteristische Funktionen sind, und die Ungleichung

$$\int_{-T}^T \left| \frac{f(u) - g(u)}{u} \right| du < \varepsilon$$

erfüllt ist, dann für  $-\infty < x < \infty$  ist

$$|F(x) - G(x)| < K \left( \varepsilon + \frac{A}{T} \right),$$

wo  $K$  eine absolute Konstante ist.

Satz 1 folgt aus dem Satz von ESSEEN und (26) ähnlich wie in [1], wenn wir

$$G(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad F(x) = \frac{N_n(V_{k,l}, x)}{n}, \quad T = \frac{\pi}{6} \sqrt{\log \log n},$$

$$\varepsilon = \frac{c_1}{\sqrt{\log \log n}}$$

wählen, wo  $c_1$  eine positive konstante ist. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß

$$\frac{\sum_{m=1}^n (V_{k,l}(m) - \log \log n)^2}{n \cdot \log \log n}$$

beschränkt ist.

Ähnlich wie den Satz 1 kann man beweisen

SATZ 2. Es sei  $f(n)$  eine additive zahlentheoretische Funktion, und seien  $k, l$  natürliche Zahlen,  $(k, l) = 1$ , und sei

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p \equiv l(k) \\ 0 & \text{wenn } p \not\equiv l(k) \end{cases} \quad \text{und} \quad |f(p^s)| \leq s^a \quad (s = 1, 2, \dots)$$

wo  $p$  eine Primzahl ist. Es bezeichne  $N_n(f, x)$  die Anzahl der natürlichen Zahlen  $m \leq n$  mit

$$\frac{f(m) - \frac{\log \log n}{\varphi(k)}}{\sqrt{\frac{\log \log n}{\varphi(k)}}} \prec x$$

dann ist

$$\frac{N_n(f, x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log n}}\right).$$

Es sei  $(l_1, k) = (l_2, k) = 1$ ,  $l_1 \not\equiv l_2 \pmod{k}$ .

Es bezeichne  $N_n(x) = N_n(V, k, l_1, l_2, x)$  die Anzahl der natürlichen Zahlen  $m \leq n$  mit

$$\frac{V_{k, l_1}(m) - V_{k, l_2}(m)}{\sqrt{\frac{2 \log \log n}{\varphi(k)}}} \prec x.$$

dann ist gültig der

SATZ 3.

$$\frac{N_n(x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log n}}\right).$$

Diesen Satz kann man beweisen wie Satz 1. Die Rolle  $\lambda(s, u)$ ,  $\mu(s, u)$  spielen nun

$$\tilde{\lambda}(s, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{iu(V_{k, l_1}(n) - V_{k, l_2}(n))}}{n^s}; \quad \tilde{u}(s, u) = \frac{\tilde{\lambda}(s, u)}{\zeta^{\beta}(s)} \quad \text{wo} \quad \beta = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{\varphi(k)} + 2,$$

weiter hier muß man benützen, daß  $\frac{\sum_{m=1}^n [V_{k, l_1}(m) - V_{k, l_2}(m)]^2}{n \log \log n}$  beschränkt ist.

Es sei  $1 = q_1 < q_2 < \dots$  die Folge der Zahlen, die man in die Formel  $u^2 + v^2$  zerlegen kann. Es bezeichne  $R = R(n)$  die Anzahl der Ungleichungen  $q_r \leq n$ . E. LANDAU hat bewiesen, daß

$$R = c_2 \frac{n}{\sqrt{\log n}} [1 + \sigma(1)] \quad (n \rightarrow \infty),$$

wo  $c_2$  eine numerische Konstante ist. Sei ferner  $r(m)$  die Anzahl der Zerlegungen von  $m$  in zwei Quadrate. Bekannt ist die Relation

$$r(m) = 4 \sum_{d|m} \chi(d) = 4 \cdot \prod_{p^2 \mid m} [1 + \chi(p) + \dots + \chi(p^2)],$$

wo

$$\chi(k) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{wenn } k \equiv -1 \pmod{4} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist  $r(q_\lambda) > 0$ , wenn  $\lambda = 1, 2, \dots, R$ .

Es bezeichne  $N_n(R, \chi)$  die Anzahl von  $r(q_\lambda)$  ( $\lambda = 1, \dots, R$ ) mit

$$r(q_\lambda) < 2^{\frac{1}{2} \log \log n} \times \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \log \log n}$$

Ähnlich wie im Falle des Satzes 1 kann man beweisen den folgenden  
Satz 4.

$$\frac{N_n(R, \chi)}{c \cdot \frac{n}{\sqrt{\log n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log n}}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

### Literaturverzeichnis

- [1] A. RÉNYI and P. TURÁN, On a theorem of Erdős-Kac, *Acta Arithm.*, **4** (1958), 71–84.
- [2] C. G. ESSEEN, Fourier Analysis of Distribution Functions, *Acta Math.*, **77** (1945), 1–125.

# ON A NEW PRESENTATION OF THE HYPERBOLIC TRIGONOMETRY BY AID OF THE POINCARÉ MODEL

By

G. HAJÓS and P. SZÁSZ

Department of Geometry and Department of Analysis of the Eötvös Loránd University,  
Budapest

(Received June 22, 1964)

One of us [1] has shown that the POINCARÉ circle model [2] (to be easily described by means of elementary geometry) furnishes by aid of three simple elementary geometrical lemmata directly two relations of the hyperbolic trigonometry from which the complete trigonometry of the hyperbolic plane may be easily deduced. In what follows we show a presentation of the hyperbolic trigonometry by aid of the POINCARÉ circle model using only the first of the mentioned three lemmata. The reasoning is not as direct, may be said nevertheless simple enough [3].

Our only lemma is the following:

*If  $X$  is a point in the interior of the circle  $k$  and different from the center  $O$ , and a circle through  $X$  meets  $k$  orthogonally in the points  $\Xi, H$  (fig. 1), then the cut point  $Y$  of the lines  $OX$  and  $\Xi H$  does not depend on the choice of the orthogonally cutting circle through  $X$ .*

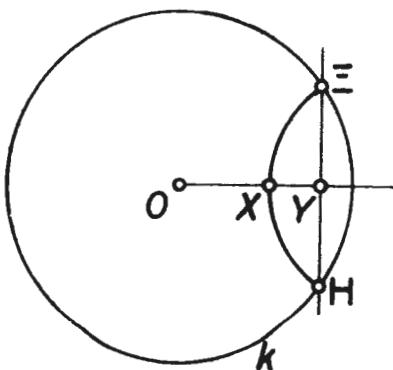


Fig. 1.

This is an immediate consequence of the theorem by which the radical axes of three circles are concurrent.

We consider a POINCARÉ circle model in the fundamental circle  $k$  of center  $O$  and radius  $r$ . In this pseudogeometry the “distance” (i. e. pseudodistance) of the points  $P_1, P_2$  may be defined by

$$(1) \quad \overline{P_1 P_2} = \log(UVP_2 P_1)$$

where  $U$  and  $V$  are the points where the circle (or straight line) through  $P_1, P_2$  orthogonally cuts  $k$ , further  $P_2$  separates on the arc  $\widehat{UV}$  the points  $P_1$  and  $V$  (fig. 2), and the cross ratio

$$(2) \quad (UVP_2 P_1) = \frac{UP_2}{P_2 V} : \frac{UP_1}{P_1 V}$$

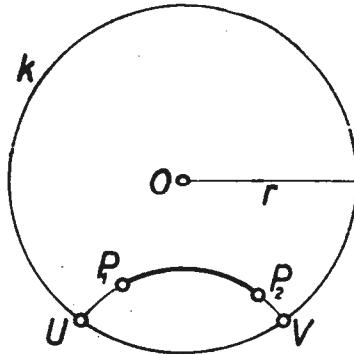


Fig. 2.

is defined by Euclidean distances. This means we have chosen for “length unit” the “segment” the cross ratio for which equals  $e$  (the basis of natural logarithms).

By (1) we get for the Euclidean distance  $OX$  in case  $X \neq O$  expressed by the “distance”  $t = \overline{OX}$

$$(3) \quad OX = r \operatorname{th} \frac{t}{2}.$$

By our lemma there is a point  $Y$  corresponding to  $X$ . In order to express  $OY$  by  $t$  we denote the cut points of  $k$  and line  $OX$  by  $U$  and  $V$  so that  $X$  separates  $O$  and  $V$  (fig. 3). Let  $k^*$  be the circle through  $X$ , symmetrical with respect to the line  $OX$  and cutting orthogonally the circle  $k$ . Since  $U, V, Y, X$  are transformed by inversion with respect to  $k^*$  in  $V, U, O, X$  and the cross ratio (2) is preserved by inversion [4], we have  $(UVYX) = (VUOX)$  and by (1)

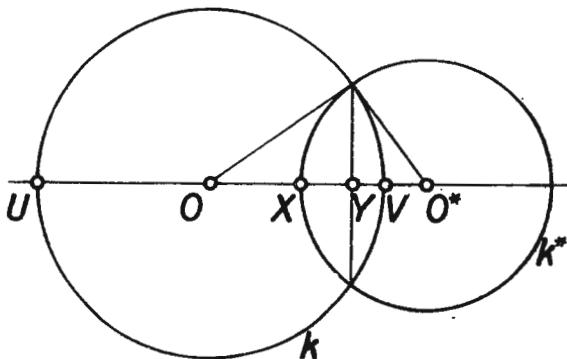


Fig. 3.

$$\overline{XY} = \overline{OX} = t$$

whence

$$\overline{OY} = 2t$$

and by (3)

$$(4) \quad OY = r \operatorname{th} t.$$

This relation permits an easy approach to the hyperbolic trigonometry. We consider the "triangle"  $ABC$  with  $\angle C = 90^\circ$  and of data

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad \angle A = \lambda, \quad \angle B = \mu.$$

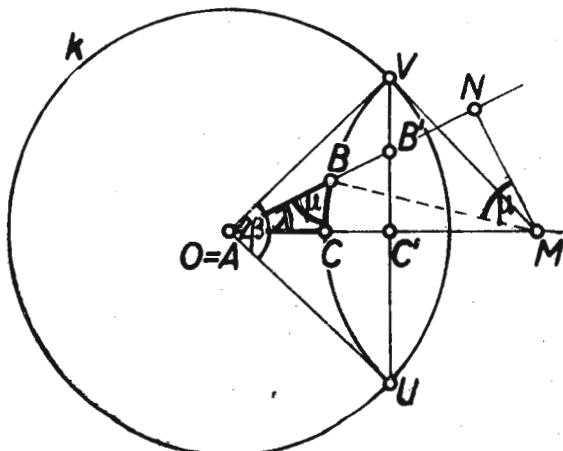


Fig. 4.

We may assume  $A = O$  (fig. 4) since  $k$  and its interior may be inverted in themselves so that  $O$  is the inverse of  $A$ , further angles and cross ratios and correspondingly the data of "triangle"  $ABC$  are preserved by this inversion [5].

We denote by  $U$  and  $V$  the points where the circle through  $B, C$  cuts orthogonally the circle  $k$  so that  $C$  separates on the arc  $\widehat{UV}$  the points  $B$  and  $U$ . Let us further denote  $\angle UAV = 2\beta$ . If the lines  $AB, AC$  meet line  $UV$  in  $B'$  and  $C'$ , we have

$$\cos \lambda = \frac{AC'}{AB'}$$

and since by (4)

$$AC' = r \operatorname{th} b, \quad AB' = r \operatorname{th} c$$

we get

$$(I) \quad \cos \lambda = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}$$

the relation between an acute angle and the intercepting sides of a "triangle".

In order to obtain the relation between the two acute angles and one perpendicular side we denote the center of circle  $UCBV$  by  $M$  and consider the perpendicular  $MN$  to the line  $AB$ . Since  $\angle NMB = \mu$  (and  $MB = MV$ ,  $\angle MAV = \beta$ ) we obtain

$$\cos \mu = \frac{MN}{MB} = \frac{MN}{AM} : \frac{MV}{AM} = \frac{\sin \lambda}{\sin \beta}$$

or

$$(5) \quad \frac{\cos \mu}{\sin \lambda} = \frac{1}{\sin \beta}.$$

By (4) we have

$$r \cos \beta = AC' = r \operatorname{th} b,$$

whence  $\cos \beta = \operatorname{th} b$  and correspondingly

$$\frac{1}{\sin \beta} = \operatorname{ch} b.$$

Substituting this into (5) we obtain the relation sought for

$$(II) \quad \frac{\cos \mu}{\sin \lambda} = \operatorname{ch} b.$$

After having obtained two relations between the five data of a right "triangle" we derive the further four relations. By (I) and (II) we have

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \frac{\cos \mu}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{\operatorname{th} c}{\operatorname{th} b} = \cos \mu \cdot \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} b}$$

and by (I), if applied to the angle  $\mu$ ,

$$\cos \mu = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c},$$

consequently we obtain

$$(III) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}.$$

Elimination of  $\lambda$  from (I) and (III) yields

$$(IV) \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b.$$

By (I) and (III) again we get

$$\sin \lambda = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b} \cdot \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \cdot \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b},$$

whence by (IV)

$$(V) \quad \sin \lambda = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}.$$

Finally, formula (II) applied to sides  $a$  and  $b$  yields by (IV)

$$(VI) \quad \operatorname{ctg} \lambda \operatorname{ctg} \mu = \operatorname{ch} c.$$

Since there is a one-to-one relation between the POINCARÉ circle model and the POINCARÉ half plane model (easily stated by means of elementary geometry) and the equivalence of the latter with hyperbolic plane geometry may be proved without use of hyperbolic trigonometry [6], the same holds for the circle model too. Consequently, the above presentation of relations (I) – (VI) in the circle model proves the validity of these and of the hyperbolic trigonometry also in the hyperbolic plane.

### References

- [1] P. SZÁSZ, Hyperbolische Trigonometrie an dem Poincaréschen Kreismodell abgelesen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 65–69.
- [2] H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Math. (Stockholm)*, 1 (1882), 1–62; especially §2, pp. 6–8 and §12, pp. 58–61.
- [3] A presentation more complicated is to be found at HOWARD EVES – V. E. HOGGATT, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *American Math. Monthly*, 58 (1951), 469–474.
- [4] The invariance of cross ratios is elementary geometrically proved e.g. at P. SZÁSZ, Elementargeometrische Herstellung des Klein-Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 16 (1955), 1–8, especially p. 7, foot-note<sup>9</sup>.
- [5] Cf. op. cit. [3], pp. 470–471.
- [6] See e. g. P. SZÁSZ, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), 243–250, especially §1, pp. 244–247.



# ZUR GLEICHVERTEILUNG MODULO EINS

Von

I. KÁTAI

Lehrstuhl für Algebra der Eötvös Loránd Universität, Budapest  
(Eingegangen am 13. März 1964.)

Es bezeichne  $A$  eine Folge der natürlichen Zahlen

$$(1) \quad (A) \quad 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m < \dots$$

Die Größe  $\varepsilon_n$  sei folgendermaßen definiert:

$$(2) \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

und sei

$$(3) \quad \varrho_A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}.$$

So sind die Folgen (1) auf dem Intervall  $(0, 1]$  ein-eindeutig abgebildet. Wir sagen, daß eine Menge der Folgen (1) hat das Maß  $\alpha$ , wenn das Lebesquesche Maß der zugehörige Menge  $\alpha$  ist. Für eine beliebige reelle Zahl  $x$  bezeichne  $\{x\}$  den Bruchteil von  $x$ ; und sei  $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ . Es sei (A) eine Folge (1) und

$$B_A(N) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n,$$

ferner  $H_A(\alpha; \beta, N)$  die Anzahl der Ungleichungen

$$\{\alpha\nu\} \leq \beta, \quad \nu = 1, 2, \dots, B_A(N),$$

wo  $\alpha$  eine irrationale Zahl ist.

Wir werden beweisen den folgenden Satz.

SATZ 1. Wenn  $\alpha$  eine irrationale Zahl ist, für welche  $\|q\alpha\| > \frac{1}{q^{1+\delta_0}}$  im Fall  $q > q_0 (\delta_0, \alpha)$  ( $q$  ist ganz), dann besteht für fast alle (A)

$$H_A(\alpha; \beta, N) = \beta \cdot B_A(N) + O(N^{\frac{1}{2} + \delta_1}) \quad (N \rightarrow \infty),$$

wo  $\delta_0$  eine beliebige positive Konstante und  $\delta_1 > \delta_0$  ist.

LEMMA 1. (BOREL-CANTELLI) [1]. Sind  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) beliebige Ereignisse mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

dann finden mit Wahrscheinlichkeit 1 gleichzeitig höchstens endlich viele der Ereignisse  $A_n$  statt.

LEMMA 2. [2] Für beliebige reelle  $\gamma$  ist

$$\left| \sum_{v=1}^n e^{2\pi i \gamma v} \right| \leq \min \left( n, \frac{1}{2\|\gamma\|} \right).$$

LEMMA 3. [3]. Wenn  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  reelle Zahlen sind, und

$$\left| \sum_{v=1}^n e^{2\pi i k \varphi_v} \right| = \Psi(k),$$

dann ist im Fall  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$

$$\left| \sum_{\alpha \leq \varphi_v \leq \beta} 1 - (\beta - \alpha)n \right| \leq C \cdot \left| \frac{n}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{\Psi(k)}{k} \right|,$$

wo  $C$  eine numerische Konstante bedeutet.

Es seien  $l, N, k$  natürliche Zahlen, und nehmen wir an, daß  $N > C_1(l)$ . Den Wert  $l$  werden wir später angeben. Beobachten wir nun alle Folgen von den Elementen  $1, 2, \dots, N$ .

Für eine Folge  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq N$  besteht

$$\sum_{\mu=1}^m e^{2\pi i k a_\mu \alpha} = \sum_{v=1}^N \varepsilon_v \cdot e^{2\pi i k \varphi_v},$$

wo

$$\varepsilon_v = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v = a_\mu \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im folgenden bezeichnen  $c_1, c_2, \dots$  positive Konstanten, und seien

$$(4) \quad \Psi(k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) = \sum_{v=1}^N \varepsilon_v \cdot e^{2\pi i k \varphi_v}$$

$$(5) \quad S_{k, N} = \sum_{\varepsilon_1=0, 1} \dots \sum_{\varepsilon_N=0, 1} |\Psi(k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)|^{2l}.$$

Wenn wir über der Konvention  $0^0 = 1$  übereinkommen, dann folgt von den polinomialischen Satz die Gleichung

$$|\Psi(k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)|^l = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_N = l \\ i_v \geq 0}} \frac{l!}{i_1! \dots i_n!} \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_N^{i_N} \cdot e^{2\pi i k \alpha(i_1 + \dots + i_N \cdot N)}$$

und daher

$$|\Psi(k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)|^{2l} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_N = l \\ j_1 + \dots + j_N = l}} \frac{l!^2}{i_1! \dots i_N! j_1! \dots j_N!} \varepsilon_1^{i_1-j_1} \dots \varepsilon_N^{i_N-j_N} \cdot e^{2\pi i k a[(i_1-j_1) \cdot 1 + \dots + (i_N-j_N) \cdot N]}.$$

So

$$S_{k,N} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_N = l \\ j_1 + \dots + j_N = l}} \frac{l!^2}{i_1! \dots i_N! j_1! \dots j_N!} e^{2\pi i k a[(i_1-j_1) \cdot 1 + \dots + (i_N-j_N) \cdot N]} \cdot \sum_{\varepsilon_1=0,1} \dots \sum_{\varepsilon_N=0,1} \varepsilon_1^{i_1-j_1} \dots \varepsilon_N^{i_N-j_N}.$$

Es bezeichne

$$(6) \quad \left( m(i, j) = \begin{array}{c} \text{kurz} \\ \hline i_j = j_i \end{array} \right) \quad m(i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_N) = \sum_{\substack{i_t+j_t > 0 \\ t=1, \dots, N}} 1.$$

Man kann leicht einsehen, daß die Gleichung

$$\sum_{\varepsilon_1=0,1} \dots \sum_{\varepsilon_N=0,1} \varepsilon_1^{i_1-j_1} \dots \varepsilon_N^{i_N-j_N} = 2^{N-m(i,j)}$$

richtig ist. So ist auch die Formel

$$(7) \quad S_{k,N} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_N = l \\ j_1 + \dots + j_N = l}} \frac{l!^2}{i_1! \dots i_N! j_1! \dots j_N!} e^{2\pi i k a[(i_1-j_1) \cdot 1 + \dots + (i_N-j_N) \cdot N]} \cdot 2^{N-m(i,j)}$$

gültig. Sei  $S_{k,N} = S_{k,N}^{(1)} + S_{k,N}^{(2)}$ , wo in der Summe  $S_{k,N}^{(1)}$  solche Elemente stattfinden, für welche  $i_1 = j_1, \dots, i_N = j_N$  und in der Summe  $S_{k,N}^{(2)}$  die anderen. So ist

$$(8) \quad S_{k,N}^{(1)} = \sum_{i_1 + \dots + i_N = l} \left( \frac{l!}{i_1! \dots i_N!} \right)^2 \cdot 2^{N-m(i,j)} \leq l! N! 2^N.$$

Beobachten wir nun  $S_{k,N}^{(2)}$ . Untersuchen wir die Folge von den Paaren  $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_N, j_N)$  für jedes  $i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_N$ . Führen wir eine Klassifikation ein. Zwei Folgen seien in derselben Klasse, wenn sie sich untereinander höchstens im Permutationen ihrer Elementen unterscheiden. Es ist klar von (6), daß  $m(i, j)$  nur von der Klasse abhängt. Es sei bezeichnet mit der Buchstabe  $T$  eine Klasse, und sei ferner

$$\delta_T = \frac{l!^2}{i_1! \dots i_N!} \cdot 2^{N-m(i_1, \dots, j_N)}.$$

So

$$S_{k,N}^{(2)} = \sum_T \delta_T \cdot \sum_{1 \leq x_1 \leq N} \dots \sum_{1 \leq x_t \leq N} e^{2\pi i k a(b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)}$$

wo  $b_1, \dots, b_t$  die von 0 verschiedene  $i_\nu - j_\nu$ , ( $\nu = 1, 2, \dots, N$ ) bedeuten. Der Strich bedeutet, daß in Summe  $x_i \neq x_j$ , wenn  $i \neq j$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $j = 1, \dots, t$ . Natürlich ist  $1 \leq t \leq 2l$ .

Ferner besteht

$$\sum_{i=1}^t \sum_{x_i=1}^N e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)} = \sum_{i=1}^t \sum_{x_i=1}^N e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)} - \\ - \sum_{i \neq j} \sum_{x_i=x_j} e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)} + \dots + (-1)^{t-1} \sum_{\substack{x_1=\dots=x_t \\ 1 \leq x_i \leq N}} e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)}.$$

Aber

$$\left| \sum_{\substack{1 \leq x_i \leq N \\ i=1, \dots, t}} e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)} \right| = \left| \prod_{i=1}^t \sum_{x_i=1}^N e^{2\pi i k \alpha b_i x_i} \right| \leq \prod_{i=1}^t \min \left( N, \frac{1}{2\|k\alpha b_i\|} \right),$$

und

$$\left| \sum_{\substack{x_{i_1}=\dots=x_{i_s} \\ x_{i_1}=1, \dots, N}} e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)} \right| = \left| \prod_{j \neq i_1, \dots, i_s} \left( \sum_{x_j=1}^N e^{2\pi i k \alpha b_j x_j} \right) \right| \cdot \left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i k \alpha x (b_{i_1} + \dots + b_{i_s})} \right| \leq \\ \leq N \cdot \prod_{j \neq i_1, \dots, i_s} \min \left( N, \frac{1}{2\|k\alpha b_j\|} \right).$$

Von  $|b_i| \leq l$ ,  $t \leq 2l$  folgt die Abschätzung

$$\left| \sum_{1 \leq x_i \leq N} e^{2\pi i k \alpha (b_1 x_1 + \dots + b_t x_t)} \right| \leq c_2(l) \left\{ \min^t \left( N, \max_{1 \leq s \leq t} \frac{1}{2\|k\alpha s\|} \right) + N \left( \max_{1 \leq s \leq t} \frac{1}{2\|k\alpha s\|} \right)^{t-2} \right\}$$

Die Anzahl der Klassen ist  $\leq C_3(l)$ , und  $|\delta_T| \leq C_4(l) \cdot 2^N$ , und so

$$S_{k,N} \leq c_5(l) \cdot 2^N \left\{ N^l + \max_{1 \leq \nu \leq l} \frac{1}{\|k\alpha \nu\|} + N \max_{1 \leq \nu \leq l} \frac{1}{\|k\alpha \nu\|} \right\}.$$

Sei nun  $N$  so groß, daß für  $k\nu \leq q_0$

$$\frac{1}{\|k\alpha \nu\|} \leq N^{1/2}.$$

So ist  $S_{k,N} \leq c_6(l) \cdot 2^N \cdot N^{l+2l\delta_0}$ .

Sei nun  $\delta_1 > \delta_0$  eine beliebige Konstante und bezeichne  $\vartheta = \frac{1}{2} + \delta_1$ ,  $M = N^\vartheta$ . Beobachten wir nun die Anzahl der Folgen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ , für welche

$$|\psi(k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)| \geq M,$$

wo  $k$  eine feste natürliche Zahl ist. Diese Anzahl ist

$$\leq c_6(l) 2^N \frac{N^{l+2l\delta_0}}{M^{2l}} = c_6(l) \cdot 2^N \cdot N^{2l(\delta_0 - \delta_1)}.$$

Sei  $l$  so groß, daß  $l_1(\delta_1 - \delta_0) \geq 1$ . Die Anzahl der Folgen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$  für welche  $|\psi(k_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)| \geq M$  bei mindestens ein  $k$  ( $1 \leq k \leq \sqrt{N}$ ), ist kleiner als  $c_6(l) \cdot 2^N \cdot N^{-\delta/2}$ . Es sei  $A_N$  die Menge der Zahlen  $\varrho_A$  für welche

$$\max_{k=1, \dots, [\sqrt{N}]} |\psi(k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)| \geq M.$$

Ihr Maß ist kleiner als  $c_6(l) \cdot N^{-\delta/2}$ . Wenn wir die Borel-Cantellische Lemma und Lemma 3 anwenden, dann wegen  $\sum P(A_n) < \infty$  folgt der Satz [nun  $P(A_n)$  bedeutet den Lebesqueschen Maß von  $A_n$ ].

K. F. ROTH bewies den folgenden Satz. Es sei  $\xi$  eine irrationale algebraische Zahl, und  $\delta > 0$  beliebig klein. Dann existieren höchstens endlich viele ganze  $q > 0$ , für welche  $\|q\xi\| \leq \frac{1}{q^{1+\delta}}$ . Daher folgt der folgende Satz mit den Bezeichnungen des Satzes 1:

SATZ 2. Es sei  $\alpha$  eine beliebige irrationale, algebraische Zahl und  $\delta > 0$  eine beliebige Konstante. Dann ist die Abschätzung

$$H_A(\alpha; \beta, N) = \beta B_A(N) + O(N^{1/2+\delta}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

für fast alle Folgen richtig.

### Literatur

- [1] A. RÉNYI, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962).
- [2] I. M. VINOGRADOV, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Interscience Publishers LTD (Übersetzung von russisch).
- [3] P. ERDŐS and P. TURÁN, On a problem in the theory of uniform distribution I, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, (1948), 1146–1154.
- [4] K. F. ROTH, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, 2 (1955), 1–20 (with corrigendum p. 168).



# ÜBER STABILE KREIS- UND KUGELSYSTEME

Von

K. BÖRÖCZKY

Lehrstuhl für Geometrie, Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 28. September 1964.)

Eine Packung von Kreisen bzw. Kugeln heißt *stabil*, wenn jeder Kreis bzw. jede Kugel durch die nachbarenen festgehalten ist, d. h. kein Kreis bzw. keine Kugel lassen sich ohne gleichzeitige Bewegung der anderen bewegen.<sup>1</sup>

Zahlreiche Beispiele von solchen Systemen sind bekannt, z. B. die Kreis- und Kugelsysteme, die die dichteste gitterförmige Packung liefern, weiter kann man mittels eines beliebigen stabilen Systems von kongruenten Kreisen ein schichtiges stabiles Kugelsystem bilden.

Die interessante Frage: ob es ein stabiles und aus kongruenten Kreisen bzw. Kugeln bestehendes *dünnes* System gibt und was für ein System ein solches sein kann, ist seit langem offen.<sup>2</sup>

In dieser Arbeit geben wir ein stabiles und aus kongruenten Kreisen bestehendes System von der Dichte 0. Durch Schichtung kann man offenbar aus einem solchen System auch in höheren Dimensionen stabile Kugelsysteme von der Dichte 0 bilden. Durch Figur 1 ist ein aus kongruenten Kreisen gebildetes

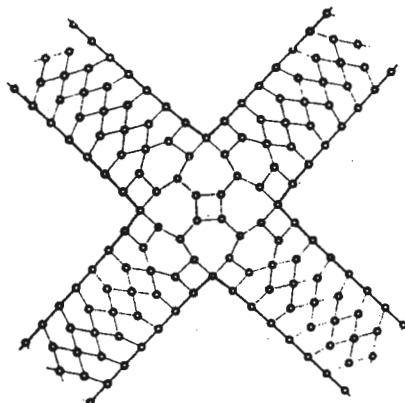


Fig. 1.

<sup>1</sup> S. NIGGLI [5], SINOGOWITZ [6], FEJES TÓTH [2] und DOMINYÁK [1].  
<sup>2</sup> S. z. B. HEECH - LAVES [3] und HEPPE - MOLNÁR [4].

stabiles Kreissystem der Dichte 0 dargestellt, das aus vier unendlichen Zweigen besteht. (Im folgenden werden die Kreise durch ihre Mittelpunkte so gegeben, daß die Mittelpunkte von einander berührenden Kreisen mit Strecken verbunden sind.)

Im folgenden geben wir die Konstruktion eines solchen aus Kreisen bestehenden Zweiges. Bezeichne die orientierte Gerade  $g$  die Richtung des Zweiges und der Symmetriechse desselben, ferner seien  $g_1, g_2, g_3$  mit  $g$  parallele Geraden, die auf derselben (oberen) Seite von  $g$  im Abstand  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$  von  $g$  (Figur 2) liegen. Die Symmetriechse bestimmt zwei Halbzweige. Die Kreise des

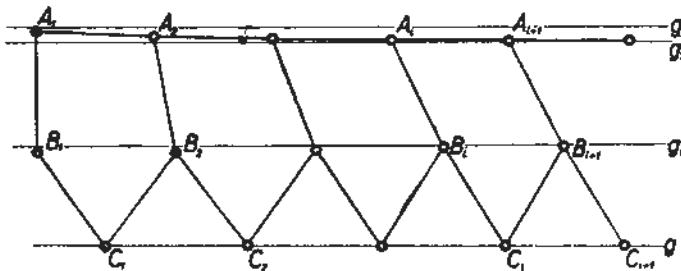


Fig. 2.

oberen Halbzweiges kann man in drei Klassen teilen. Die Mittelpunkte  $A_1, A_2, \dots$  der Kreise von der ersten Klasse liegen auf einer (von unten gesehen) konvexen Kurve, die zwischen  $g_1$  und  $g_2$  liegt und  $A_i A_{i+1} = 2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) besteht. Die Mittelpunkte  $B_1, B_2, \dots$  der Kreise von der zweiten Klasse liegen zwischen  $g$  und  $g_1$  so, daß  $A_i B_i = 2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) besteht. Die Mittelpunkte  $C_1, C_2, \dots$  der Kreise von der dritten Klasse liegen auf der Geraden  $g$  und besteht  $C_i B_i = C_i B_{i+1} = 2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Von den Mittelpunkten des Halbzweiges nehmen wir zuerst die Punkte  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) auf, die in vorerwähnter Weise am Rand liegen und erst dann die Punkte  $B_i, C_i$ . Diese Punkte bestimmen schon eindeutig die Lage der Punkte  $B_i, C_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ). Es ist genug zu zeigen — um die Existenz und die Stabilität des Zweiges (abgesehen von der Stabilität der Punkte  $A_1, B_1$ ), einzusehen, — daß falls die Punkte  $A_{i+1}, A_i, B_i, C_i$  gegeben sind; dann kann man das Polygon  $A_{i+1}A_iB_iC_i$  durch den Punkt  $B_{i+1}$  zu einem Fünfeck ergänzen, das die Seitenlänge 2 hat und sich zu einem konvexen Fünfeck so ergänzen läßt, daß die Länge seiner Diagonale und der Strecke  $C_i C_{i+1}$  größer als 2 ist. Um das Erwähnte einzusehen, betrachten wir die Figur 3, wo  $A_i A_{i+1} \neq B_i B_i \neq C_i C_i$ . Für die Winkel  $\alpha, \beta$ , die die Halbstrahlen  $B_i A_i$  und  $C_i B_i$  mit  $g$  bestimmen, besteht  $60^\circ < \alpha < 120^\circ < \beta$  und daraus folgt, daß  $BC_i < 2$  und  $2\sqrt{3} \leq A_i C_i, A_{i+1} C_i, A_{i+1} C_i \leq 4$  erfüllt sind. Aus den letzten Ungleichungen folgt, daß  $60^\circ \leq C_i A_i A_{i+1} < 120^\circ, C_i A_{i+1} A_i < 120^\circ, A_{i+1} C_i C_i < 120^\circ \leq 90^\circ$  besteht. Das Dreieck  $C_i C_i A_{i+1}$  enthält das reguläre Dreieck  $C_i C_i D$ . Das Dreieck  $D C_i A_{i+1}$  ist im  $\triangle B_i C_i A_{i+1}$  enthalten, woraus folgt, daß  $D A_{i+1} < 2$  besteht und

weiter, daß  $B_{i+1}$  näher als  $D$  der Geradeng liegt; das bedeutet aber, daß  $B_{i+1}$  unter der Gerade  $g_1$  ist. Wie man leicht einsehen kann, bestehen  $A_{i+1}A_iB_i > A_{i+1}A_iC_i \geq 60^\circ$  und  $A_iA_{i+1}B_{i+1} > A_iA_{i+1}C_i \geq 60^\circ$ , so folgt, daß  $A_iB_{i+1}, A_{i+1}B_i > 2$  ist, weiter  $A_iC_i, A_{i+1}C_i \geq 2\sqrt{3} > 2$ . Der Winkel, den  $g$  und der Halbstrahl  $C_iB_i$  einschließen, ist größer als  $120^\circ$  und  $B_{i+1}C_iC_{i+1} < 60^\circ$ , daraus ergibt sich, daß  $C_iC_{i+1}, B_iB_{i+1} > 2$  besteht.

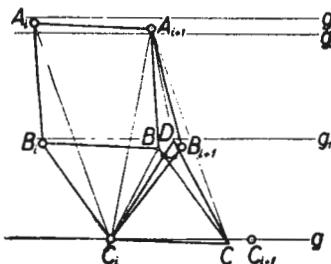


Fig. 3.

Steht  $A_1B_1$  auf  $g$  senkrecht, dann ist kein Kern notwendig, um ein stabiles System mit *drei Zweigen* konstruieren zu können (Figur 4). Ein stabiles System mit vier Zweigen ist auf Figur 1 dargestellt, wo der Kern aus 20 Kreisen besteht. Zum Schluß bemerken wir, daß man „periodische“ stabile Kreissysteme mit beliebig kleiner positiver Dichte auf ähnliche Weise konstruieren kann, aber dann muß man die Asymptote der von unten gesehen konvexen Kurve ein „bisschen“ unten von  $g_2$  aufnehmen (Figur 5).

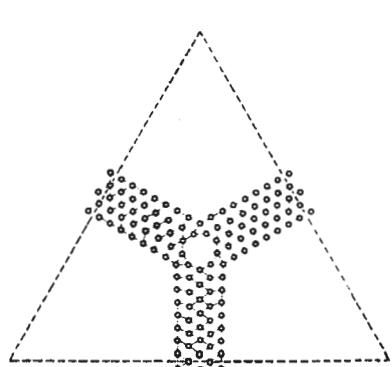


Fig. 4.

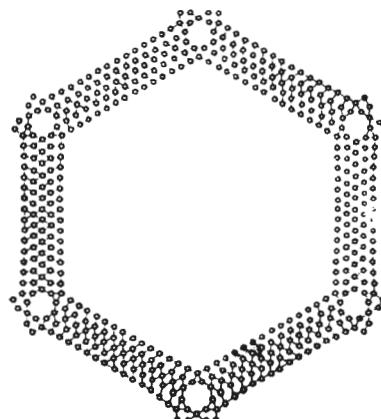


Fig. 5.

### Literatur

- [1] DOMINYÁK, I., Stabilis körrendszerök sűrűségéről, *MTA III. Oszt. Közl.*, **14** (1964), 401–413.
- [2] FEJES TÓTH, L., On the stability of a circle packing, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, **3–4** (1960–61), 63–66.
- [3] HEESCH, H. – LAVES, F., Über dünne Kugelpackungen, *Z. f. Kristallographie*, **85** (1933), 443–453.
- [4] HEPPE, A. – MOLNÁR, J., Újabb eredmények a diszkrét geometriában I., *Matematikai Lapok*, **11** (1960), 330–355.
- [5] NIGGLI, P., Die topologische Strukturanalyse I – II., *Z. f. Kristallographie*, **65** (1927), 391–415; **68** (1928), 404–466.
- [6] SINOGOWITZ, U., Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene, *Z. f. Kristallographie*, **100** (1938), 461–508.

# THE STRUCTURE OF NON-SINGULAR ROW-FINITE MATRICES

By

F. AYRES

Birkbeck College, University of London

(Received June 18, 1963)

## 1. Introduction

Using the terminology of a recent paper by P. VERMES ([5], 16, end of section 1), we shall call an infinite matrix with elements in a field, *non-singular of a certain property* (for example, non-singular row-finite) if it has this property and has a unique two-sided reciprocal with the same property.

When  $R$  is non-singular row-finite, so is its reciprocal  $R^{-1}$ , and the product  $RB$  is non-singular row-finite if and only if  $B$  is. Non-singular row-finite matrices form a multiplicative group which we denote by  $G(R)$ . Well-known sub-groups of  $G(R)$  are the group  $G(N)$  of normal matrices i. e. lower semi-matrices with non-zero diagonal elements and the group  $G(R, C)$  of non-singular row- and columnfinite matrices;  $G(R, C)$  contains the groups  $G(D)$  of non-singular diagonal matrices and the group  $G(P)$  of permutators as well as others.

VERMES ([2], 74 and [3], 248) has introduced another type of row and column-finite matrix, which he calls a *diagonal string*  $S$ , formed from abutting square matrices  $B_1, B_2, \dots$ , of arbitrary orders arranged along the principal diagonal, so that the principal diagonal is also a diagonal of each of  $B_1, B_2, \dots$ , all the other elements of  $S$  being zero. When every  $B_n$  has a non-zero determinant, and therefore a two-sided reciprocal  $B_n^{-1}$ ,  $S$  has the unique two-sided reciprocal  $S^{-1}$  formed by replacing each  $B_n$  by  $B_n^{-1}$ . Since  $S^{-1}$  is row- and column-finite,  $S$  is non-singular row- and column-finite. For brevity, a *non-singular diagonal string* is referred to in this paper simply as a *string* and the square matrices  $B_1, B_2, \dots$ , as the *beads* of the string.

Among the results proved by VERMES [5] are the following:

- (i) every permutator  $P$  is the product of at most two strings.
- (ii) every non-singular row-finite upper-normal matrix is the product of at most two upper-normal strings.
- (iii) every non-singular row-finite matrix  $R$  is the product of a normal matrix and of at most four strings in any order.
- (iv) every non-singular row- and column-finite matrix is the product of at most six strings.

The first two results are the best possible. In this paper, it is shown that the third result can be improved to the expression of  $R$  as the product of a normal matrix and of at most two strings in any order, which is the best possible result, and that in the fourth result only four strings are needed. To obtain these improvements, we make use of a theorem on simple normal combinator, which is proved in the next section.

In proving (iii), VERMES made use of (ii). We shall obtain our improvement of (iii) without using (ii) and then use our result to give a new proof of (ii).

Throughout, we shall use the notation of R. G. COOKE [1], denoting matrices by capital letters  $R, M, \dots$  with elements in a field  $r_{i,j}, m_{i,j}, \dots (i, j = 1, 2, \dots)$  in the  $i$ 'th row and  $j$ 'th column. A permutator  $P$  is a matrix obtained by permuting the rows or columns of the unit matrix  $I$  and if  $P'$  is the transpose of  $P$ ,  $P'P = P'P = I$ .

## 2. Simple Normal Combinators

A matrix  $C_i$  obtained by adding multiples of the  $i$ 'th column of the unit matrix  $I$  to the preceding columns is normal and has rows which are those of  $I$  except for the  $i$ 'th row. We shall call such a matrix a simple normal combinator. Postmultiplication of any matrix  $A$  by a simple normal combinator  $C_i$  has the effect of adding multiples of the  $i$ 'th column of  $A$  to the preceding columns.

In the following theorem, we consider the convergence of an infinite product of simple normal combinator. Since a simple normal combinator is, of course, also a string, having an initial  $i \times i$  bead, an infinite product of simple normal combinator is an example of an infinite product of strings. In this case, however, the simple normal combinator do not necessarily form a descending sequence of strings as defined by Vermes ([4], 385).

**THEOREM 1.** If (i)  $C_i$  is a simple normal combinator with non-zero elements (apart from units on the principal diagonal) confined to the  $i$ 'th row,

(ii)  $\{k(n)\}$  is a sequence of distinct positive integers and (iii)  $R$  is a row-finite matrix, then (a)  $M_n = C_{k(1)} C_{k(2)} \dots C_{k(n)}$  converges as  $n \rightarrow \infty$  to a limit matrix  $M$  which is normal, and (b)  $RM_n$  converges to  $RM$  as  $n \rightarrow \infty$ .

**PROOF.** Apart from the units on the principal diagonal, the non-zero elements of the normal matrix  $M_n$  are confined to the rows  $k(1), k(2), \dots, k(n)$ . A postmultiplication by  $C_{k(n+1)}$  with some non-zero elements in the  $k(n+1)$ 'th row does not affect any of the rows of  $M_n$  preceding the  $k(n+1)$ 'th since the effect of this postmultiplication is to add multiples of the  $k(n+1)$ 'th column of  $M_n$  to preceding columns and there are zeros in the  $k(n+1)$ 'th column of  $M_n$  above the  $k(n+1)$ 'th row. The rows of  $M_n$  which follow the  $k(n+1)$ 'th may, however, be affected by this postmultiplication since there may be some values of  $k(1), k(2), \dots, k(n)$  greater than  $k(n+1)$ . Let  $\lambda$  be an arbitrarily chosen fixed integer. In the sequence  $\{k(n)\}$  of positive integers, which are all different, there can be at most  $\lambda$  which have any of the values  $1, 2, \dots, \lambda$ . Let  $\mu$  be the greatest  $n$  for which  $k(n) \leq \lambda$ . Then for  $n > \mu$ ,  $k(n) > \lambda$ . Thus  $M_{\mu+1} = M_\mu C_{k(\mu+1)}$  is derived from  $M_\mu$  by postmultiplying by  $C_{k(\mu+1)}$ , in which the non-zero elements (other than the units on the principal diagonal) are in the  $k(\mu+1)$ 'th row i. e. in a row after the  $\lambda$ 'th. The first  $\lambda$  rows of  $M_\mu$  are therefore unaffected by this postmultiplication, so that the first  $\lambda$  rows of  $M_{\mu+1}$  are those of  $M_\mu$ .

In subsequent postmultiplications by  $C_{k(n)}$  with  $n > \mu$ , the first  $\lambda$  rows remain constant.

Thus  $M_n$  converges to a limit, say  $M$ , in which for the first  $\lambda$  rows, the elements of  $M$  are those of  $M_\mu$ , so that the elements in the first  $\lambda$  rows of  $M$  on the principal diagonal are units and the elements of these  $\lambda$  rows after the principal diagonal are zero. This holds for any  $\lambda$ , so that  $M$  is normal with units on the principal diagonal and the only other non-zero elements in the rows  $k(1), k(2), \dots$

We now show that the sequence of matrices  $\{RM_n\}$  converges to  $RM$  as  $n \rightarrow \infty$ .

The  $p$ 'th row of  $RM_n$  is derived from the  $p$ 'th row of  $R$  and the columns of  $M_n$ . Since  $R$  is row-finite, the elements of  $RM_n$  are finite sums and in order to obtain the  $p$ 'th row of  $RM_n$  it is not necessary to proceed beyond the  $d(p)$ 'th elements in the columns of  $M_n$ , where  $d(p)$  is the length of the  $p$ 'th row of  $R$ . But the first  $d(p)$  rows of  $M_n$  are just the same as the first  $d(p)$  rows of  $M$  provided  $n > \mu(p)$ , where  $\mu(p)$  depends on  $p$ . Hence the  $p$ 'th row of  $RM_n$  consists of elements which are the same as the elements of the  $p$ 'th row of  $RM$  provided  $n > \mu(p)$ . This shows that  $\{RM_n\}$  converges to  $RM$  as  $n \rightarrow \infty$  and completes the proof of Theorem 1.

It has been pointed out by DR. VERMES that condition (iii) in the enunciation is necessary for the conclusion (b), since although  $RM_n$  exists for every  $n$  even when  $R$  is not row-finite (because  $M_n$  is column-finite), the product  $RM$  may not exist. As an illustration, we can take the first element of the  $i$ 'th row of  $C_i$  as  $c \neq 0$ , ( $i > 1$ ). Then every element of the first column of  $M$ , after the initial unit, is  $c$  and  $RM$  does not exist if  $R$  has a row for which  $r_{i,1} + r_{i,2} + \dots$  diverges.

### 3. Non-singular row-finite matrices

Our main result is the following:

**THEOREM 2.** *Every non-singular row-finite matrix  $R$  is the product of a normal matrix and of at most two strings in any order.*

**PROOF.** If, in a column of a matrix, the first non-zero element is the  $m$ 'th, we say that the depth of the column is  $m$ .

We first show that a normal matrix  $M$  can be found such that  $RM$  is a row-finite matrix which has just one column each of depth 1, 2, ... .

The first row of  $R$  has a last non-zero element, say  $r_{1,k(1)}$ . If there are some columns of  $R$  before the  $k(1)$ 'th which have non-zero elements in the first row, we form from  $R$  another matrix  $R_1$  by subtracting from those columns of  $R$  preceding the  $k(1)$ 'th which have non-zero first elements, such multiples of the  $k(1)$ 'th column as will make all the elements of the first row of  $R_1$  before the  $k(1)$ 'th zero. This process is equivalent to postmultiplication of  $R$  by a simple normal combinator  $C_{k(1)}$  and  $R_1 = RC_{k(1)}$  has just one column viz. the  $k(1)$ 'th of depth 1.  $R_1$  has at least one column of depth 2, for otherwise the first two rows of  $R_1$  would be of rank 1 so that  $R_1$  and hence  $R$  would not have a right-hand reciprocal. Let the  $k(2)$ 'th column of  $R_1$  be the last which is of depth 2, so that  $k(2) \neq k(1)$ . A postmultiplication of  $R_1$  by a simple normal combinator  $C_{k(2)}$  with suitably chosen elements in the  $k(2)$ 'th row produces a matrix  $R_2 =$

$RC_{k(1)}C_{k(2)}$  with just one column each of depths 1, 2 viz. the  $k(1)$ 'th and the  $k(2)$ 'th respectively.

Proceeding in this way, we define a sequence of positive integers  $k(1), k(2), \dots, k(n), \dots$  and a sequence of simple normal combinators  $C_{k(1)}, C_{k(2)}, \dots, C_{k(n)}, \dots$  such that

(i)  $\{k(n)\}$  is a sequence of distinct positive integers and (ii)  $R_n = C_{k(1)}C_{k(2)} \dots C_{k(n)}$  is a matrix with just one column each of depths 1, 2, ...,  $n$ .

By Theorem 1,  $\{R_n\}$  converges as  $n \rightarrow \infty$  to the limit  $RM$  where  $M$  is the limit of  $M_n = C_{k(1)}C_{k(2)} \dots C_{k(n)}$  and is normal.

For any fixed integer  $p$ , the first  $p$  rows of  $RM$  are those of  $RM_n$  provided  $n > \mu(p)$  and we can suppose  $n > p$ . But since  $RM_n$  has just one column each of depths 1, 2, ...,  $n$ , the first  $p$  rows of  $RM_n$  contain the initial elements of the  $p$  columns of depths 1, 2, ...,  $p$  while all the other elements in these  $p$  rows are zero. Thus  $RM$  has just one column each of depths 1, 2, ...,  $p$ , where  $p$  is arbitrary.

No column of  $RM$  consists entirely of zeros since  $R$  and  $M$  and hence the product are non-singular. The columns of  $RM$  are therefore those of a normal matrix, but in a different order, so that there is a permutator  $P$  for which  $RMP = L$ , where  $L$  is normal. Since the matrices involved are all matrices of the group  $G(R)$ , this result may be written  $R = LP'M^{-1}$ .

We now use two lemmas due to VERMES ([5], Theorem 3 and [4], 386).

LEMMA 1. *A permutator is the product of two strings.*

LEMMA 2. *The product of a string and a normal matrix can be expressed also as the product of a normal matrix and a string, and conversely.*

Using Lemma 1, we have  $R = LT_1T_2M^{-1}$  where  $T_1$  and  $T_2$  are strings, and using Lemma 2 twice, we obtain  $R = S_1S_2N$  where  $S_1$  and  $S_2$  are strings and  $N$  is the product of two normal matrices and is therefore normal. The use of Lemma 2 enables the product of two strings and a normal matrix to be taken in any order.

This completes the proof of Theorem 2.

In order to show that this is the best possible result, we construct a non-singular row-finite matrix which cannot be expressed as  $SN$  or  $S_1S_2$ . First we note that if  $d(n)$  is the length of the  $n$ 'th row of a row-finite matrix  $R$  and  $L(n) = \max(d(1), d(2), \dots, d(n))$ , then  $R$  is the product of a normal matrix and a string if and only if, for infinitely many  $n$ ,  $L(n) = n$  (VERMES [5], section (8.1)). If  $R$  is taken as the matrix  $PN$  where  $N$  is any normal matrix, which is not column-finite and  $P$  is the permutator which rearranges the rows of  $N$  with indices 1, 2, 3, ... to rows with indices 2, 4, 1, 6, 8, 3, 10, 12, 5, ... then  $L(n) > n$  for every  $n$ , so that  $R$  is not expressible as  $SN$ . Since  $S_1S_2$  is column-finite whereas  $R$  is not,  $R$  cannot be expressed as the product of two strings.

#### 4. Non-singular row-finite upper normal matrices

In this section we use Theorem 2 to give a new proof of the following theorem due to VERMES ([5], Theorem 2): —

THEOREM 3. *Every non-singular row-finite upper normal matrix is the product of at most two upper normal strings.*

**PROOF.** By Theorem 2,  $U = S_1 NS_2$  where  $U$  is any non-singular row-finite upper normal matrix  $S_1, S_2$  are strings and  $N$  is normal, so that  $S_1^{-1}U = NS_2 = X$  (say).  $S_1^{-1}U$  is a matrix in which the only non-zero elements below the principal diagonal are within the beads of  $S_1$  and  $NS_2$  is a matrix in which the only non-zero elements above the principal diagonal are within the beads of  $S_2$ . Hence  $X$  is a matrix in which the non-zero elements (apart from the ones on the principal diagonal) are

(a) within the beads of  $S_1$  below the principal diagonal and

(b) within the beads of  $S_2$  above the principal diagonal. If  $U$  is not a string, so that  $S_1$  and  $S_2$  are not conformal, then by fusing the beads of  $S_1$  and  $S_2$  as necessary to form larger beads, we can ensure that the corners of the beads of  $S_2$  on the principal diagonal alternate with those of  $S_1$  (see VERMES [5], section 2) and for convenience, we take the first of the elements on the principal diagonal which are either corners of  $S_2$  or  $S_1$  to be a corner of  $S_1$ . Let the beads of  $S_2$  end in columns  $j_1, j_2, \dots$  and the beads of  $S_1$  in columns  $i_1, i_2, \dots$  so that  $i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < i_3 < \dots$

We divide the matrix  $X$  into sections

(a) squares on the principal diagonal with opposite vertices at  $i_1, j_1, i_2, j_2$ , etc. say  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \dots$  Each of these square matrices is non-singular because alternately they are in a block of columns or a block of rows with all the other elements in the block zero.

(b) the remaining sections containing non-zero elements starting from the top and proceeding down and to the right say,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_1 \dots$  as in figure 1.

Since  $\alpha_{2^k+1}$  is non-singular, there exists a column-combinator which is an upper normal bead  $B_k$  extending over the rows and columns with indices  $j_k+1, \dots, j_{k+1}$  and such that postmultiplication of  $X$  by  $B_k$  affects only  $\beta_{2^k+1}$  turning this part of  $X$  into zero. Similarly, since  $\alpha_{2^k}$  is non-singular, there exists a row-combinator, which is a normal bead  $C_k$  extending over the rows and columns

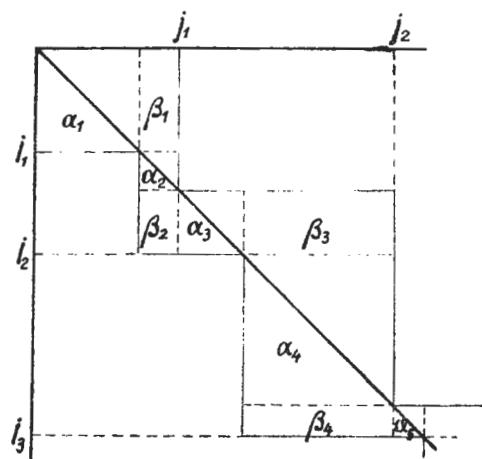


Fig. 1.

with indices  $i_k+1, \dots, i_{k+1}$  that turns  $\beta_{2k}$  into zero by premultiplication. The infinite products  $B = B_1 B_2 \dots$  and  $C = C_1 C_2 \dots$  are strings;  $B$  is *upper normal* and  $C$  is *normal*. The product  $CXB$  is the string  $A$  composed of the beads  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  which is *conformal with both*  $S_1$  and  $S_2$ .

Hence  $A^{-1}CXB = I$  and therefore  $UB = S_1XB = S_1C^{-1}A = T$  (say), where  $T$  is a *string conformal with*  $S_1$ .

Both  $U$  and  $B$  being upper normal, so is the string  $T$ , and we have  $U = TB^{-1}$  which completes the proof.

**COROLLARY.** Every non-singular column-finite normal matrix is the product of at most two normal strings. The proof is by transposition.

### 5. Non-singular row- and column-finite matrices

If  $C$  is a non-singular row- and column-finite matrix Theorem 2 gives  $C = S_1 S_2 N$  where  $S_1, S_2$  are strings and  $N$  is column-finite in addition to being normal. The corollary to Theorem 3 shows that  $N$  is then the product of at most two normal strings, so that  $C$  is the product of at most four strings of which two consecutive ones are normal. By transposition and using Theorem 3, the normal strings can be replaced by upper normal strings. Hence we have the following theorem:

**THEOREM 4.** *Every non-singular row- and column-finite matrix is the product of at most four strings of which any consecutive two can be taken as normal or upper-normal.*

### 6. Acknowledgements

I should like to express my thanks to DR. R. G. COOKE for his encouragement and to DR. P. VERMES for the help and guidance I have received in the preparation of this paper.

### References

- [1] R. G. COOKE, *Infinite matrices and sequence spaces*, Macmillan, (1950).
- [2] P. VERMES, Note on a two-point boundary problem (II), *Quart. Journal of Math., (Oxford)*, (2), 2 (1951), 74–80.
- [3] P. VERMES, Non-associative rings of infinite matrices, *Proceedings Koninkl. Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, A 55, (1952), 245–252.
- [4] P. VERMES, Matrix structure of basic sets of polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Mathematica*, 3—4 (1960/61), 383–387.
- [5] P. VERMES, Multiplicative groups of row- and column-finite infinite matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sectio Mathematica*, 5 (1962), 15–23.

# THE GROUP OF BOTH ROW- AND COLUMN-FINITE INFINITE MATRICES

By

P. VERMES

Birkbeck College, University of London  
(Received January 18, 1964)

The diagonal *string*, with elements in a field, is a generalization of the infinite diagonal matrix, the non-zero elements having been replaced by non-singular square matrices of arbitrary sizes. Every matrix  $B$  which is a finite product of strings belongs to the multiplicative group  $G(R, C)$  of non-singular both row- and columnfinite matrices, i. e. matrices having a unique two-sided reciprocal with the same property. In an earlier paper ([3]<sup>1</sup>, section 6) I proved that every matrix in  $G(R, C)$  can be expressed as the product of at most six strings. F. AYRES ([2], Theorem 4) has reduced that number to *four*, and recently he suggested that it may be reduced to *two*. Here I prove first a result on upper normal matrices belonging to  $G(R, C)$ , and then using that result I prove AYRES' conjecture.

**THEOREM 1.** *Given two strings  $S_1$  and  $S_2$  (not necessarily distinct), every nonsingular upper normal row-finite matrix can be expressed as the product of two strings, one of which is conformal to  $S_1$ , and the other to  $S_2$ .*

**THEOREM 2.** *Every non-singular both row- and column-finite matrix can be expressed as the product of at most two strings. This result is best possible.*

For definitions the reader is referred to [3] and to R. G. COOKE's book ([1]), chapters 1 and 2).

**PROOF OF THEOREM 1.** This is an extension of [3], Theorem 2, with a modification of the proof there, which requires some detailed explanation. Let  $1 = r_1 < r_2 < \dots$  be a sequence of positive integers,  $s_n = r_{n+1} - 1$ , and let  $S(s_n)$  denote a string formed from  $(r_n, s_n)$ -beads. Two strings  $S(q_n)$  and  $S(s_n)$  are called *conformal*, if the sequences  $q_n$  and  $s_n$  have a *common infinite subsequence*. If  $U$  is a non-singular row-finite upper normal matrix, it can be expressed as a trivially convergent infinite right product  $U = U_1 U_2 \dots$ , where  $U_n$  is a *descending sequence* of upper normal beads, as shown in the first part of the proof of [3], Theorem 2. The beads  $U_n$  can then be *expanded* to beads  $U_n^+$  to ensure that the descending sequence  $U_n^+$  *covers*  $U$  ([3], top of page 17). Hence  $U = U_1^+ U_2^+ \dots$

<sup>1</sup> Numbers in square brackets indicate references at the end of this paper.

Let  $U_n^+$  be a  $(p_n, q_n)$ -bead and  $Q_n = \max(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Given two strings  $S_1(s_m)$  and  $S_2(s'_m)$ , we use the fact that the sequences of integers  $p_n, Q_n, s_m, s'_m$  are all monotonically tending to infinity, and we define step by step subsequences  $m_k$  and  $n_k$  of the suffixes  $m$  and  $n$  ensuring that

$$s(m_k) < p(n_k) \leq Q(n_k) \leq s'(m_{k+1}) \text{ when } k \text{ is even,}$$

$$s'(m_k) < p(n_k) \leq Q(n_k) \leq s(m_{k+1}) \text{ when } k \text{ is odd.}$$

Then we *fuse* the beads  $U_n^+$  for which  $n_{k-1} \leq n < n_k$ , and expand the fusion product to an  $(s(m_k+1), s(m_{k+2}))$ -bead when  $k$  is even, and to an  $(s'(m_k+1), s'(m_{k+2}))$ -bead when  $k$  is odd. Thus we obtain an *interlocking* sequence of beads  $V_n$  that covers  $U$ , such that  $U = V_1 V_2 \dots$ , that  $V_1 V_3 \dots$  is a string conformal to  $S_2$ , and that  $V_2 V_4 \dots$  is a string conformal to  $S_1$ .

We now apply the second part of the proof of [3], Theorem 2 to the products  $V_1 V_2, V_3 V_4, \dots$  replacing them by  $W_2 W_1, W_4 W_3, \dots$ , where  $W_n$  is of the same size as  $V_n$ , and obtain the strings  $S_3 = W_1 W_3 \dots$  and  $S_1 = W_2 W_4 \dots$ , and conclude that  $U = S_4 S_3$ . This proves the theorem.

**PROOF OF THEOREM 2.** By Theorem 4 of AYRES [2] every matrix  $A$  in  $G(R, C)$  can be expressed as the product of at most four strings, any consecutive two of which can be upper normal. Hence if  $A$  is not a string, then  $A = S_1 U S_2$ , where  $U$  is non-singular upper normal row-finite, so that, by our Theorem 1,  $U$  can be expressed as  $S_4 S_3$ ,  $S_4$  being conformal to  $S_1$ , and  $S_3$  to  $S_2$ . Hence  $A = (S_1 S_4)(S_3 S_2)$  where both factors are strings. This proves Theorem 2.

## References

- [1] R. G. COOKE, *Infinite matrices and sequence spaces*, (Macmillan, 1950).
- [2] F. AYRES, The structure of non-singular row-finite matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Mathematica*, 7 (1964), 83–88.
- [3] P. VERMES, Multiplicative groups of row- and column-finite infinite matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Mathematica*, 5 (1962), 15–23.

# THE EXPRESSION OF NON-SINGULAR ROW-FINITE MATRICES IN TERMS OF STRINGS

By  
F. AYRES

Birkbeck College, University of London  
(Received February 5, 1964)

1. Following VERMES ([1], §1), we shall call a matrix, with elements in a field, *non-singular of a certain property*, if it has this property and has a unique two-sided reciprocal with the same property.

Let  $\{s_n\}$  be an increasing sequence of positive integers,  $n \geq 1$ , and put  $s_0 = 0$ . If all the non-zero elements of an infinite matrix  $S$  are contained within "beads"  $B_n$  where  $B_n$  is the square of elements in the rows and columns  $s_{n-1} + 1, s_{n-1} + 2, \dots, s_n$ ,  $S$  is called a *diagonal string* and if every  $B_n$  has a non-zero determinant,  $S$  is a non-singular diagonal string, or briefly, a *string*. The sequence  $\{s_n\}$  associated with a string can be referred to as the *bead-sequence* of the string. If the bead-sequences of two strings have a common subsequence,  $S$  and  $T$  are said to be *conformal*.

In a recent paper ([2], Theorem 4), it was shown that every non-singular row- and column-finite matrix is the product of at most four strings, of which any consecutive two can be taken as normal or upper-normal. That result is not the best possible and VERMES has succeeded in reducing the number of strings from four to two [3]. In this paper, I give a new method for proving that every non-singular row- and column-finite matrix can be expressed as the product of two strings  $S, T$  which includes an extension to show that  $S$  and  $T$  can be taken as conformal with any given strings  $A, B$ . In section 2, I give a direct proof of the result for the case of a permutator  $P$ , i. e. an infinite matrix in which each row and each column has just one unit element and then use this with a previous result ([2], Theorem 2) to show that any non-singular row-finite matrix  $R$  can be expressed as the product of two strings  $S, T$  and a normal matrix  $N$ , where  $S$  and  $T$  can be taken as conformal with any given strings  $A, B$ .

2. **THEOREM 1.** Given any two strings  $A, B$  and any non-singular upper-normal rowfinite matrix  $U$ , it is possible to find uppernormal strings  $S, T$  such that (i)  $U = ST$  and (ii) the bead-sequences of  $S$  and  $T$  are sub-sequences of the bead-sequences of  $A$  and  $B$  respectively.

*Note on the enunciation.* In the case when  $A = B$ , (ii) can be replaced by (ii)': the bead-sequences of  $S$  and  $T$  are each subsequences of the bead-sequence of  $A$ . This, of course, does not imply that  $S$  and  $T$  are conformal with each other. An example relating to the conformity of strings is given after Theorem 4.

**PROOF OF THEOREM 1.** The matrix  $U$ , being a non-singular upper-normal row-finite, has a unique two-sided reciprocal  $V$  which is also upper-normal and row-finite.

We partition both matrices into blocks of rows and columns by using subsequences of the bead-sequences  $\{a_n\}$  and  $\{b_n\}$  of the given strings  $A$ ,  $B$ . The subsequences  $\{a_{p(n)}\}$  and  $\{b_{q(n)}\}$  to be used for the partitioning are defined as follows.

Put  $a_{p(1)} = a_1$ .

Let  $l_1$  be the maximum length of the first  $a_{p(1)}$  rows of both  $U$  and  $V$  and  $l_2$  the maximum length of the first  $l_1$  rows of both  $U$  and  $V$  (so that  $l_2 \geq l_1 \geq a_{p(1)}$ ).

Take  $b_{q(1)} > l_2$ , which is possible since  $\{b_n\}$  is an increasing sequence of positive integers.

Next, let  $l_3$  be the maximum length of the first  $b_{q(1)}$  rows of both  $U$  and  $V$  and  $l_4$  the maximum length of the first  $l_3$  rows of both  $U$  and  $V$ .

Take  $a_{p(2)} > l_4$ , which is possible since  $\{a_n\}$  is an increasing sequence of positive integers.

This method of selecting the members of  $\{a_{p(n)}\}$  and  $\{b_{q(n)}\}$  can be continued and the partitioning obtained divides  $U$  into square submatrices, say  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  on the principal diagonal and rectangular submatrices, say  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  immediately to the right of the  $\alpha$ 's.

All the non-zero elements of  $U$  occur in the  $\alpha$ 's or  $\Phi$ 's. At the same time,  $V$  is partitioned into square submatrices  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  and rectangular submatrices  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots$  the  $\beta$ 's occupying the same partition cells as the  $\alpha$ 's and the  $\Psi$ 's the same as the  $\Phi$ 's. The partitioning is illustrated in diagram 1. Fig. 1.

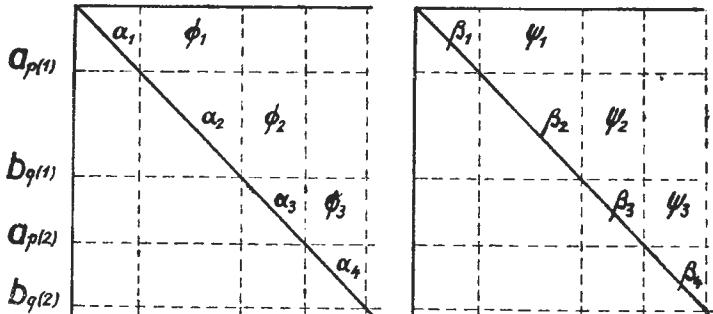


Fig. 1.

In the rectangular block of elements  $\Phi_n$  or  $\psi_n$ , the non-zero elements do not extend beyond the  $l_{2n-1}$ 'th column and in the next rectangular block, non-zero elements do not appear in the columns until after the  $l_{2n}$ 'th row. Hence

$$(1) \quad \Phi_n \Phi_{n+1} = \Phi_n \Psi_{n+1} = \Psi_n \Phi_{n+1} = \Psi_n \Psi_{n+1} = 0.$$

It was to obtain (1) that the partitioning was made in this way.

The product of the two partitioned matrices  $U, V$  is the unit matrix  $I$ , so that

$$(2) \quad \alpha_n \beta_n = I$$

the  $I$  here being a finite unit matrix of the same order as  $\alpha_n$  and  $\beta_n$ .

$$(3) \quad \alpha_n \Psi_n + \Phi_n \beta_{n+1} = 0$$

$$(4) \quad \Phi_n \Psi_{n+1} = 0.$$

The last equation is satisfied automatically by virtue of (1) and from (2) and (3) we obtain  $\beta_n = \alpha_n^{-1}$ , which exists since  $\alpha_n$  is an upper triangular matrix with non-zero diagonal elements

and

$$\alpha_n \Psi_n = -\Phi_n \beta_{n+1} = -\Phi_n \alpha_{n+1}^{-1}.$$

Hence, postmultiplying both sides by  $\Phi_{n+1}$ ,

$$\alpha_n \Psi_n \Phi_{n+1} = -\Phi_n \alpha_{n+1}^{-1} \Phi_{n+1}.$$

The left-hand side of this equation is zero by (1), so that we have, for the matrix  $U$ ,

$$(5) \quad \Phi_n \alpha_{n+1}^{-1} \Phi_{n+1} = 0.$$

A similar result holds for  $V$ .

By making use of (5), we can now identify the partitioned matrix  $U$  with the product of two strings, the first of which,  $S$  has a bead-sequence  $\{a_{p(n)}\}$  and the second  $T$ , a bead-sequence  $\{b_{q(n)}\}$ . For  $S$ , we replace the  $\alpha_n$  of  $U$  by a finite unit matrix

$\Phi_{2n-1}$  by zeros

and

$\Phi_{2n}$  by  $\Phi_{2n} \alpha_{2n+1}^{-1}$

and we form  $T$  by replacing  $\Phi_{2n}$  in  $U$  by zeros, leaving the other elements unchanged. Diagram 2 illustrates the product  $ST$ .

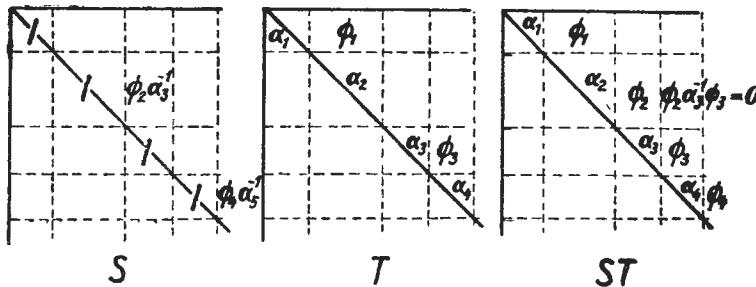


Fig. 2.

If the bead-sequence of  $S$  includes integers between  $a_{p(n)}$  and  $a_{p(n+1)}$ , we amalgamate the elements in the rows and columns  $a_{p(n)+1}, a_{p(n)+2}, \dots, a_{p(n+1)}$  into a single bead, so that the bead-sequence of  $S$  can be taken as  $\{a_{p(n)}\}$  ( $n \geq 1$ ), a subsequence of  $\{a_n\}$ .

$S$  and  $T$  are both upper normal strings and satisfy the conditions of the enunciation. This completes the proof of Theorem 1.

**COROLLARY.** The theorem is still true if  $U$  is replaced by a column-finite normal matrix  $N$ , the strings  $S$ ,  $T$  in this case, being normal strings.

The proof is by transposition.

We next prove a corresponding theorem for a permutator  $P$ . Since  $PP' = P'P = I$ ,  $P$  is non-singular row-and column-finite.

**THEOREM 2.** Given any two strings  $A$ ,  $B$  and any permutator  $P$ , it is possible to find permutator strings  $S$ ,  $T$  such that (i)  $P = ST$  and (ii) the bead-sequences of  $S$  and  $T$  are subsequences of the bead-sequences of  $A$  and  $B$  respectively.

**PROOF OF THEOREM 2.** As in Theorem 1, we partition the matrices  $P, P'$  into blocks of rows and columns by using the same subsequences  $\{a_{p(n)}\}$ ,  $\{b_{q(n)}\}$  of the bead-sequences of  $A$  and  $B$  as defined earlier, but with  $P$  and  $P'$  replacing  $U$  and  $V$  respectively. Since the length of a row of  $P'$  is the length of the corresponding column of  $P$ ,  $l_1$ , besides being the maximum length of the first  $a_{p(1)}$  rows of  $P$  or  $P'$  is also the maximum length of the first  $a_{p(1)}$  columns of  $P'$  or  $P$ .

Hence the partitioning divides  $P$  into square matrices, say  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  on the principal diagonal, rectangular submatrices  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  immediately to the right of the  $\alpha$ 's, and rectangular submatrices, say  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$  immediately below the  $\alpha$ 's. All the non-zero elements of  $P$  — of which just one exists in any row or column — occur in the  $\alpha$ 's,  $\Phi$ 's or  $\Theta$ 's. At the same time,  $P'$  is partitioned into square submatrices  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \dots$ , rectangular submatrices  $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3, \dots$  immediately below the  $\alpha$ 's and rectangular submatrices  $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3, \dots$  immediately to the right of the  $\alpha$ 's.

As before,  $\Phi_n \Phi_{n+1} = \Phi_n \Theta'_{n+1} = \Theta'_n \Phi_{n+1} = \Theta'_n \Theta'_{n+1} = 0$ .

We now rearrange the first  $b_{q(1)}$  columns of  $P$ , each of which contains just one unit element, so that the column which has a unit in the  $n$ 'th row ( $1 \leq n \leq a_{p(1)}$ ) is placed as the  $n$ 'th column. Such a rearrangement of columns is not unique since the remaining columns of the block of  $b_{q(1)}$  columns, i. e. those with a unit element below the  $a_{p(1)}$ 'th row, can be arranged arbitrarily so long as they do not occupy the first  $a_{p(1)}$  places. After this rearrangement, there are  $a_{p(1)}$  unit elements on the principal diagonal in the places previously occupied by  $\alpha_1$ ,

that the submatrices  $\Phi_1$  and  $\Theta_1$  are both changed to zero matrices. The rearrangement of columns is equivalent to postmultiplication by a permutator  $Q_1$ , consisting of a bead in the first  $b_{q(1)}$  rows and columns followed by a unit matrix in the subsequent rows and columns and the product  $PQ_1$  is a permutator with a unit square matrix in the first  $a_{p(1)}$  rows and columns.

Next, we premultiply  $PQ_1$  by a permutator  $Q_2$  consisting of units on the principal diagonal in the first  $a_{p(1)}$  rows and columns, a bead in the rows and columns  $a_{p(1)} + 1, a_{p(1)} + 2, \dots, a_{p(2)}$  followed by a unit matrix in the subsequent rows and columns, the bead being chosen so that the rows  $a_{p(1)} + 1, a_{p(1)} + 2, \dots, a_{p(2)}$  of  $PQ_1$  are rearranged to give a unit square matrix in the rows and columns  $a_{p(1)} + 1, a_{p(1)} + 2, \dots, b_{q(1)}$ , and consequently zeros in the places originally occupied by the submatrices  $\Phi_2, \Theta_2$ .

$Q_2PQ_1$  is a permutator with a unit square matrix in the first  $b_{q(1)}$  rows and columns.

By alternately postmultiplying and premultiplying by permutators  $Q_n$ , each of which consists of a unit matrix except for a bead on the rows and columns corresponding to  $\alpha_n$  and  $\alpha_{n+1}$ , we obtain  $\dots Q_6 Q_4 Q_2 P Q_1 Q_3 Q_5 \dots = I$

The infinite products  $\dots Q_6 Q_4 Q_2$  and  $Q_1 Q_3 Q_5 \dots$  are permutator strings, say  $S', T'$  respectively, so that  $P = ST$  and clearly, the bead-sequence of  $S$  can be taken as a subsequence of that of  $A$  and the bead-sequence of  $T$  as a subsequence of that of  $B$ . This proves Theorem 2.

We now use the corollary to Theorem 1, Theorem 2 and the result ([1] Theorem 2) that any non-singular row-finite matrix  $R$  can be expressed as  $MPL$  where  $P$  is a permutator and  $M, L$  are normal matrices, to prove.

**THEOREM 3.** *Given any two strings  $A, B$  and any non-singular row-finite matrix  $R$ , it is possible to find a normal matrix  $N$  and strings  $S, T$  such that (i)  $R = STN$  and (ii)  $S$  and  $T$  are conformal with  $A$  and  $B$  respectively.*

**PROOF.** By a lemma of Vermes ([4], 386), the product of a string and a normal matrix can be expressed as the product of a normal matrix and a string and conversely, the strings having the same bead-sequence.

Hence  $R = MPL = MP_1P_2L$  where the bead-sequence of  $P_1$  is a subsequence of that of  $A$  and the bead-sequence of  $P_2$  is a subsequence of that of  $B$  (using Theorem 2).

$R = SJ \cdot P_2L$  where  $S$  is a string with the same bead-sequence as  $P_1$  and  $J$  is normal (using VERMES' lemma).

$R = STKL$  where  $T$  is a string with the same bead-sequence as  $P_2$  and  $K$  is normal.

$R = STN$  where  $N = KL$  is normal. This proves Theorem 3.

The last step — expressing any non-singular row- and column-finite matrix as the product of two strings — is given in Theorem 4.

**THEOREM 4.** *Given any two strings  $A, B$  and any non-singular row- and column-finite matrix  $R$ , it is possible to find strings  $S, T$  such that (i)  $R = ST$  and (ii)  $S$  and  $T$  are conformal with  $A$  and  $B$  respectively.*

**PROOF.** As in the proof of Theorem 3,

$R = MP_1P_2L$  where the bead-sequence of  $P_1$  is a subsequence of that of  $A$  and the bead-sequence of  $P_2$  is a subsequence of that of  $B$ .

$R = Q_1JKQ_2$  where  $Q_1$  is here a string with the same bead-sequence as  $P_1$  and therefore a subsequence of the bead-sequence of  $A$ ,  $Q_2$  is a string with a bead-sequence a subsequence of the bead-sequence of  $B$  and  $J, K$  are normal matrices. Thus  $N = JK$  is normal and since  $R, Q_1$  and  $Q_2$  are all non-singular column-finite matrices, so is  $N$ . Hence, using the corollary to Theorem 1,  $N = N_1N_2$  where  $N_1$  is a string with bead-sequence a subsequence of that of  $Q_1$  and  $N_2$  is a string with a bead-sequence a subsequence of that of  $Q_2$ . Hence  $R = (Q_1N_1) \cdot (N_2Q_2)$ .

$R = S \cdot T$  where  $S = Q_1N_1$  is a string conformal with  $Q_1$ . Since the bead-sequence of  $Q_1$  is a subsequence of the bead-sequence of  $A$ ,  $S$  is conformal with  $A$ . Similarly  $T = N_2Q_2$  is a string conformal with  $B$ . This completes the proof of Theorem 4.

Theorem 4 applies in particular if  $R$  is a string and the following example of upper-normal strings shows that the factors  $S$  and  $T$  can be taken so that no two of  $R, S$  and  $T$  are conformal.

Let the  $(i, j)$ 'th element of  $R$  be given by

$$r_{i,i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$r_{i,i+1} = C_{i+1} \neq 0 \quad (i = 2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots)$$

$$r_{i,j} = 0 \text{ otherwise.}$$

The bead-sequence of  $R$  is  $\{1, 4, 7, \dots\}$ . For  $S$ , take  $s_{i,i} = 1$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ )

$$s_{i,i+1} = \lambda_{i+1} \neq 0 \quad (i = 1, 4, 7, \dots)$$

$$s_{i,i+2} = C_{i+1} \quad (i = 3, 6, 9, \dots)$$

$$s_{i,i+2} = \lambda_{i+2}, C_{i+1} \quad (i = 3, 6, 9, \dots)$$

$$s_{i,j} = 0 \text{ otherwise}$$

and for  $T$  take

$$t_{i,i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$$t_{i,i+1} = c_{i+1} \quad (i = 2, 5, 8, \dots)$$

$$t_{i,i+1} = -\lambda_{i+1} \quad (i = 1, 4, 7, \dots)$$

$$t_{i,i+2} = -\lambda_{i+1}c_{i+2} \quad (i = 1, 4, 7, \dots)$$

$$t_{i,j} = 0 \text{ otherwise.}$$

The bead-sequence of  $S$  is  $\{2, 5, 8, \dots\}$  and that of  $T$  is  $\{3, 6, 9, \dots\}$  so that  $R = ST$  and  $R, S, T$  are non-conformal in pairs.

### References

- [1] P. VERMES, Multiplicative groups of row-and column-finite infinite matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, 5 (1962), 15–23.
- [2] F. AYRES, The structure of non-singular row-finite matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, 7 (1964), 83–88.
- [3] P. VERMES, The group of both row-and column-finite matrices, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, 7 (1964), 89–90.
- [4] P. VERMES, Matrix structure of basic sets of polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest Sectio Math.*, 3—4 (1960/61), 383–387.

# ON TORSION FREE ARTIN RINGS<sup>1</sup>

By

I. N. HERSTEIN

University of Chicago

(Received January 27, 1964)

On a recent visit to Budapest I was told by F. Szász of a result he had proved about the existence of a unit element in a torsion free Artin ring [2]. He had proved the theorem by using results developed about the nature of the additive group of an Artin ring. We present here a very simple, selfcontained proof of this. Although we can not pinpoint a particular spot in the literature where this result can be found it seems fair to say that it has been a part of the folklore of ring theory for some years. Related results can be found in a paper by BAER [1].

By an *Artin ring* we shall mean a ring satisfying the descending chain condition on *right* ideals. We say that  $R$  is *torsion free* if for  $x \neq 0$  in  $R$   $mx = 0$ ,  $m$  an integer, implies that  $m = 0$ .

LEMMA 1. *Let  $R$  be a torsion free Artin ring and let  $N$  be its radical. Then*

1.  $xR = (0)$  with  $x$  in  $R$  implies  $x = 0$ ,
2. for any integer  $m \neq 0$ ,  $mR = R$ ,
3. for any integer  $k$ ,  $R/N^k$  is torsion free.

PROOF. 1. If  $xR = (0)$  then the subsets (where  $n$  varies over the integers)  $A_1 = \{2nx\}$ ,  $A_2 = \{2^2nx\}$ , ...,  $A_k = \{2^k nx\}$ , ... are all right ideals of  $R$  and form a properly descending chain if  $x \neq 0$ . Thus  $x = 0$  results.

2. Given any integer  $m \neq 0$  then  $mR \supset m^2R \supset \dots \supset m^kR \supset \dots$  is a descending chain of right ideals of  $R$ , so must terminate. Hence for some  $k$ ,  $m^kR = m^{k+1}R$ ; since  $R$  is torsion free we get from this  $R = mR$ .

3. Given any integer  $m \neq 0$  and any  $x \neq 0$  in  $N$  then by the above  $x = my$ . Consequently  $xR = myR = ymR = yR$  is a nilpotent right ideal of  $R$ ; this forces  $y$  into  $N$ . We have shown that  $mN = N$ . But then  $mN^k = N^k$ ; if  $\bar{R} = P/N^k$  and if  $m\bar{x} = 0$  then  $mx \in N^k$  whence  $mx = my$  for some  $y$  in  $N^k$ , resulting in  $x = y$ . Thus  $x \in N^k$  and so  $\bar{x} = 0$ . But then  $R/N^k$  is torsion free.

LEMMA 2. *Let  $R$  be a ring and  $A$ ,  $B$  ideals of  $R$ . Suppose that:*

1.  $aR = (0)$  implies  $a = 0$
2.  $R/A$  has a right unit
3.  $R/B$  has a left unit
4.  $AB = (0)$ .

<sup>1</sup> This work was supported by NSF Grant GP-208.

Then  $R$  has a right unit.

PROOF. Let  $e, f$  in  $R$  map respectively on the left unit of  $R/B$  and the right unit of  $R/A$ . Thus for any  $x, y$  in  $R$ ,  $x - xf$  and  $y - ey$  are in  $A, B$  respectively, hence  $(x - xf)(y - ey) = 0$ , and so  $(x - xf)(1 - e)R = (0)$ . By assumption this forces  $(x - xf) = (x - xf)e$  for any  $x \in R$ . Expanding, this gives  $x = xf + xe - xfe = x(f + e - fe)$ . The element  $f + e - fe$  is the required right unit.

We now prove the

**THEOREM.** *A torsion free Artinian ring has a right unit element.*

PROOF. We proceed by induction on the degree of nilpotence of  $N$ , the radical of  $R$ .

If  $N = (0)$ ,  $R$  is semi-simple so must have a two-sided unit.

Suppose that  $N^k = (0)$ ,  $N^{k-1} \neq (0)$ . By Lemma 1  $R = R/N^{k-1}$  is torsion free; moreover, its radical  $N$  is of index of nilpotence  $k - 1$ . Thus by the induction,  $R/N^{k-1}$  has a right unit. However, since  $R/N$  is semi-simple it has a left unit; but  $N^{k-1}N = (0)$ , whence the conditions of Lemma 2 hold true with  $A = N^{k-1}$  and  $B = N$ . Thus  $R$  has a right unit.

### References

- [1] R. BAER, Inverses and zero-divisors, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 630–638.
- [2] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe, *Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences*, **11** (1963), 351–354.

# REIN GEOMETRISCHER BEWEIS EINES SATZES VON N. M. NESTOROVIĆ

Von

E. VERMES

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie der Technischen Universität, Budapest  
(Eingegangen am 20. April 1961.)

## Einleitung

Es ist bekannt, daß in der hyperbolischen Geometrie zur Lösung der Konstruktionsaufgaben das Lineal mit einer einzigen geradlinigen Kante von unbegrenzter Länge, der Zirkel, sowie das Grenzkreislineal und der Hyperzirkel (d. h. ein Instrument, welches das Ziehen von beliebigen Abstandslinien ermöglicht) benutzt wird. Mit diesen Instrumenten können wir:

1. durch zwei gegebene Punkte eine Gerade ziehen;
2. von einem gegebenen Punkt aus mit beliebigen gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben;
3. durch einen gegebenen Punkt den Grenzkreis beschreiben, dessen Achse von dem gegebenen Punkte als Scheitel aus durch einen weiteren gegebenen Punkt bestimmt ist;
4. durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Abstandslinie ziehen.

Sind nun diese Zeicheninstrumente zur unbeschränkten Benutzung gegeben, so können die folgenden Aufgaben ohne weiteres als gelöst betrachtet werden:

1. Es ist der gemeinsame Punkt zweier Geraden zu finden;
2. Es sind die gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines Kreises zu finden;
3. Es sind die gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines Grenzkreises zu finden;
4. Es sind die gemeinsamen Punkte einer Geraden und einer Abstandslinie zu finden;
5. Es sind die gemeinsamen Punkte zweier Kreise zu finden;
6. Es sind die gemeinsamen Punkte eines Kreises und eines Grenzkreises zu finden;
7. Es sind die gemeinsamen Punkte eines Kreises und einer Abstandslinie zu finden;
8. Es sind die gemeinsamen Punkte zweier Grenzkreise zu finden;

9. Es sind die gemeinsamen Punkte eines Grenzkreises und einer Abstandslinie zu finden;

10. Es sind die gemeinsamen Punkte zweier Abstandslinien zu finden.

Unter einer *elementaren Konstruktion* verstehen wir nun die Erzeugung neuer Punkte aus einigen gegebenen oder bereits konstruierten Punkten durch endlich oftmalige Anwendung der erwähnten Zeichenoperationen.<sup>1</sup>

MORDUHAJ – BOLTOVSKOJ hat nun bewiesen<sup>2</sup>, daß aus beliebigen gegebenen Strecken und Winkeln von der Größe  $a, b, c, \dots$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  eine Strecke bzw. ein Winkel von der Größe  $x$  allein mit Zirkel und Lineal bestimmt werden kann, wenn eine beliebige hyperbolische bzw. trigonometrische Funktion von  $x$  als Quadratwurzel aus irgend einem rationalen Ausdruck der hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen von  $a, b, c, \dots$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  mit Koeffizienten aus dem durch Hinzunahme der Quadratwurzel seiner Elemente erweiterten rationalen Zahlkörper dargestellt werden kann.

Wir bezeichnen nach ihm die Konstruktion einer Strecke oder eines Winkels von der Größe  $x$  aus gegebenen Strecken und Winkel von der Größe  $a, b, c, \dots$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  als eine Konstruktion von der zweiten Ordnung und  $k$ -ten Klasse ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), wenn irgend eine beliebige hyperbolische bzw. trigonometrische Funktion  $\varphi(x)$  von  $x$  eine Gleichung von der Gestalt

$$(*) \quad \Pi_k = P_{0k}\varphi^2(x) + P_{1k}\varphi(x) + P_{2k} = 0$$

erfüllt, wobei die Koeffizienten  $P_{ik}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) beliebige ganze rationale Ausdrücke der hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen von  $a, b, c, \dots$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , sowie von den Größen beliebiger Strecken bzw. Winkel sind, die ihrerseits wieder eine Gleichung  $\Pi_{k-1} = 0$  erfüllen.

Er hat bewiesen, daß in den hyperbolischen Ebene alle Konstruktionen von der zweiten Ordnung und beliebiger (endlicher) Klasse mit Hilfe des Zirkels und Lineals ausgeführt werden können.

Auf Grund dieser Tatsache hat N. M. NESTOROVIC folgenden Satz bewiesen:<sup>3</sup>

SATZ. Alle elementaren Konstruktionsaufgaben der hyperbolischen Geometrie sind mit Zirkel und Lineal lösbar.

Er beweist den Satz, indem er zeigt, daß einige Größen, die die in den Grundaufgaben 3, 4, 6 – 10 gesuchten Punkte unmittelbar bestimmen, mit den gegebenen Größen durch Gleichungen der Gestalt (\*) verbunden sind. Der Beweis hat einen algebraischen Charakter und ist weitläufig.

Wir wollen in dieser Arbeit einen elementaren, rein geometrischen Beweis dieses grundlegenden Satzes angeben, unter Zugrundelegung der Abbildung der Ebene durch komplementäre Ordinaten auf sich selbst. Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst einige Eigenschaften dieser Abbildung (§ 1) und dann auf Grund derselben den Satz selbst (§ 2).

<sup>1</sup> Dabei können wir auch willkürliche Hilfspunkte einführen, wofür diese nur den wahren Charakter von Hilfspunkten haben, nämlich den, daß sie beliebig (sei es in der Ebene, sei es auf gegebenen Geraden) angenommen werden können und in keiner Weise auf das Resultat der Konstruktion von Einfluß sind. Man kann jedoch, wie leicht zu sehen ist, auf die Heranziehung willkürlicher Hilfspunkte auch verzichten, sobald mindestens zwei Punkte gegeben sind.

<sup>2</sup> MORDUHAJ – BOLTOVSKOJ [6]

<sup>3</sup> NESTOROVIC [7], [8] und [9], S. 127 – 144

### § 1. Die Abbildung der Ebene durch komplementäre Ordinaten

Wir betrachten zunächst den oberhalb einer Geraden, der  $x$ -Achse, gelegenen Teil der Ebene, fällen von irgend einem Punkte  $P$  aus das Lot  $PX = y$  und ordnen dem Punkte  $P$  den Punkt  $P'$  auf diesem Lote zu, dessen Abstand  $P'X = y'$  von  $x$  durch

$$\Pi(y') + \Pi(y) = \frac{\pi}{2}$$

bestimmt ist, wobei  $\Pi(y)$  zum Lote  $y$  gehörigen Parallelwinkel bezeichnet.

Die Eigenschaften dieser Abbildung wurden zuerst von F. HAUSDORFF analytisch behandelt<sup>4</sup>, dann von H. LIEBMANN mittels raumgeometrischer Betrachtung bewiesen<sup>5</sup>. H. LIEBMANN versuchte diese Eigenschaften auch in der Ebene zu beweisen<sup>6</sup>; allerdings sind einige seiner Gedankengänge nur von heuristischer Art.

Aus der Definition folgt nun sofort, daß die Abbildung eineindeutig und involutorisch ist. Ferner werden die in einem Punkte der  $x$ -Achse auf dieselbe errichteten senkrechten Halbgeraden auf sich selbst abgebildet und die Bilder der Abstandslinien, deren gemeinsame Grundlinie die  $x$ -Achse ist, sind wiederum Abstandslinien, deren Grundlinie ebenfalls die  $x$ -Achse ist.

Wir können nach H. LIEBMANN auf Grund der Engelschen Zuordnung zwischen den Spitzcken und rechtwinkligen Dreiecken auch folgende Sätze leicht beweisen:

**SATZ I.** *Der Geraden, die das eine Ende  $E$  der  $x$ -Achse mit dem Ende der in irgend einem Punkte  $O$  der  $x$ -Achse auf dieselbe errichteten senkrechten Halbgeraden verbindet, entspricht ein Grenzkreis, der  $O$  enthält und dessen Achse  $E$  zum Ende hat; und umgekehrt.*

**SATZ II.** *Der Abstandslinie, die von der Geraden, die die  $x$ -Achse in einem beliebigen Punkte  $O$  senkrecht schneidet, den konstanten Abstand  $c$  hat, entspricht der Halbstrahl, der mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\gamma = \Pi(c)$  einschließt; und umgekehrt.*

**SATZ III.** *Hat eine Gerade mit der  $x$ -Achse ein Lot gemein, so entspricht ihr der Halbkreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt  $O$  des gemeinsamen Lotes und der  $x$ -Achse ist und dessen Halbmesser und das gemeinsame Lot komplementäre Strecken sind (d. h. ihre Parallelwinkel ergänzen sich zu  $\frac{\pi}{2}$ ); und umgekehrt.*

**SATZ IV.** *Die Abbildung ist winkeltreu.*

Auf Grund dieser Tatsache können wir nun in der Ebene folgenden Satz beweisen<sup>7</sup>:

<sup>4</sup> HAUSDORFF [1].

<sup>5</sup> LIEBMANN [4].

<sup>6</sup> LIEBMANN [5], S. 38 – 40.

<sup>7</sup> LIEBMANN hat diesen Satz mittels raumgeometrischer Betrachtung bewiesen.

SATZ V. Einem Zykel<sup>8</sup>, der die  $x$ -Achse in den Punkten  $A$  und  $B$  nicht senkrecht schneidet, entspricht eine Abstandslinie, deren Grundlinie die Bildgerade des Halbkreises über dem Durchmesser  $AB$  ist und deren Abstand von der Grundlinie gleich dem zu dem Schnittwinkel des Zykels mit der  $x$ -Achse gehörigen Parallelwinkel ist. Ist der oberhalb der  $x$ -Achse liegende Teil des gegebenen Zykels im Inneren des Kreises über  $AB$ , so trennt die Grundlinie dieser Abstandslinie dieselbe und die  $x$ -Achse voneinander; in allen übrigen Fällen liegt sie zwischen ihrer Grundlinie und der  $x$ -Achse. — Umgekehrt entspricht einer Abstandslinie, deren Grundlinie mit der  $x$ -Achse ein gemeinsames Lot hat, ein Zykel, der die  $x$ -Achse in zwei Punkten unter einem Winkel schneidet, der gleich dem Parallelwinkel ihres konstanten Abstandes von der Grundlinie ist.

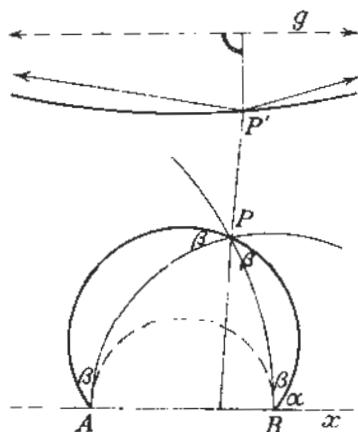


Fig. 1.

Beweis. Es sei  $P$  ein beliebiger Punkt des gegebenen Zykels (Fig. 1). Wir können einen und nur einen Zykel beschreiben durch  $A$  und  $P$ , bzw.  $B$  und  $P$ , der die  $x$ -Achse unter rechten Winkel schneidet. Die Geraden, die diesen beiden Zykeln entsprechen (Sätze I, II und III), schneiden sich im Punkte  $P'$ , der als Bildpunkt dem Punkte  $P$  entspricht und sind parallel zu der Geraden  $g$ , die dem Halbkreis über  $AB$  entspricht (Satz III). Aus der Tatsache, daß zwei Zykeln, die zwei Punkte gemein haben, sich in diesen Punkten unter gleichen Winkeln schneiden, folgt nun, daß die beiden Zykeln, die die  $x$ -Achse in dem

\* Wir verstehen unter einem Zykel die Gesamtheit der Punkte die durch Spiegelung eines Punktes  $P$  an den Geraden eines Büschels entstehen. Haben die Geraden des Büschels einen (eigentlichen) Punkt gemein, so ist der Zykel ein gewöhnlicher Kreis. Sind die Geraden des Büschels parallel zu einander, so ist der Zykel ein Grenzkreis. Haben die Geraden des Büschels ein gemeinsames Lot, so ist er endlich eine Abstandslinie, deren Grundlinie dieses Lot ist. — Ein Punkt heißt innerer Punkt des Zykels, wenn der Zykel ein Kreis ist und der Punkt im Inneren dieses Kreises liegt, oder wenn der Zykel ein Grenzkreis ist und der Punkt auf dem aus einem Punkte desselben parallel zu seinen Achsen gezogenen Halbstrahl liegt, oder wenn der Zykel eine Abstandslinie ist und der Punkt auf dem aus einem Punkte derselben senkrecht zu ihrer Grundlinie gezogenen Halbstrahl liegt; alle übrigen Punkte, die nicht zum Zykel gehören, liegen außerhalb des Zykels.

Punkte  $A$  bzw.  $B$  rechtwinklig schneiden, sich unter dem Winkel  $\pi - 2\beta$  schneiden, wobei  $\beta$  der Schnittwinkel des Kreises über dem Halbmesser  $AB$  mit dem gegebenen Zykel ist. Bezeichnen wir den Schnittwinkel des gegebenen

Zyklens mit der  $x$ -Achse mit  $\alpha$ , so ist  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , also  $\pi - 2\beta = 2\alpha$ . Da die Abbil-

dung winkeltreu ist, so ist auch der Winkel der beiden Bildgeraden gleich  $2\alpha$  und somit sind die aus den Punkten, die den Punkten des gegebenen Zyklens als Bildpunkten entsprechen, auf die Gerade  $g$  gefällten Lote untereinander gleich und liegen die Bildpunkte selbst jenseits oder diesseits der Geraden  $g$ , je nachdem die betreffenden Punkte des Zyklens innerhalb oder außerhalb des Kreises über  $AB$  sind. Diese letztere Tatsache läßt sich leicht einsehen auf Grund der Eigenschaft der komplementären Ordinaten, da  $r'_1 < r'_2$  gilt, falls  $r_1 > r_2$  ist. Damit haben wir bewiesen, daß die Punkte, die den Punkten des gegebenen Zyklens entsprechen, auf der Abstandslinie liegen, die zu der Geraden  $g$  in dem Abstand  $A(\alpha) = a$  gezogen werden kann, wobei  $A(\alpha)$  das zu dem Winkel  $\alpha$  gehörige Parallelot bedeutet.

Es soll nun gezeigt werden, daß irgend ein Punkt dieser Abstandslinie das Bild eines Punktes des gegebenen Zyklens ist. Zu dem Zwecke setzen wir voraus, daß  $Q'$  ein Punkt der Abstandslinie ist, der einem Punkte  $Q$  entspricht, der nicht zu dem gegebenen Zykel gehört.

Wenn der oberhalb der  $x$ -Achse liegende Teil des gegebenen Zyklens ins Innere des Kreises über  $AB$  fällt, so liegt der Fußpunkt des von irgend einem Punkte der Abstandslinie auf die  $x$ -Achse gefällten Lotes zwischen  $A$  und  $B$  und hiermit hat das Lot mit dem Zykel einen von  $Q$  verschiedenen Punkt  $T$  gemein, zu dem ebenfalls  $Q'$  als Bildpunkt gehört, was nicht möglich ist, weil die Abbildung ein-eindeutig ist.

Es sind noch die drei übrigen Fälle zu untersuchen:

Ist nun der gegebene Zykel ein gewöhnlicher Kreis, dessen oberhalb der  $x$ -Achse liegender Teil außerhalb des Kreises über  $AB$  ist, und wäre  $Q$  ein innerer

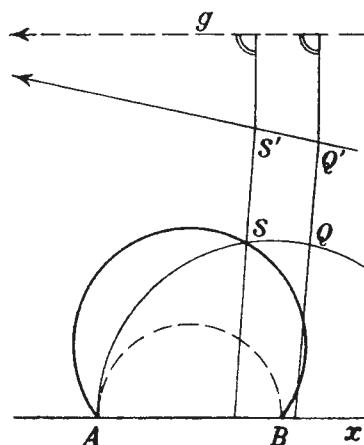


Fig. 2.

Punkt des gegebenen Kreises, so können wir in ähnlicher Weise wie vorher auf Widerspruch gelangen. — Wenn aber  $Q$  außerhalb des gegebenen Kreises liegt (Fig. 2), so schneide der Zykel durch  $A$  und  $Q$ , der die  $x$ -Achse rechtwinklig schneidet, den gegebenen Kreis in einem oberhalb der  $x$ -Achse gelegenen Punkte  $S$ , dessen Bild eine zu der Grundlinie der Abstandslinie parallele Gerade ist (Sätze I, II und III). Es wären aber die Bilder  $S'$  und  $Q'$  der Punkte  $S$  und  $Q$  Punkte dieser Geraden, die gleich weit von der Grundlinie entfernt sind, was unmöglich ist. Die obenerwähnte Abstandslinie und die  $x$ -Achse haben offenbar keinen gemeinsamen Punkt. — Der Beweis der Umkehrung obiges Teilsatzes ist infolge des involutorischen Charakters der Abbildung trivial.

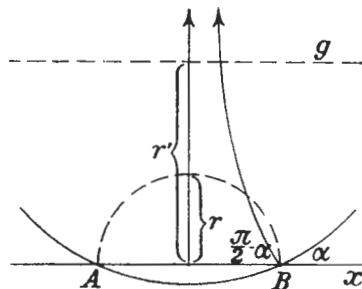


Fig. 3.

Ist weiter der gegebene Zykel ein Grenzkreis, dessen oberhalb der  $x$ -Achse liegender Teil außerhalb des Kreises über  $AB$  ist (Fig. 3), so ist die  $x$ -Achse die Tangente in der Mitte der Strecke  $AB$  der Abstandslinie, die diejenigen Punkte enthält, die den Punkten dieses Grenzkreises entsprechen. Ist  $2r = AB$  und  $r'$  die Länge des gemeinsamen Lotes der  $x$ -Achse und der geraden  $g$ , so

$$\Pi(r) + \Pi(r') = \frac{\pi}{2}.$$

Der Grenzkreis muß die  $x$ -Achse unter dem Winkel  $\Pi(r')$  schneiden, weil die Achse des Grenzkreises durch  $A$  die  $x$ -Achse unter dem Winkel  $\Pi(r)$  schneidet. Der konstante Abstand dieser Abstandslinie von ihrer Grundlinie  $g$  und die Länge des gemeinsamen Lotes der  $x$ -Achse und der Geraden  $g$  sind also gleich miteinander.

Aus der Voraussetzung nunmehr, daß es einem Punkt  $Q'$  der Abstandslinie gibt, der nicht das Bild eines Punktes des gegebenen Grenzkreises ist, können wir ebenso wie vorher auf Widerspruch gelangen. — Die Umkehrung dieser Tatsache können wir auch wegen des involutorischen Charakters der Abbildung leicht beweisen.

Ist endlich der gegebene Zykel (der die  $x$ -Achse in den Punkten  $A$  und  $B$  nicht senkrecht schneidet) eine Abstandslinie, deren oberhalb der  $x$ -Achse liegender Teil außerhalb des Kreises über  $AB$  ist (Abb. 4), so — wegen der zwei vorliegenden Fälle — muß die Abstandslinie, die diejenige Punkte enthält, die den Punkten der gegebenen Abstandslinie entsprechen, die  $x$ -Achse in zwei

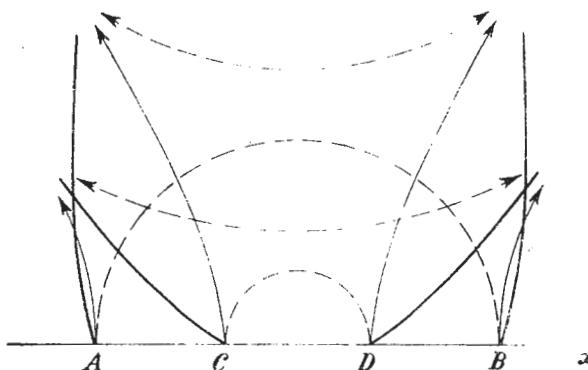


Fig. 4.

Punkten  $C$  und  $D$  schneiden. Dann muß aber wegen des involutorischen Charakters der Abbildung die Abstandslinie durch  $C$  und  $D$  das Bild der gegebenen Abstandslinie durch  $A$  und  $B$  sein. — Die Umkehrung ist auch hier trivial. Damit haben wir diesen Satz vollständig bewiesen.

## § 2. Beweis des Satzes von N. M. NESTOROVIC

Wenn man den Zirkel und das Lineal mit voller Freiheit gebrauchen kann, so können die Aufgaben 1, 2 und 5 als gelöst betrachtet werden. Will man also nachweisen, daß man alle elementaren Aufgaben lösen kann, wenn man nur von dem Zirkel und dem Lineal Gebrauch macht, so genügt es nachzuweisen, daß man auch die Aufgaben 3, 4, 6 – 10 mit Hilfe des Zirkels und des Lineals lösen kann.

Wir bemerken zunächst, daß man zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt die Senkrechte allein mittels Lineals und Zirkels ziehen kann. Auch das gemeinsame Lot zweier gegebener Geraden, sowie die Gerade, die parallel zu zwei gegebenen Geraden ist und mithin die Gerade, die parallel zu einer gegebenen Geraden und senkrecht zu einer anderen Geraden ist, also auch das zu einem gegebenen Parallelwinkel gehörige Lot kann bestimmt werden, wenn man nur von dem Zirkel und dem Lineal Gebrauch macht<sup>9</sup>.

Auf Grund dieser Konstruktionen kann man mittels Lineals und Zirkels zu zwei gegebenen Geraden eine Gerade konstruieren, die mit einer der gegebenen Geraden ein gemeinsames Lot hat und auf der anderen senkrecht ist. Um endlich durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen, können wir die von F. ENGEL angegebene Konstruktion benutzen<sup>10</sup>, welche nur das Fällen von Loten und Schlägen von Kreisen erfordert.

Die fundamentalen Aufgaben 3, 4 und 6 – 10 kann man aber mit Hilfe der soeben genannten Aufgaben auf die Aufgaben 1, 2 und 5 zurückführen,

<sup>9</sup> HILBERT [2], S. 140 – 144 oder [3], Anhang III, S. 159 – 177, insbesondere S. 164 – 168.

<sup>10</sup> S. z. B. LIEBMANN [5], S. 35.

indem wir eine geeignete Gerade zur  $x$ -Achse einer Komplementärtransformation wählen, die man mittels Lineals und Zirkels konstruieren kann. In diesen geeigneten Komplementärtransformationen kann man die Bilder der gegebenen Linien mittels Lineals und Zirkels bestimmen. Damit können wir die Lösung der fundamentalen Aufgaben 3, 4 und 6 – 10 auf die Lösung einer der Aufgaben aus den 1, 2 und 5 oder auf die schon vorhandene Lösung der Aufgaben aus den 3, 4 und 6 – 10 zurückführen.

Um die Aufgabe 3 auszuführen, bestimmen wir diejenige Achse des Grenzkreises, die zu der gegebenen Geraden senkrecht ist und wählen diese Gerade zur  $x$ -Achse der Transformation. Dann entspricht die gegebene Gerade sich selbst und dem Grenzkreise eine Gerade (Satz I).

Wenn die gegebene Gerade eine Achse des Grenzkreises ist, so ist der Schnittpunkt als korrespondierender Punkt zu irgend einem gegebenen Punkte des Grenzkreises zu bestimmen. Um dies zu finden, können wir uns der einfachen Konstruktion von H. LIEBMANN bedienen<sup>11</sup>.

Wir können nunmehr auch die Aufgabe 4 leicht lösen. Wenn nämlich die gegebene Gerade mit der Grundlinie der gegebenen Abstandslinie ein gemeinsames Lot hat, so wählen wir dieses zur  $x$ -Achse der Transformation. Dann entspricht die gegebene Gerade sich selbst und aus der Abstandslinie entsteht eine Gerade (Satz II).

Schneidet die gegebene Gerade die Grundlinie der gegebenen Abstandslinie, oder sind sie parallel, so können wir immer eine Gerade finden, die auf der Grundlinie der Abstandslinie senkrecht liegt, und mit der gegebenen Gerade parallel ist. Wählen wir eine solche Gerade zur  $x$ -Achse der Transformation, so wird die Gerade in einen Grenzkreis (Satz I) und die Abstandslinie in eine Gerade (Satz II) verwandelt. Somit ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

Die Aufgabe 6 lösen wir auf folgende Weise. Wir ziehen durch die Mitte des Kreises eine Parallele zu den Achsen des Grenzkreises und wählen diese Gerade zur  $x$ -Achse der Transformation. Dann entspricht sowohl dem Kreise, wie dem Grenzkreise eine Gerade (Sätze III und I).

Um die Aufgabe 7 auszuführen, wählen wir die vom Mittelpunkte des Kreises auf die Grundlinie der gegebenen Abstandslinie gefällte Senkrechte zur  $x$ -Achse der Transformation. Dann entspricht sowohl dem Kreise, wie der Abstandslinie eine Gerade (Sätze III und II.).

Zur Ausführung der Aufgabe 8 bestimmen wir die Gerade, die parallel zu den Achsen der beiden Grenzkreise ist und wählen diese Gerade zur  $x$ -Achse der Transformation. Diese Transformation verwandelt die gegebenen Grenzkreise in Geraden (Satz I).

Die Aufgabe 9 lösen wir auf folgende Weise. Ist die Grundlinie der gegebenen Abstandslinie parallel zu den Achsen des gegebenen Grenzkreises, so wählen wir diese Grundlinie zur  $x$ -Achse der Transformation, bei der dann aus dem Grenzkreis eine Gerade entsteht (Satz I), und aus der Abstandslinie wieder eine Abstandslinie. Damit ist die Aufgabe auf die vorstehende zurückgeführt.

Wenn dagegen die Grundlinie der gegebenen Abstandslinie nicht parallel zu den Achsen des gegebenen Grenzkreises ist, so wählen wir zur  $x$ -Achse der

<sup>11</sup> LIEBMANN [5], S. 32.

Transformation die Gerade, die parallel zu den Achsen des Grenzkreises und senkrecht zu der Grundlinie der Abstandslinie ist. Diese Transformation verwandelt den Grenzkreis und die Abstandslinie in Geraden (Sätze I und II).

Um endlich die Aufgabe 10 auszuführen, wählen wir die Gerade, die senkrecht zu einer der Grundlinien der beiden gegebenen Abstandslinien ist und mit der anderen ein gemeinsames Lot hat, zur  $x$ -Achse der Transformation. Bei dieser Abbildung geht eine der beiden Abstandslinien über in eine Gerade (Satz II) und die andere verwandelt sich in einen Zykel (Satz V).

Somit ist auch diese Aufgabe auf die vorliegenden zurückgeführt, da es mittels Lineals und Zirkels entscheidbar ist, ob der vorliegende Zykel gewöhnlicher Kreis, Grenzkreis oder Abstandslinie sei.

Damit ist gezeigt, daß auch die Aufgaben 3, 4, 6–10 durch Lineal und Zirkel lösbar sind, und folglich ist der Satz von NESTOROVIC vollständig bewiesen.

### Literaturverzeichnis

- [1] F. HAUSDORFF, Analytische Beiträge zur nicht-euklidischen Geometrie, *Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. II*, 51 (1899), 161–214.
- [2] D. HILBERT, Neue Begründungen der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Annalen*, 57 (1903), 137–150.
- [3] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 9. Aufl., (Stuttgart, 1962).
- [4] H. LIEBmann, Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskischen Geometrie, *Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. II*, 54 (1902), 244–260.
- [5] H. LIEBmann, *Nichteuklidische Geometrie*, 3. Aufl., (Berlin – Leipzig, 1923).
- [6] Д. Д. МОРДУХАЙ — БОЛТОВСКОЙ, О геометрических построениях в пространстве Лобачевского, In memoriam Lobatschewskii, II. (Казань, 1927), 1–16.
- [7] N. NESTOROVITSCH, Sur l'équivalence par rapport à la construction du complexe MB et du complexe E, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)*, 22 (1939), 224–226.
- [8] N. NESTOROVITSCH, Sur la puissance constructive d'un complexe E sur le plan de Lobatschewski, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)*, 43 (1944), 186–188.
- [9] Н. М. НЕСТОРОВИЧ, Геометрические построения в плоскости Лобачевского (Москва–Ленинград, 1951).



# MÉTRIQUE HERMITIENNE ELLIPTIQUE DANS UN ESPACE PROJECTIF QUATERNIONIEN

Par

MARIA TALLINI SCAFATI\*

(à Rome)

(Reçu le 13 avril 1961)

Les recherches dont j'expose les résultats concernent l'introduction et l'étude de la métrique hermitienne elliptique dans un espace projectif quaternionien, c'est-à-dire dans un espace projectif construit sur le corps non-commutatif des quaternions (pour les détails et les démonstrations, cf. [16]).

Cette question est reliée aux études de FUBINI et STUDY qui ont étendu aux espaces projectifs complexes les métriques non-euclidiennes elliptiques et hyperboliques, définies par CAYLEY et KLEIN dans le cas réel. Tout d'abord je voudrais encadrer un peu la question du point de vue historique. Déjà vers la fin du siècle précédent les géomètres s'étaient intéressés au problème de construire un modèle réel de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n^C$ , c'est-à-dire une variété algébrique qui avec ses points réels puisse représenter les points réels et complexes de  $\mathbb{P}_n^C$ . En 1891 C. SEGRE a résolu ce problème en construisant la riemannienne d'un espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n^C$ , comme produit de deux espaces complexes conjugués d'un espace réel à  $2n$  dimensions. Plus tard, en 1899 G. MANNOURY, sans connaître les résultats de C. SEGRE, s'occupait de la question de construire un modèle métrique réel d'un espace complexe  $\mathbb{P}_n^C$ . Il a défini un certain groupe de transformations projectives de  $\mathbb{P}_n^C$  — qui transforme en soi-même une forme hermitienne elliptique — et il a démontré que ce groupe opère transitivement sur les couples point-droite qui s'appartiennent. Alors, fixés arbitrairement deux points de  $\mathbb{P}_n^C$ , à l'aide d'une transformation du groupe, il les transforme en deux points d'une droite «standard» qu'il représente sur la sphère d'Argand-Gauss. Il définit alors comme distance des deux points de  $\mathbb{P}_n^C$  la distance géodésique des points correspondants sur cette sphère. Succesivement il construit une variété à  $2n$  dimensions plongée dans un espace euclidien réel sur laquelle la métrique induite par ceci par relativisation, coïncide avec la métrique qu'il avait précédemment définie.

Dans les premières années de notre siècle, FUBINI et STUDY s'occupaient du problème d'étendre au cas complexe les métriques non-euclidiennes elliptique et hyperbolique introduites par CAYLEY et KLEIN dans les espaces pro-

\* Texte d'une conférence qui a eu lieu le 10 septembre 1963 dans la Société Mathématique Bolyai de Budapest.

jectifs réels, et ils retrouvaient ainsi, dans le cas elliptique, la métrique de Mannoury. En généralisant le point de vue de Klein, ils étudiaient la géométrie relative au groupe de transformations projectives qui transforment en soi-même une forme hermitienne donnée. Pour définir la distance de deux points ils procèdent de la manière suivante: ils fixent une forme hermitienne, ils passent de l'espace  $\mathfrak{P}_n^C$  à l'espace affin complexe et ensuite à l'espace affin réel à  $2n$  dimensions qui est son image réelle. Ici, les zéros de la forme hermitienne (l'absolu de la métrique) forment une sphère à  $(2n-1)$  dimensions, qui est réelle dans le cas hyperbolique traité par Fubini, et complètement imaginaire dans le cas elliptique traité par Study. Donnés deux points  $y, z$  de  $\mathfrak{P}_n^C$ , on considère la droite qui les joint et ensuite le plan caractéristique  $\pi$  qui est son image réelle; ce plan coupe l'hypersphère absolue dans une circonférence  $\Gamma$ . On peut alors définir le cercle  $C$  passant par  $y$  et  $z$  et qui coupe  $\Gamma$  orthogonalement en deux points  $\eta$  et  $\xi$ . FUBINI et STUDY définissent alors la distance  $\delta(yz)$  des deux points fixées par la formule

$$\delta(yz) = \frac{1}{2i} \log (yz\eta\xi).$$

Dans le cas elliptique, puisque l'hypersphère absolue est dépourvue de points réels,  $\eta$  et  $\xi$  sont complexes conjugués et ainsi ne représentent pas des points de  $\mathfrak{P}_n^C$ . Pour donner au rapport anharmonique  $(yz\eta\xi)$  un sens géométrique dans  $\mathfrak{P}_n^C$ , Study est forcé à passer à l'espace bicomplexe, c'est-à-dire à ajouter abstraectement à  $\mathfrak{P}_n^C$  aussi les points complexes de l'espace affin qui est son image réelle. Toutes ces recherches et résultats on été le point de départ pour la théorie des variétés complexes et kähleriennes. Dans le même ordre d'idées, on a commencé à étudier aussi les variétés quaternionniennes. Précisément, on peut généraliser le point de vue de Mannoury dans le cas quaternionien et construire une variété  $P_{4n}$ , plongée dans un espace euclidien, image réelle de  $\mathfrak{P}_n^Q$ , espace projectif quaternionien. Cette variété, comme celle de Mannoury, est douée d'une métrique riemannienne induite. Je me suis proposée de donner une définition de distance dans  $\mathfrak{P}_n^Q$  qui coïncide avec cette métrique induite et qui, pour valeurs respectivement réelles et complexes des coordonnées, coïncide avec celles de Cayley-Klein et de Fubini-Study. Il faut tout d'abord observer qu'il n'est pas convenable d'étendre strictement la définition de Fubini et Study, puisque cela exigerait le passage de l'espace projectif  $\mathfrak{P}_n^Q$  à l'espace affin (et la nécessité de changer le repère chaque fois qu'un des deux points est à l'infini) et en outre dans le cas de Fubini-Study il y a le passage à l'espace bicomplexe, qui dans le cas quaternionien amène des complications. La définition de distance que je donne évite ces difficultés et n'exige pas le passage à un modèle réel de  $\mathfrak{P}_n^Q$ ; c'est une définition complètement intrinsèque. Précisément, au lieu de fixer l'attention sur l'absolu relatif à une forme hermitienne quaternionienne donnée, je considère l'antipolarité associée à la forme, et je définis la distance  $\delta(yz)$  de deux points  $y, z$  par la formule

$$\cos \delta(yz) = \sqrt{yzz^*y^*}$$

où  $y^*$  et  $z^*$  sont les réciproques dans l'antipolarité des points  $y$  et  $z$  sur la droite  $yz$ . Cette définition peut être utilisée naturellement aussi dans les cas réel et

complexe et on prouve qu'elle amène exactement au métriques de Cayley – Klein et de Fubini – Study, et coïncide, pour valeurs complexes des coordonnées, avec la métrique riemannienne de Mannoury. Je rappelle que, dans le cas complexe, si  $A$  est une matrice inversible d'ordre  $n+1$ , on appelle antiréciprocité la correspondance point-hyperplan qui est représentée par l'équation  $U' = \bar{X}A$ ,

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_n] \quad \text{et} \quad X = \begin{vmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

(où  $\bar{A}$  et  $\bar{X}$  indiquent les matrices des nombres conjugués). Si cette antiréciprocité est involutive, on l'appelle antipolarité et alors on a  $A = \bar{A}$  (le cas  $A = -\bar{A}$  est dit antipolarité nulle). On appelle deux points  $y$  et  $z$  réciproques dans une antipolarité si  $y$  appartient à l'hyperplan polaire de  $z$ , et inversement. On réussit à étendre les notions de projectivité et d'antipolarité aussi dans le cas où il s'agit d'un espace projectif droite (ou gauche) construit sur un corps non commutatif, par exemple le corps des quaternions. J'observe, en passant, qu'on ne peut pas au contraire définir les antihomographies.

Considérons donc dans  $\mathbb{P}_n^Q$  une antipolarité  $\Omega$  que nous écrirons dans la forme canonique  $u_i = \bar{x}_i$ , qui est dépourvue de points autoréciproques. Avant tout on prouve que le rapport anharmonique  $(yz^*y^*)$  a toujours une valeur réelle comprise entre 0 et 1. Par conséquent, si l'on pose  $(\bar{y}, z) = \sum_{i=0}^n \bar{y}_i z_i$  on peut définir  $\delta(yz)$  par la formule:

$$\cos \delta(yz) = \sqrt{(\bar{z}, y)(\bar{y}, z)(\bar{y}, \bar{y})(\bar{z}, \bar{z})}.$$

Ensuite on prouve qu'on a  $\delta(yz) = 0$  si et seulement si  $y = z$  et que

$$\delta(yz) = \delta(zy), \quad \text{et} \quad \delta(yz) = \delta(xy) + \delta(x, z).$$

Pour étudier les géodésiques de cette métrique, nous introduisons les notions de chaîne et de chaîne normale. Soient  $y$  et  $z$  deux points de  $\mathbb{P}_n^Q$ . On appelle chaîne le lieu des points  $x = yt + z$ , où  $t$  est un paramètre réel. Une chaîne est manifestement contenue dans la droite quaternionienne  $yz$ , mais il y a plusieurs chaînes passant par deux points, tandis que pour trois points collinéaires non-réciroques par rapport à  $\Omega$  il y a une et une seule chaîne. Si on prend deux points  $y$  et  $z$ , non-réciroques par rapport à  $\Omega$  et si on choisit leurs facteurs de proportionnalité à droite de manière que l'expression  $(\bar{z}, y)$  soit réelle, il y a une et une seule chaîne  $x = yt + z$  qu'on appelle chaîne normale passant par  $y$  et  $z$ . On peut établir le résultat suivant: si on représente la droite quaternionienne sur une hypersphère standard  $\Sigma_4$  de  $S_3$ , les chaînes sont représentées par les cercles de  $\Sigma_4$  et les chaînes normales par les grands cercles de  $\Sigma_4$ . On obtient enfin que les chaînes normales sont les géodésiques de la métrique donnée. En conclusion on a les résultats suivants: en fixant deux points  $y$  et  $z$  de  $\mathbb{P}_n^Q$  il y a une et une seule géodésique qui les joint, si  $y$  et  $z$  ne sont pas réciroques par rapport à  $\Omega$  et cette géodésique coïncide avec la

chaîne normale par  $y$  et  $z$ ; si  $y$  et  $z$  sont réciproques, la géodésique n'est pas unique, étant une des  $\infty^3$  chaînes normales qui passent dans ce cas par  $y$  et  $z$ . Donc les géodésiques sont toutes contenues dans les droites quaternioniennes et ont une longueur finie et égale à  $\pi$ . On peut étudier aussi les variétés géodésiques de dimension  $k$  de  $\mathbb{P}_n^Q$  et on voit qu'elles sont contenues par les droites de  $\mathbb{P}_n^Q$  et pour  $k = 4$  elles coïncident avec les droites.

### Bibliographie

- [1] W. BLASCHKE, Über die Maßbestimmung von Hermite, *Atti Convegno Scienze Fis. Mat. Nat., Roma*, (1939), 391–408.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chap. II, (Paris, Hermann 1955).
- [3] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, (Paris, Gauthier Villars 1950).
- [4] A. CAYLEY, Non euclidean geometry, *Trans, Cambridge Phil. Soc.*, **15** (1894), 37–61.
- [5] G. FANO, *Geometria non euclidea*, (Zanichelli, Bologna, 1935).
- [6] G. FUBINI, Sulla teoria delle forme hermitiane e dei sistemi di tali forme, *Atti Acc. Gioenia, Catania*, (4), **17** (1903).
- [7] G. FUBINI, Sulle metriche definite da una forma hermitiana, *Atti Ist. Veneto*, (63) **2** (1903–04), 501–513.
- [8] F. KLEIN, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, (Berlin, Springer, 1928.)
- [9] G. MANNOURY, Surfaces images, *Nieuw Archief v. Wisk.*, (2) **5** (1899), 112–129.
- [10] E. MARTINELLI, Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale, *Ann. di Mat. pura e appl.*, (4) **49** (1960), 73–90.
- [11] C. SEGRE, Un nuovo campo di ricerche geometriche, *Atti Acc. di Scienze, Torino*, (25) 1889, 276–301; 430–457; 592–612.
- [12] C. SEGRE, Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, *Math. Ann.*, **40** (1892), 413–467.
- [13] C. SEGRE, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **5** (1891), 192–204.
- [14] K. G. C. von STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Bd. III, (Nürnberg, Baer und Raspe 1858).
- [15] E. STUDY, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, *Math. Ann.*, **60** (1905), 321–378.
- [16] M. TALLINI SCAFATI, Metrica hermitiana ellittica in uno spazio proiettivo quaternionale, *Ann. di Mat. pura e appl.*, (4) **40** (1963), 203–233.

# ON GENERALIZED SUMS OF POWERS OF COMPLEX NUMBERS

By  
I. DANCS

Department of Algebra of the Eötvös Loránd University, Budapest  
(Received November 26, 1963)

1. In his book [1] P. TURÁN based a series of applications on the theorems of the following types.

If  $z_1, z_2, \dots, z_n, b_1, \dots, b_n$  are arbitrary complex numbers,  $m$  is a non-negative integer, then

$$(1.1) \quad \max_{m+1 \leq r \leq m+n} \frac{|b_1 z_1^r + b_2 z_2^r + \dots + b_n z_n^r|}{M_j(r)} \geq A(m, n, b_1, \dots, b_n),$$

where  $A(m, n, b_1, \dots, b_n) > 0$  is independent of the  $z_j$ 's, and the norm  $M_j(r)$  may be for example

$$(1.2) \quad M_1(r) = \min_{1 \leq j \leq n} |z_j|^r,$$

$$(1.3) \quad M_2(r) = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|^r,$$

$$(1.4) \quad M_3(r) = \sum_{j=1}^n |b_j| |z_j|^r.$$

In this paper we shall deal with the case (1.3). For the sake of homogeneity we may suppose  $\max_{1 \leq j \leq n} |z_j| = 1 = z_1$ . P. TURÁN in [1] proved if the  $z_j$ 's — and according to that the  $b_j$ 's — are ordered in the way

$$(1.5) \quad 1 = z_1 \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$$

then

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & \max_{m+1 \leq r \leq m+n} |b_1 z_1^r + b_2 z_2^r + \dots + b_n z_n^r| \geq \\ & \geq \left( \frac{n}{A(m+n)} \right)^n \min_{1 \leq j \leq n} |b_1 + b_2 + \dots + b_j| \end{aligned}$$

where for the constant  $A$

$$A \leq 24e^2.$$

For this theorem be found several applications in the analytical number theory. Later P. TURÁN and V. T. SÓS [2] showed modifying of the proof of P. TURÁN [1] that

$$(1.7) \quad A \leq 8e.$$

The modification mentioned above is using of a lemma quoted in this paper as lemma 2.1 in the place of a theorem of H. CARTAN. In another direction P. ERDŐS shows by an example that  $1,321 \leq A$  [2].

S. UCHIYAMA [3] and E. MAKAI [4] for the lower estimation of  $A$  found the  $e$  and  $\frac{2}{\log 2}$  respectively. Recently E. MAKAI proved the estimation

$$4e \leq A.$$

Improving the theorem in another direction E. MAKAI [5] showed by a little but skillful modification of the proof used in [1], [2], the following theorem.

If the  $z_j$ 's – and according to that the  $b_j$ 's – are ordered in the following way

$$(1.8) \quad 0 = |1 - z_1| \leq |1 - z_2| \leq \dots \leq |1 - z_n|$$

then

$$(1.9) \quad \begin{aligned} & \max_{m+1 \leq v \leq m+n} |b_1 z_1 + b_2 z_2^v + \dots + b_n z_n^v| \geq \\ & \geq \frac{1}{4n} \left( \frac{n-1}{8e(m+n)} \right)^{n-1} \min_{1 \leq j \leq n} \frac{|b_1 + \dots + b_j|}{j}. \end{aligned}$$

This result is the best possible in the order of  $m$  – that is  $O(m^{-n+1})$  – as an example of E. MAKAI [5] shows.

In this paper we give a new proof for a little modified form of [1.9].

**THEOREM 1.1.** If  $z_1, z_2, \dots, z_n$  are complex numbers with the maximal absolute value 1 ordered in the following way

$$0 = |1 - z_1| \leq |1 - z_2| \leq \dots \leq |1 - z_n|$$

$m$  is a non-negative integer, the  $b_j$ 's are arbitrary complex numbers, then

$$\begin{aligned} & \max_{m+1 \leq v \leq m+n} |b_1 z_1^v + b_2 z_2^v + \dots + b_n z_n^v| \geq \\ & \geq \frac{1}{2n} \left( \frac{n-1}{8e(m+n)} \right)^{n-1} \min_j |b_1 + \dots + b_j|. \end{aligned}$$

The new idea of the proof is the avoiding of the use of the Newton interpolation, but the Lemma 2.3 takes its origin from the Nörlund representation of the coefficients of Newton-interpolation formula what was used in [1]. Further

we prove a partially generalized form of the Theorem 1.1, which form already have been proved in the cases (1.2) and (1.4)<sup>1</sup>.

**THEOREM 1.2.** *If the  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  $m$  are defined as in Theorem 1.1, the  $B_j(t)$ 's are arbitrary polynomials with degree not exceeding  $k_j \leq m+2$ , then*

$$\begin{aligned} \max_{m+1 \leq j \leq m+n} & |B_1(\nu)z_1^\nu + B_2(\nu)z_2^\nu + \dots + B_n(\nu)z_n^\nu| \geq \\ & \geq \frac{1}{2k} \left( \frac{k}{8e(m+k)} \right)^{k-1} \min_j |B_1(o) + \dots + B_j(o)| \end{aligned}$$

where  $k = n+k_1+\dots+k_n$ .

It would be of interest to drop the restriction  $k_j \leq m+2$ .

For the application of 1.6 we refer to [1], [2], [6]. For his helpful suggestions I am indebted to prof. P. TURÁN.

1. Before turning to the proof of the theorems, we need some lemmata.

**LEMMA 2.1.** Let  $0 < \Delta < 1$ ;  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  arbitrary complex numbers and  $f(z) = \prod_{j=1}^k (z - \xi_j)$ . Then there is an  $r$  with  $0 \leq r \leq \Delta$  such that

$$|f(z)| \geq 2 \left( \frac{\Delta}{4} \right)^k \quad \text{for } |1-z| = r.$$

This lemma was applied originally in [2]. The present form may be found in [5]. For the sake of completeness we reproduce the proof.

Obviously

$$(2.1) \quad |f(z)| = \prod_{j=1}^k |z - 1 - (\xi_j - 1)| \geq \prod_{j=1}^k (|z - 1| - |\xi_j - 1|) \stackrel{\text{def}}{=} |f^*(|z - 1|)|.$$

The right side of (2.1) is a polynomial of  $n^{\text{th}}$  degree in  $|z - 1|$  with real coefficients. Owing to the well-known theorem of Chebisev there is a  $\xi$  with  $0 \leq |\xi - 1| \leq \Delta$  and

$$\max_{0 \leq |z-1| \leq \Delta} |f^*(|z-1|)| = |f^*(|\xi-1|)| \geq 2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)^k.$$

Choosing  $r = |\xi - 1|$  from this and (2.1) the lemma follows.

The following lemma is a remark to the Lemma 2.1, which will be needed to the proof of the Theorem 1.2.

**LEMMA 2.2.** If  $\Delta, \xi_1, \dots, \xi_k$  are defined as above,  $r$  is determined by the previous lemma, and for some  $i, j$  ( $i, j \leq n$ )

$$|\xi_i - \xi_j| < \frac{\Delta}{2k^2},$$

then  $|1 - \xi_i| < r$  is if and only if  $|1 - \xi_j| < r$ .

<sup>1</sup> The necessity of such generalisation in the case of (1.4) emerged in some investigations with Prof. P. TURÁN concerning the distribution of values of functions of type  $\sum_{j=1}^n P_j(z) e^{w_j z^2}$  ( $P_j(z)$  polynomial). These investigations will be published in a sequence of papers in *Publ. Math. Debrecen*.

We use notation of the previous lemma.

Owing to the well-known theorem of MARKOV

$$\text{if } M = \max_{0 \leq x \leq A} |f^*(x)| = |f^*(r)| \quad (0 \leq r \leq A)$$

then

$$(2.2) \quad |f''(x)| \leq 2k^2 \frac{M}{A} \quad \text{for all } 0 \leq x \leq A.$$

Obviously for all  $t$  we have

$$f^*(t) = f^*(r) + \int_r^t f''(u)du.$$

From this if  $f^*(x)$  vanishes for  $x = t$  in the interval  $(0, A)$ , then using (2.2) we have

$$0 \geq M - 2|r-t|k^2 \frac{M}{A},$$

i.e.

$$|r-t| \geq \frac{A}{2k^2}.$$

Hence the polynomial  $f^*(x)$  has no root in the following interval with length at least  $\frac{A}{2k^2}$

$$\max\left(0, r - \frac{A}{2k^2}\right) \leq x \leq \min\left(A, r + \frac{A}{2k^2}\right)$$

that is if  $|1 - \xi_j|$  and  $|1 - \xi_i|$  are roots of the  $f^*(x)$  with  $|1 - \xi_j| > r$  and  $|1 - \xi_i| < r$ , then

$$||1 - \xi_j| - |1 - \xi_i|| \geq \frac{A}{2k^2},$$

i.e.

$$|\xi_j - \xi_i| \geq \frac{A}{2k^2}.$$

From this the Lemma 2.2 follows.

LEMMA 2.3. Let  $0 < A < 1$ ;  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k$  different complex numbers with the maximal absolut value 1, ordered in the following way

$$0 = |1 - \xi_1| \leq |1 - \xi_2| \leq \dots \leq |1 - \xi_k|$$

and

$$f(z) = \prod_{j=1}^k (z - \xi_j).$$

Then there is an  $r$  with  $0 \leq r \leq A$  and an integer  $l$  with  $1 \leq l \leq n$ , such that

$$0 = |\xi_1| \leq |\xi_2| \leq \dots \leq |\xi_l| < r, \quad |\xi_j| > r \quad \text{if } j > l$$

and

$$(2.3) \quad \left| \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^\mu f'(\xi_j)} \right| \leq \frac{2}{(1-\Delta)^\mu} \left( \frac{4}{\Delta} \right)^{k-1}$$

for all integer  $\mu$ .

Let  $r$  be determined by the Lemma 2.1 applied to  $f(z)$ . Then from the theorem of residues

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|1-z|=r} \frac{1}{z^\mu f(z)} = \sum_{|1-\xi|<r} \frac{1}{\xi_j^\mu f'(\xi_j)} = \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^\mu f'(\xi_j)}.$$

But from the Lemma 2.1  $|f(z)| \geq 2 \left( \frac{\Delta}{4} \right)^k$  on all the circle  $|1-z|=r \leq \Delta$ , that is

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|1-z|=r} \frac{dz}{z^\mu f(z)} \right| \leq r \frac{1}{(1-r)^\mu} \frac{1}{2} \left( \frac{4}{\Delta} \right)^k = 2 \left( \frac{4}{\Delta} \right)^{k-1} \frac{1}{(1-\Delta)^\mu}.$$

Qu. e. d.

LEMMA 2.4. Let  $m \geq 0$  integer,  $\Delta$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ ;  $f(z)$  be defined as in the previous lemma, and let  $l$  be determined by the Lemma 2.1.

If  $F(z) = \sum_{j=1}^l \frac{f(z)}{z - \xi_j} \frac{z^{m+1}}{\xi_j^{m+1}} \frac{1}{f'(\xi_j)}$   $\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v=m+1}^{m+k} a_v z^v$

then

$$\sum |a_v| = \|F(z)\| < 2k \left( \frac{8}{\Delta} \right)^{k-1} \frac{1}{(1-\Delta)^{m+1}}.$$

For the proof let  $f(z) = \sum_{v=0}^k a_v z^v$ . Then by simple calculation

$$\begin{aligned} F(z) &= z^{m+1} \sum_{j=1}^l \frac{f(z) - f(\xi_j)}{z - \xi_j} \frac{1}{\xi_j^{m+1} f'(\xi_j)} = \\ &= z^{m+1} \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^{m+1} f'(\xi_j)} \sum_{v=1}^k a_v \frac{z^v - \xi_j^v}{z - \xi_j} = \\ &= z^{m+1} \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^{m+1} f'(\xi_j)} \sum_{v=1}^k a_v (z^{v-1} + \xi_j z^{v-2} + \dots + \xi_j^{v-1}) = \\ &= z^{m+1} \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^{m+1} f'(\xi_j)} \sum_{v=0}^{k-1} (a_{v+1} + \xi_j a_{v+2} + \dots + \xi_j^{k-v-1} a_k) z^v = \\ &= z^{m+1} \sum_{v=0}^{k-1} \left[ a_{v+1} \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^{m+1} f'(\xi_j)} + a_{v+2} \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^m f'(\xi_j)} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + a_k \sum_{j=1}^l \frac{1}{\xi_j^{m-k+v+2} f'(\xi_j)} \right] z^v. \end{aligned}$$

Thus from (2.3) and from  $|a_r| \leq \binom{k}{r}$

$$\begin{aligned} \|F(z)\| &\leq 2\left(\frac{4}{A}\right)^{k-1} \frac{1}{(1-A)^{m+1}} \sum_{r=1}^{k-1} \left[ \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r+2} (1-A) + \dots + \right. \\ &+ \left. \binom{k}{k} (1-A)^{k-r+1} \right] < 2\left(\frac{4}{A}\right)^{k-1} \frac{1}{(1-A)^{m+1}} \sum_{r=0}^{k-1} \left[ \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r+2} + \dots + \binom{k}{k} \right] = \\ &= 2k \left(\frac{8}{A}\right)^{k-1} \frac{1}{(1-A)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Qu. e.d.

3. Next we turn to the proof of the Theorem 1.1. We may suppose without loss of generality that all the  $z_j$ 's are different. We apply the Lemma 2.4 with  $k = n$  and  $\xi_j = z_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Then the polynomial

$$(3.1) \quad F(z) = \sum_{j=1}^l \frac{f(z)}{z-z_j} \frac{z^{m+1}}{z_j^{m+1}} \frac{1}{f'(z_j)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=m+1}^{m+n} c_r z^r$$

has the properties

$$(3.2) \quad \sum_{r=m+1}^{m+n} |c_r| < 2n \left(\frac{8}{A}\right)^{n-1} \frac{1}{(1-A)^{m+1}}$$

and

$$(3.3) \quad F(z_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1, \dots, l \\ 0 & \text{if } j > l. \end{cases}$$

Replacing  $z$  in (3.1) by  $z_j$  and multiplying by the suitable  $b_j$  summing for  $j = 1, 2, \dots, n$  we get, using (3.3) writing

$$s_r = b_1 z_1^r + \dots + b_n z_n^r$$

the identity

$$\sum_{r=m+1}^{m+n} c_r s_r = b_1 + \dots + b_l.$$

Hence using (3.2) we obtain

$$(3.4) \quad \max_{m+1 \leq r \leq m+n} |s_r| \geq \frac{1}{\sum_{r=m+1}^{m+n} |c_r|} |b_1 + b_2 + \dots + b_l| > \frac{1}{2n} \left(\frac{A}{8}\right)^{n-1} \frac{1}{(1-A)^{m+1}} |b_1 + \dots + b_l|.$$

It is easy to see that the optimal value for  $A$  to make largest the right side of (3.4) is  $\frac{n-1}{m+n}$ , and in this case

$$(1-A)^m = \left(1 - \frac{n-1}{m+n}\right)^m < \frac{1}{e^{-n+1}},$$

i.e.

$$(3.5) \quad \max_{m+1 \leq r \leq m+n} |s_r| > \frac{1}{2n} \left( -\frac{n-1}{8e(m+n)} \right)^{n-1} |b_1 + \dots + b_n|$$

which proves the theorem.

4. For the proof of the Theorem 1.2 we write the polynomials  $P_j(x)$  in the form

$$(4.1) \quad P_j(x) = \sum_{\mu=0}^{k_j} b_{j\mu} \binom{x}{\mu} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Supposing without loss of generality that all the  $z_j$ 's are different, we apply the Lemma 2.4 with  $k = n+k_1+k_2+\dots+k_n$ . The  $\xi_j$ 's are in some order the numbers

$$(4.2) \quad z_1, z_1(1-\varepsilon), \dots, z_1(1-k_1\varepsilon); \quad z_2, z_2(1-\varepsilon), \dots, z_2(1-k_2\varepsilon); \dots; \quad z_n, z_n(1-\varepsilon), \dots, z_n(1-k_n\varepsilon);$$

here the positive  $\varepsilon$  is subjected to the restrictions

$$(4.3) \quad \varepsilon < \frac{1}{k} \min_{i < j} |z_i - z_j|$$

(hence all the  $\xi_j$ 's are different)

and

$$(4.4) \quad \varepsilon < \frac{A}{kn^2 \cdot 2}.$$

This last restriction assures according to the Lemma 2.2. that

$$|1 - z_j(1 - \nu\varepsilon)| < r \quad (\nu = 1, \dots, k_j)$$

if and only if

$$(4.5) \quad |1 - z_j| < r.$$

According to Lemma 2.3. there is a polynomial

$$(4.6) \quad F(z) = \sum_{r=m+1}^{m+k} c_r z^r$$

for which

$$(4.7) \quad F[z_j(1 - \nu\varepsilon)] = \begin{cases} 0 & \text{if } |1 - z_j| > r \\ 1 & \text{if } |1 - z_j| < r \end{cases} \quad \text{for } \nu = 0, 1, \dots, k_j.$$

In what follows we shall use for the  $\mu$ -th difference of a function  $g(t)$  at the places  $a, a+h, \dots, a+\mu h$  i. e. for

$$(4.8) \quad \Delta^\mu g(t=a) = g(a+h) - \binom{\mu}{1} g[a + (\mu-1)h] + \binom{\mu}{2} g[a + (\mu-2)h] + \dots + (-1)^\mu g(a)$$

a special form of the following well-known theorem of SCHWARZ and STIELTJES

$$(4.9) \quad \frac{d^\mu g(t)}{h^\mu} = g^{(\mu)}(v) \quad \text{with} \quad d \leq v \leq a + \mu h \\ (\text{or if } h < 0 \quad a + \mu h \leq \theta \leq a).$$

We apply (4.8) to the function  $F(z_j t)$  at the places

$$t = 1, 1 - \varepsilon, \dots, 1 - \mu \varepsilon \quad (\mu = 1, \dots, k_j)$$

according to (4.7)

$$d^\mu F(z_j) = 0 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, n \\ \mu = 1, 2, \dots, k_j \end{cases}$$

hence from (4.6) multiplying by  $\frac{1}{\mu! (-\varepsilon)^\mu}$  and using (4.9)

$$(4.10) \quad 0 = \sum_{r=m+1}^{m+k} c_r z_j^r \binom{\nu}{\mu} \vartheta_{v_j}$$

with

$$1 - k \varepsilon \leq v_{rj} \leq 1 \quad \begin{cases} \nu = m+1, \dots, m+k \\ \mu = 1, 2, \dots, k_j. \end{cases}$$

From this

$$(4.11) \quad \sum_{r=m+1}^{m+k} c_r z_j^r \binom{\nu}{\mu} + \delta(\varepsilon) = 0$$

where

$$(4.12) \quad |\delta(\varepsilon)| \leq \left| \sum_{r=m+1}^{m+k} |c_r| \right| 2^k |(1 - \varepsilon k)^{m+k} - 1|.$$

Replacing  $z$  in (4.6) by  $z_j$  multiplying by  $b_{j0}$  and summing for  $j = 1, 2, \dots, n$  we get using (4.7)

$$(4.13) \quad \sum_{r=m+1}^{m+k} c_r (b_{10} z_1^r + \dots + b_{n0} z_n^r) = \sum_{\substack{j \\ |1-z_j| < r}} b_{j0}.$$

Multiplying (4.11) by the corresponding  $b_{j\mu}$  and summing for  $\mu = 1, 2, \dots, k_j$  we get the identity

$$0 = \sum_{r=m+1}^{m+k} c_r [P_j(\nu) - b_{j0}] z_j^r + \sum_{\mu=0}^k b_{j\mu} \delta(\varepsilon) \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

hence summing for  $j = 1, 2, \dots, n$  and adding it (4.13) we get writing

$$S = \sum_{j=1}^n P_j(\nu) z_j^\nu$$

$$\sum_{r=m+1}^{n+k} c_r S_r + \sum_{j=1}^n \sum_{\mu=0}^{kj} b_{j\mu} \delta(\varepsilon) = \sum_{\substack{j \\ |1-z_j| < r}} P_j(0).$$

Using (4.12) we get

$$\left\{ \max_{m+1 \leq r \leq m+k} |S_r| + 2^k |(1-\varepsilon k)^{m+k} - 1| \right\} \sum_{\nu=m+1}^{m+k} |c_\nu| \geq$$

$$\geq \min_j |P_1(0) + \dots + P_j(0)|$$

choosing  $\varepsilon$  small enough the expression  $2^k |(1-\varepsilon k)^{m+k} - 1|$  is also "arbitrary small, and hence

$$\max_{m+1 \leq r \leq m+k} |S_r| \geq \frac{1}{\sum_{\nu=m+1}^{m+n} |c_\nu|} \min_j |P_1(0) + \dots + P_j(0)|.$$

Thus proceeding analogously as in (3.4) and (3.5) Theorem 1.2 follows.

### References

- [1] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* (Budapest, 1953, Akadémiai Kiadó).
- [2] VERA T. SÓS and P. TURÁN, On some new theorems in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 241–255.
- [3] S. UCHIYAMA, A note on the second main theorem of P. Turán, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), 379–380.
- [4] E. MAKAI, The first main theorem of P. Turán, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 405–412.
- [5] E. MAKAI, On a minimum problem, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **3–4** (1960/61), 177–182.
- [6] S. KNAPOWSKI, Contributions to the theory of the distribution of prime numbers in arithmetical progressions I., *Acta Arith.*, **6** (1961), 415–434.



# ON SOME PROPERTIES OF COMMUTATOR SUBGROUPS

By

J. DÉNES

Central Research Institute of Physics, Budapest

(Received February 4, 1964)

1. Let  $G$  be a finite group. The following theorem of W. BURNSIDE is well known (see e.g. [1] p. 327):

„If  $p^x$  is the highest power of  $p$  which divides the order  $N$  of  $G$ , while  $H$  is a subgroup of  $G$  of order  $p^x$  and  $I$  the greatest subgroup of  $G$  which contains  $H$  selfconjugately; and if every operation of  $I$  is permutable with every operation of  $H$ , then  $G$  has a self-conjugate subgroup of order  $\frac{N}{p^x}$ .“

We shall prove this theorem in a special case. Our proof is very simple; it is based on the representation of a group as a regular permutation group.

**THEOREM 1.** *Let  $G$  be a finite group of order  $n = 2^kq$  where  $k \equiv 1$  and  $q (> 1)$  is odd. If  $G$  contains an element  $y$  of order  $2^k$ , then  $G$  contains a subgroup of index 2*

**PROOF.** Let us consider a representation of  $G$  of the form  $x_i \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ xx_i \end{pmatrix}$  where  $x_i$  is a fixed element of  $G$  and  $x$  varies in  $G$ . Let  $P$  denote the regular<sup>1</sup> permutation group formed by the  $\begin{pmatrix} x \\ xx_i \end{pmatrix}$ . Then  $P$  and  $G$  are isomorphic under the correspondence  $x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ xx_i \end{pmatrix}$ .

Let  $y' (\in P)$  denote the element corresponding to  $y (\in G)$ . As the parity of a permutation is equal to the parity of the difference between its degree and number of its cycles<sup>2</sup>,  $y'$  is an odd permutation.

The number of even and odd permutations in  $P$  is equal, therefore the subgroup of odd permutations in  $P$  is of order  $\frac{1}{2}n$ .

**COROLLARY 1.** *The order of a simple group must be either odd or divisible by 4.*

**COROLLARY 2.** *A finite group whose 2-Sylow subgroup is cyclic is not perfect.*

<sup>1</sup> A permutation is called *regular*, if it consists of disjoint cycles of equal length. A group containing regular permutations only is a *regular permutation group*. See e.g. JORDAN [8].

<sup>2</sup> For a sharper result see [3].

2. It is well known that in a group the product of two commutators need not be a commutator; consequently the commutator subgroup cannot be defined as the set of all commutators, but only as the subgroup generated by these. Some examples, including the Abelian groups, are known for groups having the property that all the elements of their commutator subgroups are commutators. O. ORE [9] and N. ITO [7] proved that in the finite symmetric group  $S_n$ , all the elements of the alternating group  $A_n$  are commutators. This can be extended by showing that when  $n \geq 5$  all the elements in the alternating group  $A_n$  are commutators in  $A_n$  itself. Furthermore they showed that all the elements of the infinite symmetric group are commutators.

By a theorem of K. HONDA,<sup>3</sup> if the commutator subgroup of a finite group has prime order  $p$  then every element in the commutator subgroup is itself a commutator.

Let  $G$  be a group of order  $pq$  ( $p > q$ ). We may use Honda's theorem to obtain the result that all the elements of the commutator subgroup of  $G$  are commutators. As  $G$  can be defined as generated by  $a, b$  subject to the defining relations  $a^p = e, b^q = e, a^{-1}ba = b^r$  where  $r \not\equiv 1 \pmod{q}$  [ $r^p \equiv 1 \pmod{q}$ ] divides  $q-1$  (see M. HALL [4] p. 51). We may also obtain this result as a special case of our Theorem 3.

**THEOREM 2.** *Let  $G$  be a finite group and  $K$  its commutator subgroup. If  $G$  is defined by*

$$G = \{a, b; \quad a^m = b^n = e \quad b^{-1}ab = a^r\}$$

*then*

$$K \subseteq \{a\}.$$

**PROOF.** A commutator is either the identity element or has the form (see [12])  $b^s a^t b^u a^v a^{-t} b^{-s} a^{-v} b^{-u}$ . Clearly  $b^{-1}a^t b$  is a power of  $a$ . Also  $b^{-s}a^t b^s$  is a power of  $a$ , namely  $b^{-s}a^t b^s = a^{tr^s}$ . Let  $u = s - x$ . Then

$$b^{-s}a^t b^{s-x} a^v a^{-t} b^s a^v b^{x-s} = a^{tr^s} b^{-x} a^{v-t} a^{vr^s} b^x = a^{t(r^s - r^x) + r^x v(r^s - 1)}$$

shows that every commutator is a power of  $a$ .

**COROLLARY.** *The commutator subgroup of a finite group in which all Sylow subgroups are cyclic is cyclic.* (See also [5]).

**PROOF.** Let  $G$  be a finite group all of whose Sylow subgroups are cyclic. Then it has the form

$$1) \quad G = \{a, b; \quad a^m = b^n = e \quad bab^{-1} = a^r\}$$

for some fixed integers  $m, n, r$ . For this result see [1] p. 186.

Further results concerning this type of groups may be found in [12]. For theorems similar to our Theorem 2, we refer to [2], [13].

A group whose commutator subgroup and factor commutator group are cyclic is conveniently called Z-metacyclic, i.e. metacyclic in the sense of Zassenhaus. It was proved in [2] that if

$$r^n \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{and} \quad (r-1, m) = 1,$$

<sup>3</sup> K. HONDA proved: If an element  $a$  of a finite group is a commutator, then any generator of the cyclic group generated by  $a$  is also a commutator. See [6].

then the group  $G$  defined by (1) is  $Z$ -metacyclic. ZASSENHAUS proved in [13] that conversely, every finite  $Z$ -metacyclic group is of this form.

**THEOREM 3.** *Let  $G$  be a finite group with the commutator subgroup  $K$ . If*

$$G = \{a, b; \quad a^m = b^n = e, \quad b^{-1}ab = a^r\}$$

*where  $m, n, r$  are given integers, then all the elements of  $K$  are commutators.*

**PROOF.** We have to prove that the product of two arbitrary commutators is again a commutator. Observe that every commutator has the form

$$a^{-s_1}b^{-t_1}a^{s_2}b^{-t_2}b^{t_1}a^{s_1}b^{t_2}a^{-s_2} = a^{s_1(r^{t_2-1})+s_2(r^{t_1-1})} = a^{k(r-1)}$$

for some integer  $k$ . Since

$$ba^k b^{-1}a^{-k} = a^{k(r-1)},$$

we see that an element of  $G$  is a commutator if and only if it is a power of  $a^{r-1}$ . Hence the result is immediate.

**COROLLARY.** *A finite group in which all Sylow subgroups are cyclic has the property that all the elements of the commutator subgroup are commutators.*

3. L. FUCHS has called my attention to the following problem: Let  $G$  be a finite group of order  $n$  and  $K$  its commutator subgroup. Since the elements of  $G$  commute mod  $K$ , every product of  $n$  distinct factors belongs to the same coset mod  $K$ . Can every element of this coset be represented as a product of  $n$  distinct factors?

In this section we shall solve this problem for certain groups.

**THEOREM 4.** *Let  $G$  be a group of order  $n$  such that*

1. *all the elements of its commutator subgroup  $K$  are commutators;*

2. *the number of its elements of order 2 is less than  $\frac{1}{2}n$ .*

*Then all the elements of a certain coset modulo the commutator subgroup can be represented as a product of  $n$  distinct factors:*

$$(2) \quad b = a_1 a_2 \dots a_n \quad b \in cK, \quad a_i \in G \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$a_j \neq a_l$  if  $j \neq l$ , and  $cK$  is a coset modulo  $K$ .

**PROOF.** Let  $q$  denote the product of all elements of  $G$  of order 2, in some arrangement. Then also  $q = q \prod (a_i a_i^{-1})$  ( $O(a_i) \neq 2$ ). So an arbitrary element of  $G$  which can be written as a product  $a_1 a_2 \dots a_n$  of  $n$  distinct elements of  $G$  belongs to the same coset  $B$  modulo  $K$  as  $q$ .

As  $b \in B$  lies in the coset of  $q$  modulo  $K$ , by hypothesis 1. we may write  $b = qa_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}$  ( $a_i \neq a_j$ ).

If neither  $a_i$  nor  $a_j$  is of order 2, then

$$(3) \quad b = qa_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \prod a_l a_l^{-1} \quad \text{with} \quad l \neq i, j, O(a_l) > 2.$$

In the right member of (3) every element of  $G$  occurs once and only once, and so (3) has the same property as (2).

Let  $S$  be any subset of  $G$  containing at least  $\left[ \frac{n}{2} + 1 \right]$  elements. If  $a$  is any

element of  $G$ , let  $c_i$  be the solution of the equation  $b_i x = a$ , where  $b_i \in S$ . Now if  $b_i \neq b_j$ , then  $c_i \neq c_j$ . Hence to the  $\left\lceil \frac{n}{2} + 1 \right\rceil$  possible elements there correspond  $\left\lfloor \frac{n}{2} + 1 \right\rfloor$  distinct elements  $c_i$ . Clearly at least one of these must belong to  $S$ . Hence every element  $a$  of  $G$  can be written as the product of two elements of  $S$  (see in [11]). Let  $S$  be the set containing all the elements of  $G$  of order higher than two.  $S$  has at least  $\left\lceil \frac{n}{2} + 1 \right\rceil$  elements as we assumed property 2.

If one of  $a_i, a_j$  is of order 2, say  $a_i$  then we may choose two elements  $a_{i'}, a_{i''}$  in  $S$  such that

$$(4) \quad a_i = a_{i'} a_{i''} = a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1},$$

Then

$$(5) \quad b = q a_{i'} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1} \prod a_l a_l^{-1} \quad \text{where } l \neq i', \quad l \neq i'', \quad l \neq j.$$

In the case when  $a_{i''} = a_j$  we may omit two factors from (5) so that the remaining factors are distinct. As

$$a_{i'} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i'} a_{i''} a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i'} a_j a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1}.$$

If  $a_{i'} = a_j$  then

$$a_{i'} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1}$$

is a commutator containing factors of order higher than two. If  $a_{i''} = a_j^{-1}$ ,  $a_{i'} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{i'} a_j a_{i'}^{-1} a_{j'}^{-1}$ . In the case when  $a_{i'} = a_j^{-1}$ ,

$$a_{i'} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1} = a_{j'}^{-1} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1}.$$

Other cases such as  $a_{i'} = a_{i''} = a_j$ ,  $a_{i'}^{-1} = a_{i''} = a_j$ ,  $a_{i'}^{-1} = a_{i''}^{-1} = a_j$ ,  $a_{i'} = a_{i''}^{-1} = a_j$ , may be considered as special cases those mentioned above.

If  $a_i, a_j$  are both of order 2, then we may choose elements  $a_{i'}, a_{i''}, a_{j'}, a_{j''}$ , in  $S$  such that  $a_i = a_{i'} a_{i''}$ ,  $a_j = a_{j'} a_{j''}$ . In case  $a_{i'}, a_{i''}, a_{j'}, a_{j''}$  are distinct the result is immediate. Otherwise we have to prove our theorem in the cases 1)  $a_{i'} = a_{j'}$ , 2)  $a_{i'} = a_{j''}$ , 3)  $a_{i''} = a_{j'}$ , 4)  $a_{i''} = a_{j''}$ . If  $a_{i'} = a_{j'}$ , then using (4) we may obtain

$$c = a_{i'} a_{i''} a_{j'} a_{j''} a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1} a_{j''}^{-1} = a_{i'}^{-1} a_{j''} a_{i'} a_{i''} a_{j'}^{-1} a_{i'}^{-1}.$$

In case 2) we have

$$c = a_{i'} a_{i''} a_{i'}^{-1} a_{i'} a_{i''} a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1}.$$

In this case if  $a_{i'} a_{i''} a_{i'}^{-1} \neq a_{i'} a_{i''}^{-1} a_{j'} a_{j''}^{-1}$  the result is immediate. Otherwise  $c$  is either the unit element or  $c = a_{i'}^{-2} a_{j'} a_{i''}^{-2} a_{j''}^{-1}$ ,

$$c = a_{j'}^{-2} a_{i'}^{-1} a_{j''}^{-2} a_{i''}.$$

If the order of  $a_{i'}^2$  resp.  $a_{j'}^2$ , is not 2, then  $c$  is the product of 4 distinct elements. If this is not the case  $c$  is the product of 2 distinct elements of order two as  $a_{i'}^2 \neq a_j \cdot a_{i'}^{-2} a_j^{-1}$ ,  $a_{j'}^2 \neq a_{i'}^{-1} a_{j'}^2 \cdot a_{i'}$ . In case 3) by the same arguments as in case 2) we may prove our theorem for  $c^{-1}$  and so it holds for  $c$  too. If  $a_{i''} = a_{j''}$  then  $c = a_{i'} a_{i''} a_j a_{i'}^{-1} a_{i''}^{-1} a_{j'}^{-1}$ . Other cases such as  $a_{i'} = a_{i''} = a_{j'}$ ,  $a_{i'} = a_{i''} = a_{j''}$ ,  $a_{i'}^{-1} = a_{i''}^{-1} = a_{j'}$ ,  $a_{i'}^{-1} = a_{i''}^{-1} = a_{j''}$  may be considered as special cases those mentioned above.

Some further results will be published in an other paper.

The author is indebted to Prof. L. FUCHS for valuable consultation in the preparation of the paper.

### References

- [1] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order*, (Dover publication, New York, 1955).
- [2] H. S. M. COXETER and V. O. J. MOSER, *Generators and relations for discrete groups*, (Springer Verlag, Berlin, Göttingen – Heidelberg, 1957).
- [3] J. DÉNES, The representation of a permutation as a product of a minimal number of transpositons and its connection with the theory of graphs, *Publ. of Math. Inst. of Hung. Acad. Sci.*, 4 (1959), 63–71.
- [4] M. HALL, *The theory of groups*, (The Macmillan Company, New York, 1958).
- [5] K. HONDA, On finite groups, whose Sylow-groups are all cyclic, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, 1 (1952), 5–39.
- [6] K. HONDA, On commutators in finite group, *Comment. Math. Univ. St. Paul* 2 (1953), 9–12.
- [7] N. ITO, A theorem on alternating group, *Math. Japonicae*, 2 (1951), 59–60.
- [8] C. JORDAN, *Traité des substitution*, (Guthier – Villars, Paris, 1957).
- [9] O. ORE, Some remarks on commutators, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 2 (1951), 307–314.
- [10] G. VILLARI, Sui commutatori del gruppo modulare, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 36 (1958), 196–201.
- [11] A. WAGNER, On the associative law of groups, *Rendiconti di Matematica* 21 (1962), 60–76.
- [12] K. R. YACOUB, On a class of finite groups with two independent generators, *Publ. Math. Debrecen*, 8 (1961), 79–89.
- [13] H. J. ZASSENHAUS, *The theory of groups*, (Chelsea Publishing Company, New York, 1958).



# ON LOCAL SOLUTIONS OF THE GENERALIZED FUNCTIONAL EQUATION OF ASSOCIATIVITY

By

M. HOSSZÚ

Miskolc

(Received February 6, 1964)

1. We need, in many investigations, the solution of the functional equation [2]–[4]

$$(1) \quad \Phi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)]$$

where the independent variables  $x, y, z$  and the values of the unknown function  $F, G, H, K$  are elements of different sets such that

$$x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z,$$

$$G : X \otimes Y \rightarrow Q, \quad F : Q \otimes Z \rightarrow R,$$

$$K : Y \otimes Z \rightarrow P, \quad H : X \otimes P \rightarrow R.$$

The functions  $F, G, \dots$  are called *local* solutions if  $X, Y, \dots$  are topological spaces and (1) is satisfied in a neighbourhood of a fixed triple  $x_0 \in X, y_0 \in Y, z_0 \in Z$ .

In the present paper we give the locally topological solutions of (1). The notion of locally topological solutions can be defined similarly as in the theory of Lie groups. This means that e. g. for any fixed  $y_1, x_1$

$$x \rightarrow G(x, y_1), \quad y \rightarrow G(x_1, y)$$

are topological mappings of a neighbourhood  $U$  resp.  $V$  of  $x_1, y_1$ , respectively. We give the solutions as local isotopes of a topological group operation.

DEFINITION. The function

$$F : X_1 \otimes X_2 \rightarrow X_3$$

is an isotope of

$$F' : X'_1 \otimes X'_2 \rightarrow X'_3$$

if there exist 1–1 mappings  $\alpha_i$  of  $X_i$  onto  $X'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) such that

$$F'(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \alpha_3 F(x_1, x_2)$$

holds for every  $x_i \in X_i$ .

Clearly, the isotopism is an equivalence relation. The local isotopism can be defined by a similar reasoning by means of topological mappings  $\alpha_i$ .

## 2. We state the following

**THEOREM.** Suppose that (1) is satisfied for a fixed triple  $x_0, y_0, z_0$  of the topological spaces  $X, Y$ , resp.  $Z$  and for a certain neighbourhood  $X_0, Y_0, Z_0$  of  $x_0, y_0$  resp.  $z_0$ . Denote

$$(2) \quad \begin{cases} a = G(x_0, y_0), & b = K(y_0, z_0), \\ e = F(a, z_0) = H(x_0, b). \end{cases}$$

Suppose that  $F, G, H, K$  are locally topological functions. Then

(I) there exists a neighbourhood  $E \subseteq R$  of  $e$  on which local topological groups  $(E, *)$ ,  $(E, \circ)$  can be defined by

$$(3) \quad F(q, z) = F(q, z_0) * F(a, z), \quad q \in Q, \quad z \in Z,$$

$$(4) \quad H(x, p) = H(x, b) \circ H(x_0, p), \quad x \in X, \quad p \in P;$$

(II) we have  $r * t = r \circ t$  for every  $r, t \in E$ ;

(III)  $F, G, H, K$  are local isotopes of the operation  $r \circ t$  such that their most general form can be traced from

$$(5) \quad \Phi(x, y, z) = \varrho x \circ \sigma y \circ \tau z; \quad \varrho x, \quad \sigma y, \quad \tau z \in E,$$

$$\varrho x_0 = \sigma y_0 = \tau z_0 = e.$$

**PROOF.** First we show that  $*, \circ$  defined by (3), (4) have the unit element  $e$  defined by (2). This follows immediately from (3), (4), if we put  $z = z_0, q = a, p = b, x = x_0$ , respectively.

Because of (3)–(4), we can write (1) by means of the operations  $\circ$  and  $*$  as follows:

$$(6) \quad \Phi(x, y, z) = F[G(x, y), z_0] * F(a, z) = H(x, b) \circ H[x_0, K(y, z)].$$

Let us choose  $z = z_0$  resp.  $x = x_0$ ; then, taking also the definition (2) of  $e$  into account, we get

$$(7) \quad \begin{cases} F[G(x, y), z_0] = H(x, b) \circ H[x_0, K(y, z_0)], & x \in X_0, \quad y \in Y_0, \\ H[x_0, K(y, z)] = F[G(x_0, y), z_0] * F(a, z), & y \in Y_0, \quad z \in Z_0. \end{cases}$$

This shows that  $G$  is a local isotope of  $r \circ t$  and  $K$  is one of  $r * t$ . Moreover, (7) shows that (6) can be written in the form

$$(8) \quad \Phi(x, y, z) = (\varrho x \circ \sigma y) * \tau z = \varrho x \circ (\sigma y * \tau z),$$

where

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho x = H(x, b), & \tau z = F(a, z), \\ \sigma y = H[x_0, K(y, z_0)] = F[G(x_0, y), z_0]. \end{cases}$$

[cf. (1)]. Here  $\varrho x, \sigma y, \tau z$  lie in a neighbourhood of  $e$  if  $x, y, z$  are elements of  $X_0, Y_0, Z_0$ , respectively. Denote  $E = \varrho X_0 \cap \tau Z_0$ . Now if we put  $y = y_0$ , i.e.  $\sigma y_0 = F(a, z_0) = e$  in (8) then we get (II) for every  $r = \varrho x \in \varrho X_0, t = \tau z \in \tau Z_0$ , hence, a fortiori, for every  $r, t \in E$ .

On the other hand, taking (II) into account, (8) shows that  $r \circ t$  is an associative operation on  $E$  with unit element  $e$ . Taking definition (4) into account, it can be seen easily that  $r \circ t$  is a locally topological binary operation for

$$\begin{aligned} r = H(x, b) \in \varrho X_0, \quad t = H(x_0, p) \in H[x_0, K(Y_0, Z_0)] &\supseteq H[x_0, K(y_0, Z_0)] = \\ &= F(a, Z_0) = \tau Z_0, \end{aligned}$$

hence, a fortiori, for every  $r, t \in E$ . This verifies (1).

Finally, taking (3)–(4), (7) and (II) into account, we see that  $F, G, H, K$  are local isotopes of  $r \circ t$ . This proves the one part of (III). The remainder part [i.e. (5)] is a consequence of (8) if we choose  $y$  such that  $\sigma y \in E$  [cf. (II)].

This completes the proof of the Theorem.

Note that (II) is valid also for every  $r \in \varrho X_0, t \in \tau Z_0$ , consequently, (8) implies (5) for each  $\varrho x, \sigma y \in \varrho X_0, \tau z \in \tau Z_0$ , hence for every  $x \in X_0, z \in Z_0$  and for

$$F[G(x_0, y), z_0] \in F[G(X_0, y_0), z_0] \text{ i.e. } G(x_0, y) \in (X_0, y_0) \quad [\text{cf. (9)}].$$

3. We give an application of the theorem proved above. With connection to the axiomatic theory of probability, J. Aczél has raised the problem of the solution of the functional equation

$$(10) \quad F[x, F(y, z)] = F[z, F(y, x)],$$

where the variables and the values of the function  $F$  are real numbers in the interval  $[0, 1]$  and the equation (10) holds for such  $x, y, z$  values for which the inequalities

$$(11) \quad x, z \leq y; \quad F(y, z) \leq x; \quad F(y, x) \leq z$$

are fulfilled [2].

Let  $X, Y$ , and  $Z$  denote the set of values  $x, y$  resp.  $z$  for which (11) is true.

Clearly, (10) is a special case of (1), hence the locally topological (e.g. strictly monotonic and continuous in both variables) solutions  $F(x, y)$  are isotopic to a continuous and strictly monotonic associative operation defined on an interval. However, the most general form of such operations is  $f^{-1}[f(x) + f(y)]$ , where  $f^{-1}$  denotes the inverse function of  $f$ . See [1]. Therefore  $F$  must be of the form

$$(12) \quad F(u, v) = h[f(u) + g(v)]$$

in a neighbourhood of every inner point  $(u_0, v_0)$  of

$$X \otimes P \cup Y \otimes Z \cup Y \otimes X \cup Z \otimes Q,$$

where  $P = F(Y, Z)$ ,  $Q = F(Y, X)$ .

In different domains the functions  $f, g, h$  figuring in (12) may change. However, if two of these (open) domains are not disjunct, then the functions  $f, g, h$  are uniquely determined there up to linear transformations

$$f \rightarrow cf + a_1, \quad g \rightarrow cg + a_2,$$

$$h(t) \rightarrow h\left(\frac{t - a_1 - a_2}{c}\right).$$

In fact, the supposition

$$h[f(u) + g(v)] = h_1[f_1(u) + g_1(v)]$$

implies

$$h_1^{-1}[h(s+t)] = f_1[f^{-1}(s)] + g_1[g^{-1}(t)]$$

i.e. Pexider's functional equation on a neighbourhood of a fixed point  $(s_0, t_0)$ . Therefore, by means of the continuous solution of Pexider's functional equation (cf. [1]), we have

$$f_1(u) = cf(u) + a_1, \quad g_1(v) = cg(v) + a_2,$$

$$h_1^{-1}(x) = ch^{-1}(x) + a_1 + a_2.$$

Thus in a simply connected domain the form (12) of the continuous solution  $F$  is uniquely determined and it contains the same functions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  for every  $(u, v)$  in this domain.

If we substitute (12) into (1) then it becomes

$$f(x) + g\{h[f(y) + g(z)]\} = f(z) + g\{h[f(y) + g(x)]\}$$

or, by another notation and keeping  $z$  constant,

$$g[h(u+v)] = f[g^{-1}(v)] + \varphi(u)$$

which is just Pexider's functional equation. By solving this equation we arrive at

$$f(t) = cg(t) + a_1, \quad g(t) = ch^{-1}(t) + a_2.$$

Thus (12) can be written as

$$F(u, v) = h[c^2h^{-1}(u) + ch^{-1}(v) + a]$$

on a simply connected domain of the definition of the solution  $F$ . See [3].

### References

- [1] J. ACZEL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, (Basel – Stuttgart, 1960).
- [2] J. ACZÉL, Remarks on probable inference, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, 6 (1963), 3–11.
- [3] M. HOSSZÚ, Algebrai rendszerek értelmezett függvényegyenletek I – II, (Hungarian) *A MTA III. Oszt. Közleményei*, 12 (1962), 303–315; 13 (1963), 1–15.
- [4] B. SCHWEIZER, and A. SKLAR, Associative functions and abstract semigroups, *Publicationes Math. Debrecen*, 10 (1963), 69–81.

## REMARKS ON A PAPER OF P. TURÁN

By  
I. DANCS

Department of Algebra of the Eötvös Loránd University, Budapest  
(Received June 20, 1964)

1. P. TURÁN investigating certain estimations concerning generalized power-sums of complex numbers obtained the following result [1].

For  $n \geq 2$  and positive integer  $m$ , for arbitrary complex  $b_j$ 's with

$$(1.1) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j > 0$$

for complex  $z_j$ 's with

$$(1.2) \quad |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n| = 1$$

and  $0 < \varkappa \leq \frac{\pi}{2}$  with

$$(1.3) \quad \pi \geq |\operatorname{arc} z_j| \geq \varkappa \quad j = 1, \dots, n$$

there are integers  $\nu_1$  and  $\nu_2$  with

$$(1.4) \quad m+1 \leq \nu_1 \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{\varkappa} \right)$$

and

$$(1.5) \quad m+1 \leq \nu_2 \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{\varkappa} \right)$$

such that the inequalities

$$(1.6) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_1} \geq \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j \left| \frac{1}{5n} \left| \frac{n}{27(m+n)} \right|^{2n} \right| \right|$$

and

$$(1.7) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_2} \leq - \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j \left| \frac{1}{5n} \left| \frac{n}{27(m+n)} \right|^{2n} \right| \right|$$

hold.

Theorems of this type have many applications in the analysis and in the analytical number theory. The systematical treatment of this object can be found in the book [2].

In this paper we give a shorter proof of a little better form of this theorem.

**THEOREM I.** Beside the conditions of the quoted theorem there are  $\nu_1$  and  $\nu_2$  such that (1.4) and (1.5) are fulfilled and the inequalities

$$(1.8) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_1} \geq \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j \left| \frac{1}{4n} \left| \frac{n}{4e(m+n)} \right|^{2n} \right| \right|$$

and

$$(1.9) \quad \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j z_j^{\nu_2} \leq - \left| \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n b_j \left| \frac{1}{4n} \left| \frac{n}{4e(m+n)} \right|^{2n} \right| \right|$$

hold.

An another note is connected with a lemma which plays a role in the proof of the above-mentioned theorem of P. TURÁN. This lemma will be quoted in this paper as Lemma 2.1.

We have for arbitrary positive integer  $k$  the identity

$$(1.10) \quad \left( z^2 - 2 \cos \alpha z + 1 \right) \sum_{r=0}^n \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin \alpha} z^r = 1 - \frac{\sin(k+2)\alpha}{\sin \alpha} z^{k+1} + \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin \alpha} z^{k+2}$$

$$\left| \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \alpha \neq 0 \right|$$

where the coefficients in the right side are non-negativ if we choose the  $k$  so that  $\frac{\pi}{k+2} \leq |\alpha| < \frac{\pi}{k+1}$ . It is easy to see, that a polynomial with non-negativ coefficients and with exact degree  $(k+2)$  has no roots in the angle  $|\operatorname{arc} z| < \frac{\pi}{(k+2)}$ , i. e. the polynomial

$$\varphi(z) = \sum_{r=0}^k \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin \alpha} z^r, \quad \left| \frac{\pi}{k+2} \leq |\alpha| < \frac{\pi}{k+1} \right|$$

is a polynomial with minimal degree for which  $(z^2 - 2 \cos \alpha z + 1) \varphi(z)$  has non-negativ coefficients. In this paper we determine each polynomial with this property.

**THEOREM II.** Let

$$f_j(z) = \sum_{r=0}^n a_r^{(j)} z^r, \quad (a_0 = 1, j = 1, \dots, n)$$

where  $n$  is, the minimal integer for which

$$n+2 \geq \frac{\pi}{|\alpha|} \quad \left| -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \alpha \neq 0 \right|$$

and

$$a_r^{(j)} = \begin{cases} \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin \alpha} & \text{if } \nu = 0, \dots, j-1 \\ \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin(n+2)\alpha \sin(\nu-j+1)\alpha}{\sin \alpha \sin(n-j+2)\alpha} & \text{if } \nu = j, \dots, n \end{cases}$$

then  $f_j(z)$ 's are polynomials with minimal degree for which the multiple polynomials

$$(z^2 - 2 \cos \alpha z + 1) f_j(z) = 1 - \frac{\sin(n+2)\alpha}{\sin(n-j+2)\alpha} z^j + \frac{\sin j\alpha}{\sin(n-j+2)\alpha} z^{n+2}$$

have non-negativ coefficients.

Further the set of polynomials  $f(z)$  with minimal degree for which  $(z^2 - 2 \cos \alpha z + 1) f(z)$  has non-negativ coefficients is identical with the set of the following polynomials

$$\left| f(z), f(z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(z); \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0 \right|$$

2. Before turning to the proof of Theorem I, we have to quote two lemmata. The first of them is stated in [1], [3]. The following form is a contraction of Lemma I. and II. of the paper [1].

### LEMMA 2.1.

If

$$F(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_N z^N$$

s a polynomial with real coefficients and with all zeros outside the angle

$$|\arg z| < \kappa \quad 0 < \kappa \leq \frac{\pi}{2}$$

and outside the circle  $|z| < 1$ , then there is a polynomial  $\varphi(z)$  such that writing

$$\varphi(z) F(z) = \sum e_r z^r$$

- a) the coefficients  $e_r$  are non-negative,
- b) the degree of  $F(z) \varphi(z)$  is

$$\leq \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{\pi}{\kappa} \right),$$

- c) the inequality

$$\sum e_r \leq 2^N$$

holds, and finally

- d)  $e_0 = 1$ .

The second lemma is an identity, which plays essential role in the proof of the first main theorem of P. TURÁN [2].

LEMMA 2.2. If  $z_1, z_2, \dots, z_k$  are complex numbers with absolute value at least 1,  $m$  is non-negativ integer, then there is a polynomial

$$g(z) = \sum_{r=m+1}^{m+k} a_r z^r$$

where the  $a_r$  coefficients are real if the elementary symmetrical polynomials of the  $z_j$ 's are real, further

$$(2.1) \quad g(z_j) = 1 \quad (j = 1, \dots, k)$$

and

$$(2.2) \quad \sum_{v=m+1}^{m+k} |a_v| \leq \left( \frac{2e(m+k)}{k} \right)^k$$

hold.

Here we give a simple proof of this lemma. This proof is slightly different as the proof in [2].

Let

$$f(z) = \prod_{j=1}^k \left( 1 - \frac{z}{z_j} \right) = b_0 + b_1 z + \dots + b_k z^k$$

and evidently for some  $\alpha_\mu$ 's we have

$$(2.3) \quad \frac{1}{z^{m+1} f(z)} = \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_{m+1}}{z^{m+1}} + \frac{h(z)}{f(z)}$$

where  $h(z)$  is a polynomial with degree not exceeding  $(k-1)$ .

It is easy to see, that the polynomial

$$g(z) = z^{m+1} h(z)$$

fulfills the identities (2.1) and we have to prove only the inequality (2.2).

For this aim from (2.3) we get

$$g(z) = z^{m+1} h(z) = 1 - (\alpha_1 z^m + \dots + \alpha_{m+1})(b_k z^k + \dots + b_0)$$

and from this we have comparing the coefficients in the two sides of the equality the following systems

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 1 - b_0 \alpha_{m+1} &= 0 \\ b_0 \alpha_m + b_1 \alpha_{m+1} &= 0 \\ b_0 \alpha_{m+1} + b_1 \alpha_m + b_2 \alpha_{m+1} &= 0 \\ &\vdots \\ b_0 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_3 + \dots &= 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -a_{m+k} &= \alpha_1 b_k \\ -a_{m+k-1} &= \alpha_1 b_{k-1} + \alpha_2 b_k \\ -a_{m+k-2} &= \alpha_1 b_{k-2} + \alpha_2 b_{k-1} + \alpha_3 b_k \\ &\vdots \\ -a_{m+1} &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \dots \end{aligned}$$

From this we have imediatly

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sum_{v=m+1}^{m+k} |a_v| &\leq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_{m+1}|)(|b_0| + |b_1| + \dots + |b_k|) = \\ &= \prod_{j=1}^k \left( 1 + \frac{1}{|z_j|} \right) \sum_{v=1}^{m+1} |\alpha_v| \leq 2^k \sum_{v=1}^{m+1} |\alpha_v|. \end{aligned}$$

From (2.4) we determine the  $\alpha_j$ 's.

$$\alpha_{m+1} = \frac{1}{b_3} = 1$$

$$\alpha_m = -b_1 = \sum_{j=1}^k \frac{1}{z_j}$$

$$\alpha_{m-1} = b_1^2 - b_2 = \sum_{i,j} \frac{1}{z_i z_j}$$

and by induction we get finally

$$\alpha_{m-v} = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = v+1 \\ l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0}} \frac{1}{z_1^{l_1} \cdots z_k^{l_k}} \quad (v = 0, 1, \dots, m-1)$$

that is

$$|\alpha_{m-v}| \leq \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = v+1 \\ l_1 \geq 0, \dots, l_k \geq 0}} 1 = \binom{k+v}{v+1}$$

and

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} + \sum_{v=1}^{m-1} |\alpha_{m-v}| &\leq \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k+1}{2} + \dots + \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{m+k}{m} \\ &= \binom{m+k}{k} < \frac{(m+k)^k}{k!} \left( \frac{e(m+k)}{k} \right)^k. \end{aligned}$$

This and (2.5) complete the proof.

Next we turn to the sketch of the proof of Theorem I. We apply the Lemma 2.1 for the polynomial

$$F(z) = \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{z}{z_j} \right) \left( 1 - \frac{z}{\bar{z}_j} \right),$$

and the Lemma 2.2 for the system

$$z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_n, \bar{z}_n.$$

Thus we can construct the following polynomials

$$\begin{aligned} h_1(z) &= F(z)\varphi(z)(1+z+\dots+z^{2n-1})z^{m+1} \left( \frac{2e(m+n)}{n} \right)^{2n} + g(z) = \\ (2.6) \quad &= \sum_{m+1 \leq v \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{x} \right)} d_v^{(1)} z^v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2(z) &= F(z)\varphi(z)(1+z+\dots+z^{2n-1}) \left( \frac{2e(m+n)}{n} \right)^{2n} z^{m+1} - g(z) = \\ &= \sum_{m+1 \leq v \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{x} \right)} d_v^{(2)} z^v. \end{aligned}$$

where the  $d_r$ 's are non-negativ. and

$$(2.7) \quad \sum d_r^{(j)} \leq 2n \cdot 2^{2n} \left| \frac{2e(m+n)}{n} \right|^{2n} + \left| \frac{2e(m+n)}{n} \right|^{2n} \leq 4n \left| \frac{4e(m+n)}{n} \right|^{2n} \quad (j = 1, 2).$$

Using the properties of the polynomials  $F(z)$  and  $g(z)$  we have, replacing  $z$  in (2.6) by  $z_j$  multiplying by  $b_j$  and summing for  $j = 1, 2, \dots, n$

$$(2.8) \quad \sum_{m+1 \leq r \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{\alpha} \right)} d_r^{(1)} s_r = b_1 + \dots + b_n$$

and

$$\sum_{m+1 \leq r \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{\alpha} \right)} d_r^{(2)} s_r = -(b_1 + \dots + b_n)$$

where

$$s_r = \sum_{j=1}^n b_j z_j.$$

From these as the coefficients are real we get

$$\sum_r d_r^{(1)} \operatorname{Re} s_r = \operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_n)$$

$$\sum_r d_r^{(2)} \operatorname{Re} s_r = -\operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_n).$$

Taking into account the non-negativity of the coefficients we get

$$\max_{m+1 \leq r \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{\alpha} \right)} \operatorname{Re} s_r \geq -\frac{1}{\sum_r d_r^{(1)}} \operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_n)$$

and

$$\min_{m+1 \leq r \leq m+n \left( 3 + \frac{\pi}{\alpha} \right)} \operatorname{Re} s_r \leq -\frac{1}{\sum_r d_r^{(2)}} \operatorname{Re}(b_1 + \dots + b_n).$$

These and (2.7) complete the proof.

3. For the proof of the Theorem II, we need to use a few corollaries of a well-known theorem of FARKAS-MINKOWSKI.

Let

$$(3.1) \quad l_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

a system of homogenous linear inequalities. If the rank of the system (3.1) is  $l (\leq m, k)$ , then a solution  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  will be called an extremal solution if in  $l-1$  linear forms we have equality-sign for this  $\xi$ , i. e. there are indices  $j_1, \dots, j_{l-1}$  so that

$$l_{j_1}(\xi) = 0, \dots, \quad l_{j_{l-1}}(\xi) = 0.$$

If the rank of the system is  $l$ , and solvable, further  $k = m$ , then there is at most  $m$  extremal solutions such that each solution of (3.1) can be represented as positive linear combination<sup>1</sup> of these solutions. It is evident that a positive combination of some solutions of (3.1) are also solution. If we can find  $m$  linearly independent extremal solutions, then — geometrically saying — the set of the positive combinations of these solutions represents the polyhedral-cone determined by the system (3.1).

Next we turn to the proof of the Theorem II. We need to find all the polynomials with minimal degree for which the polynomial

$$(3.2) \quad (x^2 - 2 \cos \alpha x + 1)/(x)$$

has non-negativ coefficients.

Here  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , where owing to the minimality of the degree we may suppose  $a_0 = 1$  and also  $a_n > 0$ ; the degree  $n$  will be determined later.

(3.2) results the following system of inequalities (putting for the sake of symmetry)

$$(3.3) \quad a_{-1} = a_{n+1} = 0, \quad a_0 = 1 \quad \text{and} \quad a_n > 0$$

$$a_{-1} - 2 \cos \alpha a_0 + a_1 \geq 0$$

$$a_0 - 2 \cos \alpha a_1 + a_2 \geq 0$$

⋮ ⋮ ⋮

$$a_{i-2} - 2 \cos \alpha a_{i-1} + a_i \geq 0$$

⋮

↓

$$a_{n-1} - 2 \cos \alpha a_n + a_{n+1} \geq 0.$$

According to the quoted theorem we shall investigate the extremal solutions of the system (3.4) which fulfil the conditions (3.3).

Since the rank of the (3.3) system is  $(n + 1)$ , so in the case of an extremal solution there are equalities in (3.4) except in one — say in the  $j$ 'th inequality.

That is (3.4) will assume the form — putting  $a_i^{(j)}$  instead of  $a_i$  —

$$(3.5) \quad \begin{aligned} a_{i-2}^{(j)} - 2 \cos \alpha a_{i-1}^{(j)} + a_i^{(j)} &= 0 \\ 1 \leq i \leq n+1 \quad i \neq j \end{aligned}$$

and

$$a_{j-2}^{(j)} - 2 \cos \alpha a_{j-1}^{(j)} + a_j^{(j)} = d_j \geq 0.$$

We solve the system (3.5) as difference equations at fixed  $j$ . The characteristical polynomial is

$$\lambda^2 - 2 \cos \alpha \lambda + 1 = 0$$

$$\text{i. e.} \quad \lambda_1 = e^{+ix} \quad \text{and} \quad \lambda_2 = e^{-ix}.$$

<sup>1</sup> We call a linear combination to be positive if it has non-negativ coefficients.

Hence

$$a_r^{(j)} = x_1 \lambda_1^r + x_2 \lambda_2^r, \quad (-1 \leq r \leq j-1)$$

and

$$(3.6) \quad a_j^{(j)} = x_1 \lambda_1^j + x_2 \lambda_2^j + d_j$$

where  $x_1$  and  $x_2$  can be determined from the initial conditions  $a_{-1}^{(j)} = 0$ ,  $a_1^{(j)} = 1$ .

Further

$$(3.7) \quad a_r^{(j)} = y_1 \lambda_1^r + y_2 \lambda_2^r, \quad (j+1 \leq r \leq n+1)$$

where  $y_1$  and  $y_2$  can be determined from the initial conditions

$$a_{j-1}^{(j)} = x_1 \lambda_1^{j-1} + x_2 \lambda_2^{j-1}$$

$$(3.8) \quad a_j^{(j)} = x_1 \lambda_1^j + x_2 \lambda_2^j + d_j.$$

Using from (3.3) that  $a_{m+1}^{(j)} = 0$  is, from the equality

$$0 = y_1 \lambda_1^{n+1} + y_2 \lambda_2^{n+1}.$$

We can determine  $d_j$  explicitly as  $y_1$  and  $y_2$  according to (3.6), (3.7) and (3.8) contain  $d_j$  implicitly.

We get from (3.5)

$$\left( \sum_{r=0}^n a_r^{(j)} x^r \right) (x^2 - 2 \cos \alpha x + 1) = 1 + d_j x^j + a_n^{(j)} x^{n+2}.$$

We have by calculation from the above

$$(3.9) \quad d_j = -\frac{\sin(n+2)\alpha}{\sin(n-j+2)\alpha}$$

$$a_n^{(j)} = \frac{\sin j\alpha}{\sin(n-j+2)\alpha}$$

generally

$$a_r^{(j)} = \begin{cases} \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin \alpha} & \text{if } \nu = 0, \dots, j-1 \\ \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin(n+2)\alpha \sin(\nu-j+1)\alpha}{\sin \alpha \sin(n-j+2)\alpha} & \text{if } \nu = j, \dots, n. \end{cases}$$

From (3.9) follows immediately that it is enough to deal with  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . In this case from the inequality  $d_i \geq 0$  follows

$$(n+2)\alpha \geq \pi$$

that is

$$n+2 \geq \frac{\pi}{|\alpha|}.$$

It is easy to see that if

$$\frac{\pi}{n+2} \leq |\alpha| < \frac{\pi}{n+1}$$

then  $d_j \geq 0$  and  $a_n^{(j)} > 0$  are, that is the value of the minimal degree is the minimal integer number for which

$$(3.10) \quad n+2 \geq \frac{\pi}{|\alpha|}.$$

From (3.9) we get the extremal solutions with the degree (3.10) and by the mentioned theorem each solution of (3.4) is positiv combination of the "extremal" polynomials

$$f_j(x) = \sum_{r=0}^n a_r^{(j)} x \quad (a_0 = 1) \\ \text{Qu.e.d.}$$

### References

- [1] P. TURÁN, On an improvement of some new one-sided theorems of the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 11 (1960), 299–316.
- [2] P. TURÁN, On some further one-sided theorems of new type in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 12 (1961), 455–468.
- [3] P. TURÁN, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, (Akadémiai Kiadó Budapest, 1953).



# ON COMPLETE TOPOLOGICAL SUBGRAPHS OF CERTAIN GRAPHS

By

P. ERDŐS and A. HAJNAL

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences and  
Department of Analysis I. of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received September 6, 1963)

Let  $G$  be a graph. We say that  $G$  contains a complete  $k$ -gon if there are  $k$  vertices of  $G$  any two of which are connected by an edge, we say that it contains a complete topological  $k$ -gon if it contains  $k$  vertices any two of which are connected by paths no two of which have a common vertex (except endpoints). Following G. DIRAC we will denote complete  $k$ -gons by  $\langle k \rangle$  and complete topological  $k$ -gons by  $\langle k \rangle_t$ .  $G(k, l)$  denotes a graph of  $k$  vertices and  $l$  edges  
{the complete  $k$ -gon is thus  $G\left[k, \binom{k}{2}\right]$ }. P. TURÁN [1] proved that every

$$(0) \quad G\left[n, \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}\right], \quad n \equiv r \pmod{k-1}, \quad 0 \leq r < k-1$$

contains a  $\langle k \rangle$  and showed that this result is best possible. Trivially every  $G(n, n)$  contains a  $\langle 3 \rangle$ , and G. DIRAC [2] proved that every  $G(n, 2n-2)$  contains a  $\langle 4 \rangle$ , and gave a  $G(n, 2n-3)$  which does not contain a  $\langle 4 \rangle$ . It has been conjectured that every  $G(n, 3n-5)$  contains a  $\langle 5 \rangle$ , but this has never been proved and in fact it is not known if there exists a  $c$  so that every  $G(n, \lfloor cn \rfloor)$  contains a  $\langle 5 \rangle$ . Denote by  $h(k, n)$  the smallest integer so that every  $G(n, h(k, n))$  contains a  $\langle k \rangle$ . It is easy to see that

$$(1) \quad h(k, n) > c_1 k^2 n.$$

$c_1, c_2, \dots$  denote positive absolute constants (not necessarily the same if there is no danger of misunderstanding).

To show (1) it will clearly suffice to show that the complete pair graph  $(l, l)$  does not contain a complete  $\langle \left[ \frac{l^2}{4l^2} \right] \rangle_t$ , for then if we consider  $\left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil$  disjoint

copies of our  $(l, l)$  we obtain a graph of  $\geq 2n$  vertices,  $\left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil l^2$  edges which contains

no  $\left\langle \left[ 4l^{\frac{1}{2}} \right] \right\rangle_t$ . Choosing now  $l$  to be the greatest integer for which  $\left[ 4l^{\frac{1}{2}} \right] \leq k$  we clearly obtain a proof of (1).

Let  $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$  be the vertices of our  $(l, l)$ . If it would contain an  $\left\langle \left[ 4l^{\frac{1}{2}} \right] \right\rangle_t$  we can assume that at least  $\left[ 2l^{\frac{1}{2}} \right]$  of its vertices are  $x_i$ 's. To connect any two with disjoint paths we clearly need more than  $ly_i$ 's but there are only  $l$  of them, hence (1) is proved.

Perhaps

$$(2) \quad h(k, n) < c_2 k^2 n$$

holds uniformly in  $k$  and  $n$ . Thus in particular any  $G(n, c_3 n^2)$  perhaps contains a  $\left\langle \left[ c_4 n^{\frac{1}{2}} \right] \right\rangle_t$ . We can prove this only if  $c_3 > \frac{1}{6}$ . In fact we shall prove

**THEOREM 1.** Let  $r \geq 2, c_3 > \frac{1}{2r+2}$ . Then every  $G(n, c_3 n^2)$  contains  $\left\langle \left[ c_4 n^{\frac{1}{r}} \right] \right\rangle_t$  where  $c_4$  depends on  $c_3$ .

We postpone the proof, but deduce the following

**COROLLARY.** Split the edges of a graph  $\langle n \rangle$  into two classes, then at least one of them contains a  $\left\langle \left[ c_5 n^{\frac{1}{2}} \right] \right\rangle_t$ .

The corollary follows immediately from Theorem 1 since at least one of the classes contains  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} > \frac{n^2}{5} > \frac{n^2}{6}$  edges.

Denote by  $f(k, l)$  the smallest integer so that if we split the edges of an  $\langle f(k, l) \rangle$  into two classes in an arbitrary way, either the first contains a  $\langle k \rangle$  or the second an  $\langle l \rangle$ . Trivially  $f(k, 2) = k, f(2, l) = l$ . Further it is known [3] that

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{k}{2^2} &< f(k, k) < \frac{8}{9} \binom{2k}{k} \\ c_7 \left| \frac{k+l-2}{k-1} \right|^{c_6} &< f(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} \\ c_8 k^2 (\log k)^{-2} &< f(k, 3) = \binom{k+1}{2}. \end{aligned}$$

The exact determination or sharper estimation of  $f(k, l)$  seems a difficult problem.

Denote further by  $f(k_t, l_t)$  the smallest integer for which if we split the edges of an  $\langle f(k_t, l_t) \rangle$  into two classes in an arbitrary way either the first class contains a  $\langle k \rangle_t$  or the second class an  $\langle l \rangle_t$ . Finally  $f(k, l_t)$  denotes the smallest integer for which if we split the edges of an  $\langle f(k, l_t) \rangle$  into two classes in an arbitrary way, then either the first class contains a  $\langle k \rangle$  or the second class contains a  $\langle l \rangle_t$ . Trivially

$$f(k, \langle 3 \rangle_t) = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$$

since unless  $G$  is a tree it contains a  $\langle 3 \rangle_t$ , and the vertices of every tree can be split into two sets none of which contains an edge. It seems likely that

$$(4) \quad f(k_t, l_t) < c_t k \text{ and perhaps even } f(k, l_t) < c'_t k$$

but we can not prove (4) if  $l > 4$ . For  $l = 4$  both inequalities of (4) easily follow from Dirac's result according to which every  $G(n, 2n-2)$  contains a  $\langle 4 \rangle_t$ . (2), or the weaker conjecture:  $h(k, n) < c''_k n$  would easily imply (4).

We shall prove

**THEOREM 2.**

$$(i) \quad c_9 k^2 < f(k_t, l_t) < c_{10} k^2$$

$$(ii) \quad c_{11} l^{\frac{4}{3}} \cdot (\log l)^{-\frac{2}{3}} < f(3, l_t) \equiv \left\lceil \frac{l+1}{2} \right\rceil$$

$$(iii) \quad c_{12} k^3 (\log k)^{-1} < f(k, k_t).$$

In a paper of P. ERDŐS and R. RADO [4] the following partition symbol is introduced:

$m \rightarrow (m, m)^2$  denotes the statement that if we split the edges of a complete graph of power  $m$  into two classes in an arbitrary way then there exists a complete subgraph of power  $m$  all whose edges belong to the same class.  $m \not\rightarrow (m, m)^2$  denotes the negation of this statement.

We introduce the symbols  $m \rightarrow (m_t, m_t)^2$ ,  $m \not\rightarrow (m, m_t)^2$  which have a self explanatory meaning. (Similarly as the notations  $f(k_t, l_t)$ ,  $f(k, l_t)$ .)

**THEOREM 3.** Let  $m$  be any infinite cardinal. Then

$$m \rightarrow (m_t, m_t)^2.$$

**REMARK.** W. SIERPINSKI [5] proved  $2^{\aleph_0} \not\rightarrow (\aleph_1, \aleph_1)^2$ .

Very likely  $m \rightarrow (m, m_t)^2$  also holds for every  $m \geq \aleph_0$ . We can prove this only in case  $m$  is singular and is the sum of  $\aleph_0$  cardinals less than  $m$ ; using a theorem of a forthcoming triple paper with RADO [6]. We will not give the details.

Now we turn to the proofs of our Theorems.

**PROOF OF THEOREM 1.** We need the following

**LEMMA.** Let  $s$  be an integer,  $u > \frac{1}{s}$  and let  $A_1, \dots, A_s$  be subsets of a set

$S$  satisfying

$$|S| = n \quad |A_i| > un \quad (i = 1, \dots, s).$$

$|S|$  denotes the number of elements of the set  $S$ ). Then for some  $1 \leq i < j \leq s$

$$|A_i \cap A_j| \geq n(su - 1) \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil^{-1}.$$

The proof follows immediately from the obvious inequality

$$\text{sum} \leq \sum_{i=1}^s |A_i| \leq n + \sum_{1 \leq i < j \leq s} |A_i \cap A_j|.$$

Let now  $c_8 > \frac{1}{2r+2}$  and let there be given a  $G(n, c_8 n^2) = G$ . A simple argument shows that our  $G$  contains at least  $c_{13}n$  vertices of valency  $\geq c_{14}n$  where  $c_{13}$  is an arbitrary number satisfying  $\frac{1}{r+1} < c_{14} < 2c_{13}$  and  $c_{13}$  could easily be determined explicitly as a function of  $c_{14}$ ). Denote these vertices of our  $G$  by  $x_1, \dots, x_p$  ( $p = [c_{13}n]$ ). To each  $x_i$   $1 \leq i \leq p$  we make correspond the set  $A_i$  which consists of the vertices connected to  $x_i$  by an edge.  $|A_i| \geq c_{14}n$ . Thus by our lemma among any  $r+1$   $A_i$ 's say  $A_{i_1}, \dots, A_{i_{r+1}}$  there are two say  $A_{i_1}$  and  $A_{i_2}$  for which

$$(5) \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2}| > c_{15}n.$$

Define now a graph  $G^*$  spanned by the vertices  $x_1, \dots, x_p$  as follows: Two vertices  $x_i$  and  $x_j$  are connected in  $G^*$  by an edge if  $A_i$  and  $A_j$  satisfy (5). By (5) the maximum number of independent vertices of  $G^*$  is at most  $r$ . Hence by the second inequality of (3)  $G^*$  contains a complete graph of at least  $q$  vertices  $y_1, \dots, y_q$ ,  $q \geq c_{16}n^r$ . Let now  $s = \lceil c_4 n^r \rceil$ ,  $c_4 < c_{16}$  sufficiently small. A simple argument shows that the vertices  $y_1, \dots, y_s$  form a  $\langle s \rangle_p$  in fact any two vertices  $y_i$  and  $y_j$  can be connected by disjoint paths of length 2. To see this observe that if we want to connect  $y_j$  to  $y_i$ ,  $j > i$  by a path of length two, by (5) there are  $c_{15}n$  possible vertices we can use for this purpose and at most  $\binom{j}{2} < \binom{s}{2} < c_{15}n$  (if  $c_4$  is sufficiently small) have been used up — this proves that  $y_1 \dots y_s$  is an  $\langle s \rangle_p$  in  $G$  and hence completes the proof of Theorem 1.

**PROOF OF THEOREM 2.** The upper bound of the first inequality of Theorem 2 is just a restatement of the Corollary of Theorem 1. We only outline the proof of the lower bound. It is well known and can be shown by simple probabilistic arguments [8] that the edges of the graphs  $\langle k \rangle$  can be split into two classes in such a way that if  $A_k \cdot (\log k)^{-1} \rightarrow \infty$  then every subgraph of  $\langle k \rangle$  of  $A_k$  vertices contains  $\left\lfloor \frac{1}{4} + o(1) \right\rfloor A_k^2$  edges of both classes. Let now  $c_6 < \frac{1}{4}$  and consider such a splitting of the edges of a complete graph of  $[c_6 k^2]$  vertices. We show that neither class contains a  $\langle k \rangle_p$ . For if say the first class would contain a  $\langle k \rangle_p$ , say  $x_1, \dots, x_k$ , then  $\left\lfloor \frac{1}{4} + o(1) \right\rfloor k^2$  of the edges  $(x_i, x_j)$   $1 \leq i < j \leq k$  is in the second class. Thus these  $\left\lfloor \frac{1}{4} + o(1) \right\rfloor k^2$  pairs of vertices  $(x_i x_j)$  have to be connected by disjoint paths of length at least two (using edges of the first

class). But for this purpose we need at least  $\left\lfloor \frac{1}{4} + o(1) \right\rfloor k^2 > c_9 k^2$  vertices (if  $k > k_0(c_9)$  is sufficiently large). Thus the first inequality of Theorem 2 is proved.

The upper bound of the second inequality of Theorem 2 is the upper bound in the third inequality of (3). The lower bound follows easily from the lower bound of the third inequality of (3). From this inequality it follows that we can split the edges of an  $\langle n \rangle$  into two classes so that the first class does not contain a triangle and the second class does not contain a  $\langle [c_{17} n^{\frac{1}{2}} \log n] \rangle$ . Thus it follows from (1) by a simple computation that for sufficiently large  $\langle [c_{18} n^{\frac{3}{4}} (\log n)^{\frac{1}{2}}] \rangle$  contains more than  $n$  edges of the first class. Thus if the second class would contain a  $\langle [c_{18} n^{\frac{3}{4}} (\log n)^{\frac{1}{2}}] \rangle$ , we would need more than  $n$  vertices for the necessary disjoint paths — this completes the proof of the second inequality.

Now we outline the proof of the third inequality of Theorem 2.

Split the vertices of a complete graph of  $n$  vertices into  $\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} (\log n)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor = p$  classes  $C_i$ , each having nearly the same number of vertices (i. e. each  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq p$  contains  $\left\lfloor n^{\frac{2}{3}} (\log n)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor$  or  $\left\lfloor n^{\frac{2}{3}} (\log n)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor + 1$  vertices). Two vertices which are in different  $C_i$ 's are connected by an edge of the first class. The edges of each  $C_i$  we divide amongst the two classes in such a way that every complete subgraph of  $h(n)$  vertices of  $C_i$  satisfying  $h(n) \log n^{-1} \rightarrow \infty$  contains  $\left\lfloor n^{\frac{2}{3}} (\log n)^{\frac{2}{3}} \right\rfloor$  edges of both classes. See p. 146 of this paper. A simple argument (used already in the proof of Theorem 2) gives that the first class does not contain a  $\langle [c_{19} n^{\frac{1}{3}} (\log n)^{\frac{1}{3}}] \rangle$  and the second class does not contain a  $\langle [c_{19} n^{\frac{1}{3}} (\log n)^{\frac{1}{3}}] \rangle$ , if  $c_{19}$  is sufficiently large.

We do not know how far the third inequality of Theorem 2 is from being best possible, since we have no satisfactory upper bound for  $f(k, k_t)$ , we can only show  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k, k_t)^k \leq 1$  and we do not give the details since probably this

estimation is very poor. It seems possible that every  $G(n, cn^{\frac{3}{2}})$  contains a  $\langle [c_{20} \epsilon] \rangle$ , any two vertex of which are connected by disjoint paths of length one or two. This result if true would be very useful in deducing good upper bounds for our function  $f(k, k_t)$  but we have not been successful in deciding it.

**PROOF OF THEOREM 3.** Consider a set  $S$  of power  $m$  and assume that the edges of the complete graph spanned by  $S$  are split into two classes I and II. Define a two valued measure on the subsets of  $S$  so that all sets of power  $\langle m$  have measure 0. Without loss of generality we can assume that there is a subset  $S'$  of measure I so that if  $x \in S'$  the set of vertices connected with  $x$  in class I is of measure I. But then a simple argument by transfinite induction shows that any two vertices of  $S'$  can be connected by disjoint paths of length two, whose edges belong to class I (since if  $x \in S'$ ,  $y \in S'$  the set of vertices  $Z$  for which

the edges  $(x, z)$  and  $(y, z)$  both belong to class I is of measure I and therefore of power  $m$ ). This completes the proof of Theorem 3.

In connection with Theorem 1 we can put the following problem: Let  $c_{21} < 1$ ,  $c_{22} < c_{21}$  be two constants  $r \geq 2$  and let there be given  $n$  sets of measure  $\geq c_{21}$  in  $(0, 1)$  and determine the largest integer  $f(n, r, c_{21}, c_{22}) = f$  so that there are always at least  $f$  sets any  $r$  of them have an intersection of measure  $\geq c_{22}$ .<sup>1</sup> One can easily obtain lower bounds for  $f(n, r, c_{21}, c_{22})$  by Ramsay's theorem which are not too bad for  $r = 2$ , in fact as in the proof of Theorem 1 we obtain from the second inequality of (3) that

$$(6) \quad f(n, 2, c_{21}, c_{22}) > n^{\varepsilon(c_{21}, c_{22})}$$

where  $\varepsilon(c_{21}, c_{22})$  depends only on  $c_{21}$  and  $c_{22}$ . For  $r > 2$  the lower bounds obtained for  $f(n, r, c_{21}, c_{22})$  by Ramsay's theorem are probably very poor, quite possibly

$$f(n, r, c_{21}, c_{22}) > n^{\varepsilon(r, c_{21}, c_{22})}.$$

Finally we show that (6) is not very far from being best possible. We shall show that

$$(7) \quad f\left(n, 2, \frac{1}{2}, c\right) > n^{f(c)} \quad \text{for } c < \frac{1}{4}$$

where  $f(c)$  is a function which we could easily determine explicitly.

Recently G. KATONA proved the following conjecture of CHAO-KO, R. RADO and P. ERDÖS. [7] (KATONA's result is not yet published.) Let  $|S| = 2m$  and  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq u}$  be a family of subsets of  $S$  so that for every  $1 \leq i < j \leq u$   $A_i \cap A_j \geq 2k$ . Then

$$(8) \quad \max u = \sum_{r=k}^m \binom{2m}{m+r}.$$

(8) will easily imply (7). We define a graph as follows: Let  $|S| = 2m$  and let the vertices of our graph be the subsets of  $S$  containing  $m$  or more elements. We connect two vertices by an edge if the corresponding sets have fewer than  $2cm$  elements in common ( $c < \frac{1}{4}$ ). By the theorem of KATONA stated above the maximum number of independent vertices is

$$(9) \quad \sum_{r \geq 2cm} \binom{2m}{m+r} < (2^{2m})^{1-\alpha}$$

where  $\alpha$  depends only on  $c$  (the inequality in (9) is well known and follows by a simple computation). Our graph has  $> 2^{2m-1}$  vertices. Now make correspond to the  $i$ -th element of  $S$  the interval  $\left[\frac{i-1}{2m}, \frac{i}{2m}\right]$  and to a subset the union of

the intervals corresponding to the elements. An independent set of vertices gives a collection of sets any two of which have an intersection of measure  $\geq c$ , but if two vertices are connected their intersection has measure  $< c$ , hence (9) implies (7).

<sup>1</sup> A well-known result of [9] states that  $f(n, r, c_{21}, c_{22}) = r$  if  $n > n_0(r, c_{21}, c_{22})$ .

It is easy to see that if  $c < \frac{1}{6}$  then our graph contains no triangles, hence our construction gives a simple example of a graph of  $n$  vertices which contains no triangle and for which the maximum number of independent vertices is less than  $n^{1-\alpha}$ .

It is well known that  $f(\aleph_0, r, c_{21}, c_{22}) = \aleph_0$  and it is not hard to prove that if there are given  $m$  sets of measure  $> c_{21}$  there are always  $m$  of them so that the intersection of any  $\aleph_0$  of them has measure  $> c_{21}$ .

### References

- [1] P. TURÁN, On the theory of graphs, *Colloquium Math.*, 3 (1954), 19–30, see also *Mat. és Fiz. Lapok*, 48 (1941), 436–452 (in Hungarian).
- [2] G. DIRAC, In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.*, 22 (1960), 61–85.
- [3] P. ERDŐS and G. SZEKERES, A combinatorial problem in geometry, *Comp. Math.*, 2 (1935), 463–470; C. FRASNAY, Sur des fonctions d'entiers se rapportant au théorème de Ramsey, *C. R. Acad. Sci. Français*, 256 (1963), 2507–2510; P. ERDŐS, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 292–299; P. ERDŐS, Graph theory and probability II., *Canad. J. Math.*, 13 (1961), 346–352.
- [4] P. ERDŐS and R. RADO, A partition calculus in set theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 62 (1956), 427–489.
- [5] W. SIERPINSKI, Sur un problème de la théorie des relations, *Annali R. Scuola Norm. Sup. de Pisa*, Ser. 2, 2 (1933), 285–287.
- [6] P. ERDŐS, A. HAJNAL and R. RADO, Partition relations for cardinals. This paper is expected to appear in *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*
- [7] P. ERDŐS, C. KO and R. RADO, Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math.*, 12 (1961), 313–320.
- [8] ERDŐS PÁL, Ramsay és Van der Waerden tételeivel kapcsolatos kombinatorikai kérdésekéről, *Mat. Lapok*, 14 (1963), 29–38 (in Hungarian).



## ON EXTREMAL VALUES OF MAPPINGS II.<sup>1</sup>

.By  
I. JUHÁSZ

Department of Math. Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest  
(Received March 20, 1964)

### § 3.

The following statement is also well-known: the set of the strict (local) extremal value places of an arbitrary real valued function in a separable metric space is enumerable ([1] 363; [2]<sup>2</sup>, 158–159).

Similarly as in § 1, we introduce the following notations. Let  $R$  be a topological space and  $f$  a mapping of  $R$  (see § 1). A point of  $R$  will be a strict extremal value place if it has a neighbourhood  $U$  such that for any  $y \in U$ ,  $y \neq x$  we have either  $f(y) > f(x)$  or  $f(y) < f(x)$ . We call  $x$  a strict minimum or strict maximum place respectively.

We shall say that a topological space  $R$  has the characteristic  $\theta(k)$  — or shortly that  $R$  is a  $\theta(k)$  space — if the set of the strict extremal value places has a power  $\leq k$ , when mapping it to any partial ordered set. (Here  $k$  is an infinite cardinal number.)

It is easy to see that for  $\theta(k)$  spaces the following statements hold (these are quite similar to the results of § 2): ( $R$  denotes always a topological space.)

**THEOREM I A.** If  $Bg(R) = k$ , then  $R$  is a  $\theta(k)$  space.

**THEOREM II A.** If  $R$  is a  $\theta(k)$  space, then  $Sg(R) \leq k$ .

**LEMMA A.** If there is a transfinite sequence of points in  $R$  with the power  $k$  such that every point of this sequence has a neighbourhood which does not contain any previous points of the sequence, then there exists a mapping of  $R$  (actually into a well ordered set) such that the power of the set of the strict extremal value places is at least  $k$ .

**COROLLARY I A.** A pseudometric space  $R$  is a  $\theta(k)$  space if and only if  $Bg(R) \leq k$ ; if  $R$  is a pseudometric space for which  $Bg(R) > \aleph_0$ , then there exists a uniform continuous real function on  $R$  such that by this function the set of the strict extremal value places is not enumerable.

<sup>1</sup> The first part of this paper was published in the previous volume of this journal *Annates Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, 6(1963), 39–42.

<sup>2</sup> In [2] only the case of continuous real-valued functions of one variable is discussed.

**COROLLARY 2 A.** If  $R$  is a completely regular space with the property  $\theta(k)$ , then  $Bg(R) \leq 2^k$ .<sup>3</sup>

To prove these statements, we can use the proofs of the corresponding statements in § 2, only we must write  $\theta(k)$  instead of  $\sigma(k)$  and the set of the strict extremal places instead of the set of the values of a mapping (function) on its local extremal places.

Also holds the

**THEOREM III A.** Let  $m > k$  be two arbitrary infinite cardinal numbers. Then there exists a  $T_1$ -space  $R$  which is a  $\theta(k)$  space and yet  $Bg(R) = m$ , indeed  $Rg(p) = m$  for any  $p \in R$ .

**PROOF.** We shall prove that the space  $R$  in the proof of Theorem III of § 2 is a  $\theta(k)$  space. In fact, assume  $R$  is not a  $\theta(k)$  space. Then there exists a set  $H$  of points in  $R$  such that every point  $x \in H$  is a strict minimum place of a mapping  $f$  of  $R$ , and  $\bar{H} > k$ . But according to Theorem III  $\bar{f}(H) \leq k$ , thus there is a set  $K \subset H$ ,  $\bar{K} > k$  so that for every  $x, y \in K$   $f(x) = f(y)$ . However, if  $x \in K$  then it has a neighbourhood  $U$  such that  $f(x)$  is greater than any other value taken on in  $U$ , which is a contradiction, as  $\bar{R \sim U} < k$  and  $\bar{K} > k$ .

The cause of the complete analogy between the results of § 2 and § 3 is cleared by the following

**THEOREM IV.** The properties  $\sigma(k)$  and  $\theta(k)$  are equivalent.

**PROOF.** (i) Assume that  $R$  is not a  $\sigma(k)$  space. Then there exists a mapping  $f$  of  $R$  and a set  $H \subset R$ ,  $\bar{H} > k$ , such that  $x, y \in H$ ,  $x \neq y$  implies  $f(x) \neq f(y)$  and every point  $x \in H$  is a local minimum place. Let us denote by  $M$  the set  $f(H) \cup \{\xi\}$  where  $M$  is partially ordered in such a manner that  $\xi$  is greater than any element of  $f(H)$  and if  $f_1, f_2 \in M \sim \{\xi\}$ ,  $f_1 < f_2$  if and only if  $f_1 < f_2$  in  $f(H)$ .

Let us map  $R$  on  $M$  in the following way:

If  $x \in H$  then  $g(x) = f(x)$ , if  $x \in R \sim H$ , then  $g(x) = \xi$ . It is obvious that every point  $x \in H$  is a strict minimum place for  $g$ , thus  $R$  is not a  $\theta(k)$  space.

(ii) Assume that  $R$  is not a  $\theta(k)$  space, but it is a  $\sigma(k)$  space. Then there exists a set  $H \subset R$ ,  $\bar{H} > k$  such that every point  $x \in H$  is a strict minimum place for a mapping  $f$  of  $R$  and there exists a set  $K \subset H$ ,  $\bar{K} > k$  such that  $x, y \in K$  implies  $f(x) = f(y)$ . Thus if  $x, y \in K$ ,  $x \neq y$  and  $U_x, U_y$  are two neighbourhoods of  $x$  and  $y$  respectively so that  $f(x)$  and  $f(y)$  are greater than any other values taken on in  $U_x$  and  $U_y$  respectively then  $x \notin U_y$  and  $y \notin U_x$ . According to this, if we well order the set  $K$  then we get a transfinite sequence of points in  $R$  with the power larger than  $k$ , every point of which has a neighbourhood no containing any (previous) point of the sequence. But then, according to the Lemma of Theorem II in § 2,  $R$  is not a  $\sigma(k)$  space which is a contradiction. Thus if  $R$  is not a  $\theta(k)$  space, then it is not a  $\sigma(k)$  space.

By this, Theorem IV is proved.

Theorem IV enables us to use in the following only the notation  $\sigma(k)$ ,

<sup>3</sup> This statement is valid not only for completely regular spaces, but also for regular spaces, since the inequality  $Bg(R) \leq 2^{Sg(R)}$  – as Mr. R. ENGELKING was kind to inform me – holds for regular spaces too.

but, without mentioning it every times, we shall deal with the property  $\delta(k)$  instead of  $\sigma(k)$  whenever this will be convenient.

### § 4.

According to the preceding the question arises quite naturally that if we define the  $\sigma(k)$  property by using linearly ordered or even well-ordered sets instead of partially ordered sets, would it mean any change at all, and if so, what is the "degree" of this change.

It is easy to see, that all the results of the first three sections remain true for mappings into linearly ordered sets, and the same will happen if we consider only mappings into well ordered sets. To see this, it is enough to note on one hand that during the considerations on the conversals of Theorem I we applied always Theorem II, which guarantees a mapping into a well-ordered set, on the other hand that in those proofs where we considered only minimum places, the maximum places are to be examined on the analogy of the formers. This latter remark is essential only in the case of well-ordered sets; in fact, as we shall see later, there is a certain topological space the mappings of which into an arbitrary well-ordered set have maximum and minimum places with different cardinality properties.

Of course, the similarit of these results does not mean, in general, the equivalence of the altered definitions to the original ones. However, in the "weaker" case, i. e. by considering mappings into linearly ordered sets, this equivalence is yet valid. It is easy to see this with the help of a theorem of E. SZPIRAJN ([3], 386–389), according to which every partially ordered set can be embedded into a linearly ordered set and taking into account the definition of a local extremum place in which we postulated that the corresponding value should be comparable with the values attained on sufficiently near points.

We shall show that the analogon of the preceding statement does not hold in the case of mappings into well ordered sets.

Before discussing this we introduce a useful notation. Let  $R$  be a topological space. We shall denote by  $\sigma(R)$  the least infinite cardinal number  $k$  for which  $R$  has the property  $\sigma(k)$  and we shall call it the  $\sigma$ -weight of  $R$ . In the case of mappings into well-ordered sets we shall denote by  $\sigma^*(R)$  the corresponding cardinal number.

It is obvious from the definitions that

$$Sg(R) \leq \sigma^*(R) \leq \sigma(R) \leq Bg(R).$$

From this we can see that, for spaces  $R$  satisfying  $Sg(R) = Bg(R)$  – so in particular for pseudometric spaces – we have

$$\sigma(R) = \sigma^*(R),$$

so that in this case we can take in the definiton of  $\sigma(k)$  instead of partially ordered sets not only linearly ordered but well-ordered sets as well.

In the following we shall give an example which shows that this statement is not true for all topological spaces.

**THEOREM V.** *There exists a completely normal space  $R$  for which*

$$\sigma^*(R) = \aleph_0 \quad \text{and} \quad \sigma(R) = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

**PROOF.** Let us choose as  $R$  the set of all real numbers, provided with the so-called topology of right-side convergence, a base of which is formed by the intervals  $[x, y)$  half closed to the left. It is easy to control that  $R$  is completely normal indeed.

It is obvious that at the mapping  $f(x) = x$ , considering as range the set of real numbers in the natural ordering, every  $x \in R$  is a local minimum place, so that

$$\sigma(R) = \mathfrak{c}.$$

To prove the first equality, we can use the analogon of Theorem IV for mappings into well-ordered sets and assume, for example, that there exists a mapping  $f$  of  $R$  into a well ordered set  $H$  by which there is a non-enumerable infinity of strict (local) minimum places. The case of maximum places may be discussed in the same manner.

Denote by  $S$  the set of these places. Then every  $x \in S$  is the left end-point of an interval, say  $I_x$ , such that

$$y \in I_x - \{x\} \quad \text{implies} \quad f(x) < f(y).$$

As  $S > \aleph_0$ , there exists a  $T \subset S$  such that  $\overline{T} > \aleph_0$ , and for  $x \in T$  the length of  $I_x$  is greater than a fixed positive rational number  $r$ .

Now represent  $R$  as union of enumerable many intervals shorter than  $r$ . There is at least one among them, say  $I$ , for which  $\overline{I \cap T} > \aleph_0$ .

Now  $x, y \in I \cap T$ ,  $x < y$  imply  $f(x) < f(y)$ . That means in other words that  $f$  is an order preserving and hence one-to-one mapping of  $I \cap T$  into  $H$ , so that the natural ordering of  $I \cap T$  is a well-ordering. This is a contradiction, as it is known that every subset of the real line which is well-ordered in the natural ordering is enumerable. This completes the proof.

Some other questions arise here quite naturally: How important was the rôle of the above mentioned property of real numbers in this example; is it possible to give for  $\sigma(R)$  an upper bound which depends only on  $\sigma^*(R)$ ; or, at least, is it true that for every infinite cardinal number  $k$  there exist an  $R$  for which

$$\sigma^*(R) = k \quad \text{and} \quad \sigma(R) \geq 2^k?$$

## § 5.

Now we shall prove a theorem which is analogous to Theorem III.

**THEOREM VI.** *If  $\aleph_\alpha = m > k = \aleph_\beta$  and  $cf(\beta) = \beta$ , then there exists a  $T_0$ -space  $R$  for which*

$$Sg(R) = k \quad \text{and} \quad \sigma^*(R) = \sigma(R) \geq m.$$

**PROOF.** It is known that there exist an  $\aleph_\gamma \geq \aleph_\alpha$  for which  $cf(\gamma) = \beta$ . Put  $R = W(\omega_\gamma)$ , i. e.  $R$  denotes the set of those ordinal numbers  $\alpha$  for which  $\alpha < \omega_\gamma$ .

Let us introduce into  $R$  a topology taking as open sets all subsets having the form  $R - W(\alpha)$ , i. e. every "half line" closed to the left. It is easy to see that  $R$  is a  $T_0$  - space.

Clearly  $Sg(R) = k$ , and it is also obvious, considering the mapping  $f(\alpha) = \alpha$ , that

$$\sigma^*(R) = \sigma(R) = \bar{\bar{R}} = m.$$

Comparing this theorem to Theorem III we can see that, in general, in a topological space  $R$  we can conclude neither from the topological weight of the space  $Bg(R)$  nor from the degree of separability  $Sg(R)$  to the  $\sigma$ - or  $\sigma^*$ -weight of the space.

Let us note that in a  $T_2$  - space clearly holds the inequality

$$\bar{\bar{R}} \leq 2^{Sg(R)}$$

This implies

$$Sg(R) \leq \sigma^*(R) \leq \sigma(R) \leq 2^{Sg(R)}$$

in the case of  $T_2$  - spaces.

The example examined in the preceding proof is also interesting from another point of view, viz. it has the property mentioned in the preceding section: by mapping it into well-ordered sets the powers of strict maximum and minimum places will be very different. We have seen in fact that the power of strict minimum places may be equal to  $\bar{\bar{R}}$  which can be chosen arbitrarily large, and, at the same time, as it is easy to see, there can be, by any mapping into a well-ordered set, only a finite number of strict maximum places in  $R$ .

## § 6.

In the following we shall examine some general properties of  $\sigma(R)$  respectively  $\sigma^*(R)$ . As first we prove the following

**THEOREM VII.** *If  $\varphi: R \rightarrow T$  is a continuous mapping of the space  $R$  into  $T$  then*

$$\sigma(R) \geq \sigma(T) \quad [\sigma^*(R) \geq \sigma^*(T)].$$

**PROOF.** Let us consider an arbitrary mapping  $f$  of  $T$  into a (well-) ordered set  $H$ . Consider now a subset  $S$  of  $T$  which contains only local minimum places,  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$  imply  $f(x) \neq f(y)$  and  $f(S)$  contains all values attained at the minimum places of  $f$  in  $T$ .

The case of the maximum places can be discussed on a similar way.

Let us assign to every  $x \in S$  an  $x' \in R$  for which  $\varphi(x') = x$ . Now we construct a mapping of  $R$  as follows:

If  $x' \in R$  corresponds to some  $x \in S$ , put

$$g(x') = f[\varphi(x')] = f(x).$$

In the opposite case, put  $g(x') = \xi$ , where we add  $\xi$  to the set  $H$ , as an element greater than all elements of  $H$ .

It is clear that at this mapping  $g$  of  $R$  into the well-ordered set  $H \cup \{\xi\}$ , the power of the values attained on the local minimum places is at least equal

to the corresponding power corresponding to  $f$ , from which it follows immediately the statement of our Theorem.

COROLLARY. If  $R$  is the topological product of the spaces  $R_\alpha$ , then for every  $\alpha$

$$\sigma(R) \geq \sigma(R_\alpha) \quad \text{and} \quad \sigma^*(R) \geq \sigma^*(R_\alpha).$$

Here we mention another problem connected with the  $\sigma$ -weight of product spaces. It is easy to see that for such spaces  $R_\alpha$  for which

$$Sg(R_\alpha) = Bg(R_\alpha) = k \quad (\alpha \in A)$$

with a fixed cardinal  $k$ ,  $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha = R$  will be a  $\sigma(k)$  space, if  $\bar{A} \leq k$ .

As this remains true for the product of spaces of some other kinds, the question arises whether it is true in general that the product of  $k$   $\sigma(k)$  spaces will be a  $\sigma(k)$  space too.

We mention finally the following very simple

THEOREM VIII. If  $T \subset S$ , than  $\sigma(T) \leq \sigma(S)$  (and  $\sigma^*(T) \leq \sigma^*(S)$ ), i. e. the  $\sigma$ -weight ( $\sigma^*$ -weight) of a subspace is not greater than the  $\sigma$ -weight ( $\sigma^*$ -weight) of the original space.

PROOF. We shall give only a short sketch of the proof, as it goes on the analogy of the method, used several times in this paper (e. g. at the proof of Theorem VII).

Consider only minimum places, and a mapping of  $T$  into  $H$ , for which the power of the set of the strict minimum places is  $k$ ; extend this mapping to a mapping of  $S$  into  $H \cup \{\xi\}$  (where  $\xi$  is greater than any element of  $H$ ) in such a way that the image of every element of  $S - T$  be  $\xi$ . It is clear that at this mapping the power of the set of strict minimum places in  $S$  is also  $k$ . From this we get immediately our statement.

Theorem VIII and the analogon of Theorem IV for mappings into well-ordered set give the following

COROLLARY. If  $R$  is a topological space for which  $Sg(R) = \sigma^*(R)$ , and  $T \subset R$  then  $Sg(T) \leq Sg(R)$ .

So e. g. the space  $R$  in Theorem V is hereditarily separable.

### References

- [1] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914).
- [2] A. SCHOENFLIES, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmanigfaltigkeiten, *Jahresbericht der Deutschen Matematiker-Vereinigung*, Bd. 8, Heft 2, (1900).
- [3] E. SZPIRAJN, Sur l'extension de l'ordre partiel, *Fund. Math.*, 16 (1930), 386–389.

# TAUBERIAN CONSTANTS FOR LAURENT SERIES CONTINUATION MATRIX TRANSFORMS

By

K. ANJANEYULU

Birkbeck College, University of London\*

(Received February 26, 1964)

1. Originating in a paper by HADWIGER (1944) the determination of Tauberian Constants, for a given method of summability, has been dealt with, to mention only a few, by AGNEW (1949, 1954, 1957), DELANGE (1950), GARTEN (1951), and recently by JAKIMOVSKY (1963), ANJANEYULU [5]. A large number of further references will be found in AGNEW's work (1954). Here we consider the Laurent Series continuation matrix method, defined independently by MEYER-KÖNIG [12] and VERMES [13]. For  $0 < x < 1$ , it is defined as a sequence to sequence transformation matrix, by

$$(1.1) \quad L(x) : \binom{n+k}{k} (1-x)^{n+1} x^k \quad n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Let  $\mathcal{U}$  denote the class of series  $\sum u_k$  which satisfy the Tauberian condition

$$(1.2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^2} u_n \right| = L < \infty.$$

Let

$$(1.3) \quad s_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(1.4) \quad t_m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k s_k, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

denote respectively the partial sums and the sequence to sequence transform by  $L(x)$  of a series  $\sum u_k$  belonging to  $\mathcal{U}$ . Generally we suppose that  $m = m(\alpha)$ ,  $n = n(\alpha)$  are functions of a parameter  $\alpha > 0$ , taking positive integral values only and such that  $m(\alpha) \rightarrow \infty$ ,  $n(\alpha) \rightarrow \infty$  as  $\alpha \rightarrow \infty$ .

The series for  $t_m$  in (1.4), because of the Tauberian condition (1.2), converges for each fixed  $m$  and hence

$$t_m = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j \sum_{k=0}^j u_k$$

\* The contents of this paper from part of a Thesis accepted for the Ph. D. degree of London University.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j \right] u_k$$

so that

$$\begin{aligned} t_m - s_n &= - \sum_{k=0}^n \left[ 1 - \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j \right] u_k + \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j \right] u_k \\ &= - \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j \right] u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[ \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j \right] u_k \end{aligned}$$

which can be written as

$$(1.5) \quad t_m - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha) v_k$$

by putting

$$(1.51) \quad v_k = k^{\frac{1}{2}} u_k$$

$$(1.52) \quad f_k(\alpha) = \begin{cases} -k^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j & \text{for } 1 \leq k \leq n \\ +k^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{m+j}{j} (1-x)^{m+1} x^j & \text{for } k > n. \end{cases}$$

Now, as we shall show in Section 2

$$(1.6) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\alpha)| = A$$

where  $A$  is finite and

$$(1.61) \quad A = \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{-\frac{1}{2}a\Omega^2} + a\Omega \int_0^{\Omega} e^{-\frac{1}{2}au^2} du \right], \quad a = \frac{(1-x)^2}{x}$$

f

$$(1.7) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{|n - \lambda m|}{m^{\frac{1}{2}}} = \Omega < \infty, \quad \lambda = \frac{x}{1-x};$$

and  $A$  is infinite if

$$(1.71) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{|n - \lambda m|}{m^{\frac{1}{2}}} = \infty.$$

Since, clearly

$$(1.8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_k(\alpha) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

and  $v_k$  is bounded because of the Tauberian condition (1.2), it follows, from Lemma 3.1 of AGNEW (1949) and Theorem 7.5, Section 10 of AGNEW (1939), that

$$(1.9) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} |t_m - s_n| \leq AL$$

whenever the condition (1.2) holds. Moreover, when  $A$  is finite, it is the best possible constant in the sense that there is a series  $\Sigma u_k$  belonging to the class  $\mathfrak{U}$  for which (1.2) holds with  $0 < L < \infty$  and the members of (1.9) are equal.

Further,  $A$  attains the minimum value

$$(1.62) \quad A = \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

if and only if  $\Omega = 0$  in (1.7) and we obtain in particular, the following two theorems:

**THEOREM 1.** *A sequence  $\{n_m\}$ ,  $n_m \rightarrow \infty$  is such that the inequality*

$$(1.92) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} |t_m - s_{n_m}| \leq \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left| m^{\frac{1}{2}} u_m \right|$$

*holds for every  $\Sigma u_n$  belonging to  $\mathfrak{U}$ , if and only if*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n_m - \lambda m}{m^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

*There is no sequence  $\{n_m\}$ ,  $n_m \rightarrow \infty$  such that the strict inequality*

$$(1.93) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} |t_m - s_{n_m}| < \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left| m^{\frac{1}{2}} u_m \right|$$

*holds for every  $\Sigma u_k$  belonging to  $\mathfrak{U}$ .*

**THEOREM 2.** *A sequence  $\{m_n\}$ ,  $m_n \rightarrow \infty$  is such that the inequality*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |t_m - s_{n_m}| \leq \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| n^{\frac{1}{2}} u_n \right|$$

*holds for every  $\Sigma u_k$  belonging to  $\mathfrak{U}$  if and only if*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda m_n - n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

*There is no sequence  $\{m_n\}$ ,  $m_n \rightarrow \infty$  such that the inequality*

$$(1.95) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |t_{m_n} - s_n| < \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| n^{\frac{1}{2}} u_n \right|$$

*holds for every  $\Sigma u_k$  belonging to  $\mathfrak{U}$ .*

It is interesting to note that, if we are looking for a  $q$  ( $0 < q < \infty$ ) such that  $\frac{n}{m} \rightarrow q$  and the inequality

$$\limsup_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \frac{n}{m} \rightarrow q}} |t_m - s_n| \leq \left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left| m^{\frac{1}{2}} u_m \right|$$

holds for every  $\sum u_k$  belonging to  $\mathcal{U}$ , as in the works of AGNEW [2], JAKIMOVSKY [10] and ANJANEYULU [5], then the only value of  $q$  for which a finite Tauberian

constant, namely  $\left( \frac{2}{\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}}$  for the method  $L(x)$  exists is  $q = \lambda = \frac{x}{1-x}$ .

2. In this section we shall determine the constant  $A$  in (1.6). We begin with the following analogy, except for clause 7, of Theorem 139 of HARDY [9]. Perhaps it should be pointed out that clause 7 supplements the conclusions of clause 6 with respect to (2.16). Since the proof of clauses 1 to 6 is substantially the same as that in the Theorem referred to above, we give the proof of clause 7 only.

**THEOREM 3.** Suppose that  $0 < x < 1$  and

$$(2.1) \quad a_k = a_k(m) = \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

so that  $\sum a_k = 1$ . Then

(1) the largest  $a_k$  is  $a_K$  where

$$(2.11) \quad K = [\lambda m], \quad \lambda = \frac{x}{1-x}$$

two terms  $a_{K-1}$  and  $a_K$  being equal when  $\lambda m$  is an integer;

(2) if  $0 < \delta < 1$  and

$$(2.12) \quad k = K + h$$

then

$$(2.13) \quad \sum_{|h| > \delta m} a_k = O(e^{-\gamma})$$

where  $\gamma = \gamma(x, \delta)$  is some positive number;

(3) if

$$(2.14) \quad \frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$$

then

$$(2.15) \quad \sum_{|h| > m^\zeta} a_k = O(e^{-m^\eta})$$

where  $\eta$  is any number less than  $2\zeta - 1$ ;

(4) if  $\xi > 0$ , then

$$(2.16) \quad \sum_{\substack{|h| > \xi m^{\frac{1}{2}}} a_k < \varepsilon$$

for  $m > m_0(\varepsilon)$ ,  $\xi > \xi_0(\varepsilon)$ ;

(5) if  $|h| \leq m^{\xi}$ , then

$$(2.17) \quad a_k = \left( \frac{c}{\pi K} \right)^{1/2} e^{-ch^2/K} \left[ 1 + O\left( \frac{|h|+1}{m} \right) + O\left( \frac{|h|^3}{m^2} \right) \right]$$

where  $c = \frac{1}{2}(1-x)$  and we may replace  $K$  by  $\lambda m$  if we prefer to;

(6) the estimates (2.13) and (2.15) remain valid if  $a_k$  is multiplied by any fixed power of  $k$ ;

(7) if  $\xi > 0$  and

$$(2.18) \quad n = \lambda m + w m^{\frac{1}{2}}$$

where  $w$  is some fixed number, then

$$(2.19) \quad \sum_{\substack{|h| > \xi m^{\frac{1}{2}}} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| a_k < \varepsilon$$

for  $m > m_0(\varepsilon)$ ,  $\xi > \xi_0(\varepsilon)$ .

To prove clause 7 we suppose, as we may, that  $m \geq 1$  and write the left hand side of (2.19) as

$$O(1) + \sum_{\substack{|h| > \xi m^{\frac{1}{2}}} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k$$

and, since  $h = k - [\lambda m]$ , it is enough to consider

$$(2.2) \quad F_1 = \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k.$$

$$\text{Now } \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{|k-n|}{k^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|k-n|}{n^{\frac{1}{2}}}$$

and hence

$$\begin{aligned} F_1 &\leq n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} |k-n| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k = \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} \left[ (k-n)^2 \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

which, by Schwarz's inequality, gives

$$(2.21) \quad F_1 \leq n^{-\frac{1}{2}} \left[ \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} (k-n)^2 \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \right]^{\frac{1}{2}}.$$

From the formulae

$$(2.22) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$(2.221) \quad \sum k \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \frac{mx}{1-x} = \lambda m$$

$$(2.222) \quad \sum k(k-1) \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k = \frac{m(m+1)x^2}{(1-x)^2}$$

we obtain, for any  $t$ , the formula

$$(2.223) \quad \sum (k-t)^2 \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k = (\lambda m - t)^2 + \frac{mx}{(1-x)^2}$$

and, in particular,

$$(2.224) \quad \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} (k-t)^2 \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \leq (\lambda m - t)^2 + \frac{mx}{(1-x)^2}$$

$$(2.225) \quad \sum (k-\lambda m)^2 \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k = \frac{mx}{(1-x)^2}$$

$$(2.226) \quad \sum_{\substack{|k-\lambda m| > \xi m^{\frac{1}{2}}} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k \leq \frac{mx}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(\xi m^{\frac{1}{2}})^2}$$

making use of (2.18), (2.224), (2.226) we see from (2.21) that (2.227)

$$(2.227) \quad F_1 \leq \left| \frac{n}{\lambda m} \right|^{-\frac{1}{2}} \left( w^2 + \frac{x}{(1-x)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi},$$

which, for sufficiently large  $m$  and  $\xi$  gives

$$F_1 < \varepsilon.$$

This completes the proof of clause (7).

Next we need another result given as Theorem 4 since it may be of interest independently. Let a function  $w = w(\alpha)$  be defined by

$$(2.3) \quad w(\alpha) = \frac{n - \lambda m}{\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}} \quad \text{or} \quad n = \lambda m + w m^{\frac{1}{2}}$$

where  $\lambda = \frac{x}{1-x}$ , and let

$$(2.31) \quad F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k.$$

**THEOREM 4.** If

$$(2.4) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} |w(\alpha)| < \infty$$

then

$$(2.41) \quad F(\alpha) = o(1) + \left( \frac{1}{2\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{-\frac{1}{2}aw^2} + a|w| \int_0^{|w|} e^{-\frac{1}{2}au^2} du \right]$$

where  $a = \frac{(1-x)^2}{x}$ . If

$$(2.42) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} |w(\alpha)| = \infty$$

then

$$(2.43) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha) = \infty.$$

To prove the first part, we split up  $F(\alpha)$  into two parts, the first of which is

$$(2.5) \quad F_1(\alpha) = \sum_{|k-\lambda m| > \delta} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k$$

where  $\delta$  is positive and arbitrary. Since, given  $\varepsilon > 0$ , the hypothesis (2.4) implies that, for sufficiently large  $m$ , and  $\xi > 0$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{\lambda m} \right| = 1, \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{n}{\lambda m} \right)^{\frac{1}{2}} \left( w^2 + \frac{x}{(1-x)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi} \right] < \varepsilon$$

by choosing the  $\delta$  in (2.5) in the form  $\xi m^{\frac{1}{2}}$  we see, from inequality (2.227) of Theorem 3, that

$$(2.51) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} F_1(\alpha) < \varepsilon.$$

Now equations (2.31) and (2.5) give

$$(2.6) \quad F(\alpha) = F_1(\alpha) + \sum_{|k-\lambda m| < \delta} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k.$$

Since

$$\left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} (\lambda m)^{-\frac{1}{2}} |k-n| \left\{ \frac{2(\lambda m)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

and the factor in the curly brackets for the range of values of  $k$  in the second sum of (2.6) converges uniformly to 1 as  $\alpha \rightarrow \infty$ , and  $\delta$  is of the form  $\xi m^{\frac{1}{2}}$  we obtain

$$(2.61) \quad F(\alpha) = F_1(\alpha) + o(1) + \frac{1}{2} (\lambda m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{|k-\lambda m| < \delta} |k-n| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k.$$

Putting

$$(2.62) \quad F_2(\alpha) = \frac{1}{2} (\lambda m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{|k-\lambda m| < \delta} |k-n| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k$$

we see, as in the case of  $F_1(\alpha)$ , that

$$(2.621) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} F_2(\alpha) < \varepsilon.$$

Moreover,

$$F(\alpha) = F_1(\alpha) - F_2(\alpha) + o(1) + \frac{1}{2} (\lambda m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} |k-n| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k$$

and, because of (2.51), (2.621) we conclude that

$$(2.64) \quad F(\alpha) = o(1) + G(\alpha)$$

where

$$(2.641) \quad G(\alpha) = \frac{1}{2} (\lambda m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} |k-n| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k.$$

We again split the sum in (2.641) into parts for which  $0 \leq k \leq n$  and  $k > n$  and make use of (2.3) to obtain

$$(2.642) \quad G(\alpha) = G_1(\alpha) + G_2(\alpha) - \frac{1}{2} w \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

where

$$(2.643) \quad G_1(\alpha) = (\lambda m)^{\frac{1}{2}} \binom{m+n}{n} (1-x)^m x^n,$$

$$(2.644) \quad G_2(\alpha) = w \lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k.$$

Now, for each fixed value of  $\alpha$ , clause 5 of Theorem 3 gives

$$(2.645) \quad G_1(\alpha) = o(1) + \left( \frac{1}{2\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}aw^2}$$

where  $a = \frac{(1-x)^2}{x}$  and for  $G_2(\alpha)$  we have

$$\begin{aligned} G_2(\alpha) &= w\lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k = o(1) + \\ &+ w\lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{k \\ k < \lambda m + w m^{\frac{1}{2}}}} \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k = o(1) + \left( \frac{1}{2\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} aw \int_{-\infty}^w e^{-\frac{1}{2}au^2} du. \end{aligned}$$

Further, since  $\frac{1}{2} w\lambda^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{2\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} aw \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}au^2} du$ ,

we obtain

$$(2.646) \quad G_2(\alpha) - \frac{1}{2} w\lambda^{-\frac{1}{2}} = o(1) + \left( \frac{1}{2\pi(1-x)} \right)^{\frac{1}{2}} a|w| \int_0^{|w|} e^{-\frac{1}{2}au^2} du.$$

Equations (2.64), (2.642), (2.645) and (2.646) together give equation (2.41) of the theorem.

To prove the second part of the Theorem let  $\eta > \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x}$  be a constant. We have, for sufficiently large  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} F(\alpha) &> \sum_{\substack{|k| \\ |k-\lambda m| < \eta m^{\frac{1}{2}}}} \left| \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k = \\ &= \sum_{\substack{|k| \\ |k-\lambda m| < \eta m^{\frac{1}{2}}}} \frac{|k-n|}{\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + n^{\frac{1}{2}}} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k > \\ &> \frac{1}{(\lambda m - m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{|k| \\ |k-\lambda m| < \eta m^{\frac{1}{2}}}} \left| k - (\lambda m + w m^{\frac{1}{2}}) \right| \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k > \\ &> \frac{(|w| - \eta)m^{\frac{1}{2}}}{(\lambda m - \eta m^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{|k| \\ |k-\lambda m| < \eta m^{\frac{1}{2}}}} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k. \end{aligned}$$

Now the formulae (2.22) and (2.226) give

$$\sum_{\substack{|k-\lambda m| < \eta m^{\frac{1}{2}}} \binom{m-1+k}{k} (1-x)^m x^k > 1 - \frac{mx}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\eta^2 m} = \left(1 - \frac{x}{(1-x)^2 \eta^2}\right)$$

and hence

$$F(\alpha) > \frac{(|w| - \eta)}{\left(\lambda - \eta m^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{x}{(1-x)^2 \zeta^2}\right).$$

It follows from the hypothesis (2.42) that

$$\limsup_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha) = \infty.$$

Thus the proof of Theorem 4 is now complete.

Now, turning to the determination of the constant  $A$  in (1.6), we have, from (1.52),

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\alpha)| = \sum_{j=1}^n j^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k$$

which, after changing the order of summation, gives

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\alpha)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k \left[ \sum_{j=k+1}^n j^{-\frac{1}{2}} \right] + \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k \left[ \sum_{j=n+1}^k j^{-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Since, for  $0 \leq p < q$ ,

$$\sum_{j=p+1}^q j^{-\frac{1}{2}} = \int_p^q x^{-\frac{1}{2}} dx - \varepsilon_{p,q} = 2\left(q^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}}\right) - \varepsilon_{p,q}$$

where  $0 < \varepsilon_{p,q} < p^{-\frac{1}{2}}$  for  $p > 0$ ;  $0 < \varepsilon_{p,q} < 2$  for  $p = 0$ ; It follows that

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\alpha)| &= o(1) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(n^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}\right) \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k + \\ &\quad + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right) \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k \end{aligned}$$

which can be written as

$$(2.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\alpha)| = o(1) + 2F'(\alpha)$$

where

$$(2.71) \quad F'(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| k^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right| \binom{m+k}{k} (1-x)^{m+1} x^k.$$

Therefore

$$A = \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\alpha)| = 2 \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} F'(\alpha) = 2 \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha)$$

where  $F(\alpha)$  is defined as in (2.31). It is now clear from Theorem 4, that  $A$  is finite and is given by (1.61) if (1.7) holds, and that  $A$  is infinite if (1.71) holds.

3. As is easily seen, there is a close similarity between the results obtained above and those of AGNEW concerning Borel transforms (1957) and the arguments are very much similar. That there is, indeed, such close similarity between the Laurent series continuation matrix methods and Borel method could also be seen from the work of MEYER-KÖNIG [12]. This similarity between the two methods becomes more clear when we consider the class  $\mathcal{U}'$  of series  $\Sigma u_k$  which satisfy the more general Tauberian condition

$$(2.72) \quad \limsup_{p \rightarrow \infty} \max_{\substack{q \\ |q-p| < \delta p^{\frac{1}{2}}}} |s_p - s_q| < \delta, \quad \delta > 0$$

of Schmidt type which is implied by the Tauberian condition (1.2). It can, indeed, be proved as in the case of Borel Transforms (AGNEW [3]; Section 4), that for the class  $\mathcal{U}'$ ,

$$\limsup_{\alpha \rightarrow \infty} |t_m - s_n| < AL$$

if

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{|n - \lambda m|}{m^{\frac{1}{2}}} = \Omega < \infty$$

where  $A$  is finite, given by (1.61), if  $\Omega$  is finite and  $A$  is infinite otherwise.

In conclusion, I have much pleasure in expressing my grateful thanks to Dr. P. VERMES for his helpful criticisms.

## References

- [1] R. P. AGNEW, Properties of generalised definitions of limit, *Bull. American Math. Soc.*, 45 (1939), 689–730.
- [2] R. P. AGNEW, Abel transforms and partial sums of Tauberian Series, *Annals of Math.*, 50 (1949), 110–117.
- [3] R. P. AGNEW, Tauberian relations among partial sums, Riesz transform and Abel transforms of series, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 193 (1954), 94–118.
- [4] R. P. AGNEW, Borel transforms of Tauberian series, *Math. Zeitschr.*, 67 (1957), 51–62.
- [5] K. ANJANEYULU, Tauberian Constants and Quasi-Hausdorff series-to-series transformations, *Journal of the Indian Math. Soc.* (to appear).

- [6] H. DELANGE, Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation. 1. *Annals Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, (3) **67** (1950).
- [7] V. GARTEN, Über Taubersche Konstanten bei Cesàroschen Mittelbildungen, *Comm. Math. Helvetici*, **25** (1951), 311–335.
- [8] H. HADWIGER, Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung, *Comm. Math. Helvetici*, **16** (1944), 209–214.
- [9] G. H. HARDY, *Divergent series*, (Oxford, 1949).
- [10] A. JAKIMOVSKY, Tauberian Constants for Hausdorff transformations, *Bull. Res. Council of Israel*, **9F** (1961).
- [11] A. JAKIMOVSKY, Tauberian Constants for Abel and Cesàro transforms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 228–238.
- [12] W. MEYER-KÖNIG, Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, *Math. Zeitschr.*, **52** (1949), 257–304.
- [13] P. VERMES, Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods, *Amer. J. Math.*, **71**, (1949), 541–562.

## INDEX

### TOMUS VII

<i>Anjaneyulu, K.</i> , Tauberian constans for Laurent series continuation matrix transforms .....	157
<i>Ayres, F.</i> , The structure of non-singular row-finite matrices .....	83
<i>Ayres, F.</i> , The expression of non-singular row-finite matrices in terms of strings ..	91
<i>Böröczky, K.</i> , Über stabile Kreis- und Kugelsysteme .....	79
<i>Császár, Á.</i> , Double compactification d'espaces syntopogènes .....	3
<i>Dancs, I.</i> , On generalized sums of powers of complex numbers .....	113
<i>Dancs, I.</i> , Remarks on a paper of P. Turán .....	133
<i>Dénes, J.</i> , On some properties of commutator subgroups .....	123
<i>Erdős, P.</i> , and <i>Hajnal, A.</i> , On complete topological subgraphs of certain graphs ..	143
<i>Fuchs, L.</i> , and <i>Sasiada, E.</i> , Note on orderable groups .....	13
<i>Galambos, J.</i> , On the distribution of number-theoretical functions .....	25
<i>Gyapjas, F.</i> , und <i>Kátai, I.</i> , Zur Statistik der Primfaktoren der natürlichen Zahlen	59
<i>Hajnal, A.</i> , and <i>Erdős, P.</i> , On complete topological subgraphs of certain graphs ..	143
<i>Hajós, G.</i> , Über Kreiswolken .....	55
<i>Hajós, G.</i> , and <i>Szász, P.</i> , On a new presentation of the hyperbolic trigonometry by aid of the Poincaré model .....	67
<i>Heppes, A.</i> , Isogonale sphärische Netze .....	41
<i>Herstein, I. N.</i> , On torsion free Artin rings .....	97
<i>Horváth, J.</i> , Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene .....	49
<i>Hosszú, M.</i> , On local solutions of the generalized functional equation of associativity	129
<i>Juhász, I.</i> , On extremal values of mappings II. ....	151
<i>Kátai, I.</i> , Eine Bemerkung zur "Comparative prime-number theory I – VIII" von S. Knapowski und P. Turán .....	33
<i>Kátai, I.</i> , Zur Gleichverteilung modulo Eins .....	73
<i>Kátai, I.</i> , und <i>Gyapjas, F.</i> , Zur Statistik der Primfaktoren der natürlichen Zahlen	59
<i>Sasiada, E.</i> , and <i>Fuchs, L.</i> , Note on orderable groups .....	13
<i>Scharnitzky, V.</i> , und <i>Szenthe, J.</i> , Über Fluchtpunkte einer 2-Zelle .....	19
<i>Szász, P.</i> , and <i>Hajós, G.</i> , On a new presentation of the hyperbolic trigonometry by aid of the Poincaré model .....	67
<i>Szenthe, J.</i> , und <i>Scharnitzky, V.</i> , Über Fluchtpunkte einer 2-Zelle .....	19
<i>Tallini Scafati, Maria</i> , Métrique hermitienne elliptique dans un espace projectif quaternionien .....	109
<i>Vermes, E.</i> , Rein geometrischer Beweis eines Satzes von N. M. Nestorovič .....	99
<i>Vermes, P.</i> , The group of both row- and column-finite infinite matrices .....	89

Technikai szerkesztő:  
SCHARNITZKY VIKTOR





ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS

de Rolando Eötvös Nominatae

Scientific yearbooks in congress languages published by the  
L. Eötvös University, Budapest.

## SECTIO BIOLOGICA

Editor: J. Bánhegyi

*Size:* 24 cm, 250 to 400 pp.

Vols. 1-11, 1957-1969, partly reprinted, per vol. US \$ 8,-  
Clothbound set US \$ 110,-

SECTIO CHIMICA

*Editors:* A. Buzágh, B. Lengyel, E. Wolfram

Size: 24 cm. 100 to 150 pp.

Vols. 1-11, 1959-1969, partly reprinted, per vol. US \$ 8,-  
Clothbound set US \$ 110.-

## SECTIO GEOGRAPHICA

*Editor*: G. Láng

*Size:* 24 cm, cca 150 pp.

Vols. 1-3, 1965-1967 per vol. US \$ 8,-  
Clothbound set US \$. 30.-

## SECTIO GEOLOGICA

*Editors:* L. Egyed, L. Stegema, B. Géczy, J. Kiss

*Size:* 24 cm, 100 to 200 pp.

Vols. 1-12, 1957-1968 per vol. US \$ 8,-  
Clothbound set US \$ 120,-

## SECTIO HISTORICA

*Editor:* Z. Oroszlán

*Size:* 24 cm, 200 to 300 pp.

Vols. 1-10, 1957-1968, mostly reprinted, per vol. US \$ 8,-  
Clothbound set US \$ 100,-

SECTIO JURIDICA

*Editors:* J. Beér, L. Névai, I. Szabó

Size: 24 cm, 150 to 200 pp.

Vols. 1-12, 1958-1969, mostly reprinted per vol. US \$ 8,-  
Clothbound set US \$ 90,-



## ACTA FACULTATIS POLITICO-JURIDICAE

A Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Állam- és Jogtudományi  
Karának Actái

Edited by the Scientific and Methodological Committee  
of the Faculty of Law and Politics at the L. Eötvös University

Size: 24 cm, 200 to 350 pp.

Published in Hungarian.

Summaries and indexes in congress languages.

Vols. 1-11, 1959-1969, partly reprinted,	per vol.	US \$	6,-
	Clothbound set	US \$	88,-

## AZ EGYETEMI KÖNYVTÁR ÉVKÖNYVEI

Annales Bibliothecae Universitatis de Rolando Eötvös Nominatae

Editors: L. Mátrai, A. Tóth, M. Vértesy

Size: 24 cm, 200 to 350 pp.

Published in Hungarian, some original articles in congress languages.

Summaries and indexes in congress languages.

Vols. 1-4, 1962-1968	per vol.	US \$	8,-
	Clothbound set	US \$	40,-

## AZ EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM ÉVKÖNYVE

(Annals of the L. Eötvös University)

Year 1966, containing the proceedings of the scientific  
session held in 1966 (National ideology in the past  
and today).

Size: 24 cm, 154 pp.

Published in Hungarian.

Index in congress languages.	Halfcloth	US \$	6,-
------------------------------	-----------	-------	-----

\*

Prices are valid until December 31, 1971

Order for current and back volumes may be sent to:

KULTURA Back Issues Department

BUDAPEST 62, P.O.B. 149

Hungary

or to any international bookseller.

Please ask for our back issues catalogues

"PERIODICA HUNGARICA"