ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS XI.

1968

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO BIOLOGICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO CHIMICA
incepit anno MCMLIX

SECTIO GEOGRAPHICA
incepit anno MCMLXVI

SECTIO GEOLOGICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO HISTORICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO IURIDICA
incepit anno MCMLIX

SECTIO MATHEMATICA
incepit anno MCMLVIII

SECTIO PHILOLOGICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO PHILOSOPHICA ET SOCIOLOGICA
incepit anno MCMLXII

SOME REMARKS ON THE LARGE SIEVE OF YU. V. LINNIK

By

P. ERDŐS and A. RÉNYI

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest

(Received November 22, 1967)

§ 1. Introduction

YU. V. LINNIK has discovered (see [1]) in 1941 a very powerful new method of elementary number theory, which he called the large sieve[1]. In his original formulation the large sieve asserts that if we take any sequence S_N consisting of Z positive integers $\leq N$, and if Y denotes the number of those primes[2] $p \leq \sqrt{N}$ for which all the elements of the sequence S_N are contained in $\leq p(1-\varepsilon)$ residue classes mod p, where $0 < \varepsilon < 1$, then one has

$$Y \leq \frac{20\pi N}{\varepsilon^2 Z}. \tag{1.1}$$

As shown by the second named author in [3], Linnik's method is capable to prove much more, namely that if Z is not too small compared with N, then the elements of the sequence S_N not only occupy "almost all" residue classes mod p with respect to most primes $p \leq \sqrt{N}$, but are almost uniformly distributed in the p residue classes mod p for most primes $p \leq \sqrt{N}$. More exactly, let us denote by $Z(a, p)$ (where $a = 0, 1, \ldots, p-1$) the number of elements of the sequence S_N which are congruent to a mod p. Then one has, putting

$$A^2(p) = p \sum_{a=0}^{p-1} \left(Z(a, p) - \frac{Z}{p} \right)^2. \tag{1.2}$$

the inequality[3]

[1] As regards important applications of the large sieve in number theory, see e.g. [2] 3], [4], [5], [6]; [5] and [6] contain many further references.

[2] In this paper p always denotes a prime number.

[3] Here and in what follows all the constants of the O-estimates are absolute, i.e. do not depend on N, nor on the sequence S_N nor on Q.

$$\sum_{p \leq Q} \Delta^2(p) = O(Z^{2/3} N^{4/3} Q^{1/3}) \tag{1.3}$$

for $Q \leq N^{3/5}$. Later, the second named author has found (see [7]), a new probabilistic method for proving theorems of the type of the large sieve. This method (developed further and generalized in the papers [8], [9], [10], [11], [12]) gave the result

$$\sum_{p \leq Q} \Delta^2(p) = O(Z(Q^3 + N)) \tag{1.4}$$

for $Q \leq \sqrt{N}$. This estimate is better than (1.3) for $Q \leq N^{3/8}$, but weaker if $N^{3/8} < Q \leq \leq \sqrt{N}$.

Especially for $Q = N^{1/3}$ this result gives

$$\sum_{p \leq N^{1/3}} \Delta^2(p) = O(NZ). \tag{1.5}$$

The estimate (1.5) is essentially best possible, because if for instance S_N is the sequence of odd numbers $\leq N$, one has $Z(0, 2) = 0$ and thus $2\left\{Z(0,2) - \frac{Z}{2}\right\}^2 = = \frac{Z^2}{2}$ i.e. this single term is already of order NZ.

The probabilistic approach, besides leading to a very sharp estimate for $Q \leq N^{1/3}$, has thrown light on the reasons why an arbitrary sufficiently dense subsequence of the sequence $1, 2, \ldots, N$ has to be almost uniformly distributed among the residue classes mod p for most $p \leq N^{1/3}$; it became obvious that this is due to the statistical independence (more exactly: almost independence) of the distribution mod p and mod q of the numbers $n \leq N$ for any two primes $p, q \leq N^{1/3}$, $p \neq q$.

In the last two years important progress was made on the large sieve. The first essential improvement was obtained by K. F. ROTH [13]. His result was sharpened by BOMBIERI [14] who has shown that (1.5) holds also for $Q = \sqrt{N}$. More exactly Bombieri proved

$$\sum_{p \leq Q} \Delta^2(p) = O(Z(Q^2 + N)). \tag{1.6}$$

Clearly (1.6) is superior to both (1.3) and (1.4) for the full ranges $Q \leq N^{3/5}$ resp. $Q \leq \sqrt{N}$.

An important generalization of Bombieri's theorem has been obtained by H. DAVENPORT and H. HALBERSTAM [15]. To make this advance clear one has to notice that putting

$$S(x) = \sum_{n \in S_N} e^{2\pi i n x} \tag{1.7}$$

one has

$$\Delta^2(p) = \sum_{a=1}^{p-1} \left| S\left(\frac{a}{p}\right)\right|^2. \tag{1.8}$$

Now DAVENPORT and HALBERSTAM have proved that if $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_D$ are arbitrary real numbers in the interval (0, 1) such that $|\alpha_i - \alpha_j| \geqq \delta > 0$ for $i \neq j$, one has

$$\sum_{i=1}^{D} |S(\alpha_i)|^2 = O\left(Z\left(\frac{1}{\delta} + N\right)\right). \tag{1.9}$$

Clearly, if the numbers $\frac{a}{p}$ ($a = 1, 2, \ldots, p-1$; $p \leqq Q$) are taken as the numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ ($D = \sum_{p \leqq Q} (p-1)$) then $\delta \geqq \frac{1}{Q^2}$ and thus (in view of (1.8)) (1.9) implies (1.6).

Note that from (1.9) one obtains even more than (1.6), namely that

$$\sum_{q \leqq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = O\left(Z\left(\frac{1}{\delta} + N\right)\right)$$

because if $(a, q) = 1$, $(a', q') = 1$ (here (a, q) denotes the greatest common divisor of a and q) one has for $q, q' \leqq Q$ and $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \geqq \frac{1}{Q^2}.$$

Recently P. X. GALLAGHER [16] has found a very elegant and simple method for proving (1.9). More exactly, he proved

$$\sum_{\nu=1}^{D} |S(\alpha_\nu)|^2 \leqq Z\left(\frac{1}{\delta} + \pi N\right) \tag{1.10}$$

which implies by (1.8)

$$\sum_{p \leqq Q} \Delta^2(p) \leqq Z(Q^2 + \pi N). \tag{1.11}$$

Thus we have for $Q = \sqrt{N}$

$$\sum_{p \leqq Q} \Delta^2(p) \leqq (\pi + 1)ZN. \tag{1.12}$$

In the paper [17] of the first named author it has been mentioned (without giving the proof in detail) that by a probabilistic argument it can be shown that (1.12) cannot hold if Q is of larger order of magnitude than $\sqrt{N \log N}$. The aim of the present paper is to prove this statement in detail, and to get some related results concerning the behaviour of $\sum_{p \leqq Q} \Delta^2(p)$, when S_N is a *random* subset of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$.

The results obtained throw some light on certain open problems connected with the large sieve.

§ 2. Equidistribution of random sequences in arithmetic progressions

In this § let S_N denote a random subsequence of the sequence $\{1, 2, \ldots, N\}$ obtained as follows: let $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ be independent random variables, each of which takes on the values 1 and 0 with probability $\frac{1}{2}$; let S_N denote the set of those $n \leqq N$ for which $\varepsilon_n = 1$. (It is easy to see that under these suppositions each of the 2^N subsets of the set $\{1, 2, \ldots, N\}$ has the same probability to be chosen.) In this case

$$Z = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \tag{2.1}$$

$$Z(a, p) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-a}{p}\right]} \varepsilon_{kp+a} \tag{2.2}$$

and consequently

$$\Delta^2(p) = p \cdot \sum_{a=0}^{p-1} \left| Z(a, p) - \frac{Z}{p} \right|^2 \tag{2.3}$$

are all random variables. One obtains easily

$$\Delta^2(p) = p \cdot \sum_{a=0}^{p-1} Z^2(a, p) - Z^2 \tag{2.4}$$

and thus, putting[4]

$$\pi_r(Q) = \sum_{p \leqq Q} p^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.5}$$

we have

$$R(Q) = \sum_{p \leqq Q} \Delta^2(p) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} [A_Q(n-m) - \pi_0(Q)] \varepsilon_n \varepsilon_m, \tag{2.6}$$

where

$$A_Q(k) = \sum_{\substack{p\,k \\ p \leqq Q}} p \tag{2.7}$$

and thus $A_Q(-k) = A_Q(k)$ and especially

$$A_Q(0) = \pi_1(Q). \tag{2.8}$$

Let us determine first the expectation[5] of $R(Q)$. As

$$E(\varepsilon_n) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad E(\varepsilon_n \varepsilon_m) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{if } n \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{if } n = m \end{cases} \tag{2.9}$$

[4] Thus $\pi_0(Q)$ denotes the number of primes $\leqq Q$.
[5] The expectation of a random variable ξ will be denoted by $E(\xi)$.

we obtain

$$E(R(Q)) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left(A_Q(n-m)-\pi_0(Q)\right)+\frac{N}{4}\pi_1(Q). \tag{2.10}$$

Now clearly

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left[A_Q(n-m)-\pi_0(Q)\right] = \sum_{p\leqq Q} p\left\{\sum_{a=0}^{p-1}\left[\left(\left[\frac{N-a}{p}\right]+1\right)^2-\frac{N^2}{p^2}\right]\right\}. \tag{2.11}$$

Let us suppose that $N\equiv r \bmod p$, where $0\leqq r<p$. Then we have

$$p\cdot\left\{\sum_{a=0}^{p-1}\left[\left(\left[\frac{N-a}{p}\right]+1\right)^2\right]\right\} = 2N+r(p-r)+p-2r. \tag{2.12}$$

Thus it follows that

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left[A_Q(n-m)-\pi_0(Q)\right] = 2N\pi_0(Q)+O(Q^2\pi_0(Q)) \tag{2.13}$$

and thus, taking into account that $\pi_0(Q) = \dfrac{Q}{\log Q}+O\left(\dfrac{Q}{\log^2 Q}\right)$ and

$$\pi_1(Q) = \frac{Q^2}{2\log Q}+O\left(\frac{Q^2}{\log^2 Q}\right) \tag{2.14}$$

it follows

$$E(R(Q)) = \frac{NQ\pi_0(Q)}{8}+O(Q^2\pi_0(Q))+O\left(\frac{Q^2N}{\log^2 Q}\right). \tag{2.15}$$

Thus the expectation of $R(Q)$ is smaller by a factor of order $\dfrac{1}{\log Q}$ as NQ^2. Note that *the expectation of $R(Q)$ can be interpreted as its average over all 2^N subsequences of the sequence* $\{1, 2, \ldots, N\}$. Thus the average of $R(Q)$ is of order $O(N^2)$ even for $Q = O(\sqrt{N\log N})$ while for its maximum according to (1.6) this is known only for $Q = O(\sqrt{N})$. It is an open question whether the estimate

$$R(Q) = O(N^2) \tag{2.16}$$

holds for *all* sequences S_N if $Q\sim\sqrt{N}\psi(N)$ for some function $\psi(N)$ such that $\psi(N)\to\infty$ for $N\to\infty$. Our method is not capable of giving such a result; however by evaluating the *variance* of the random variable $R(Q)$ we can show by Čebishev's inequality that the estimate (2.16) is valid at least for *most* subsequences S_N.

To evaluate the variance[6] of $R(Q)$ note that though the random variables $\varepsilon_n\varepsilon_m$ are not independent, they are pairwise uncorrelated and thus the variance

[6] The variance of a random variable ξ will be denoted by $D^2(\xi)$.

of the sum on the right hand side of (2.6) is equal to the sum of the variances of the single terms. As $D^2(\varepsilon_n\varepsilon_m) = \frac{3}{16}$ if $n \neq m$ and $D^2(\varepsilon_n^2) = \frac{4}{16}$.

$$(2.17)\qquad D^2(R(Q)) = \frac{3}{16}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left(A_Q(n-m)-\pi_0(Q)\right)^2+\frac{N}{16}\left(\pi_1(Q)-\pi_0(Q)\right)^2.$$

Now clearly

$$(2.18)\qquad \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} A_Q^2(n-m) \leqq N^2[\pi_0^2(Q)+\pi_1(Q)-\pi_0(Q)]+2N\pi_1^2(Q)+\pi_2^2(Q).$$

As further from (2.11) we have

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} A_Q(n-m) \geqq N^2\pi_0(Q)-2N\pi_0(Q)+\pi_1(Q)$$

it follows

$$(2.19)\qquad D^2(R(Q)) \leqq \frac{3}{16}N^2(\pi_1(Q)-\pi_0(Q))+$$

$$+\frac{3N}{8}\left\{\pi_1^2(Q)+2\pi_0^2(Q)+\frac{(\pi_1(Q)-\pi_0(Q))^2}{6}\right\}+\frac{3}{16}\pi_2^2(Q)-\frac{3}{8}\pi_1(Q)\pi_0(Q).$$

In view of (2.14), it follows

$$(2.20)\qquad D^2(R(Q)) = O\left(\frac{N^2Q^2}{\log Q}\right)+Q\left(\frac{NQ^4}{\log^2 Q}\right)$$

i.e.

$$(2.21)\qquad \frac{D(R(Q))}{E(R(Q))} = O\left(\frac{\sqrt{\log Q}}{Q}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

It follows from Čebishev's inequality that for $\lambda > 1$ with probability $\geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}$ $R(Q)$ is contained in an interval

$$[E(R(Q))-\lambda D(R(Q)),\ E(R(Q))+\lambda D(R(Q))].$$

Choosing for λ the value $\lambda = \min\left(\frac{Q}{(\log Q)^{3/2}}, \frac{\sqrt{N}}{\log Q}\right)$ it follows that for all but $\frac{2^N}{\lambda^2}$ possible exceptions for all other sequences, i.e. for the large majority of all sequences, $R(Q)$ is of order $\frac{NQ^2}{8\log Q}+O\left(\frac{NQ^2}{\log^2 Q}\right)$.

Thus we have proved the following

THEOREM 1. *Let us consider all 2^N subsequences S_N of the sequence $\{1, 2, \ldots, N\}$. We have for all these subsequences with the possible exception of $\frac{2^N}{\lambda^2}$ such sequences*

$$R(Q) = \frac{NQ^2}{8 \log Q} + O\left(\frac{NQ^2}{\log^2 Q}\right) \tag{2.22}$$

where $Q \geqq N^{1/3}$ and

$$\lambda = \min\left(\frac{Q}{(\log Q)^{3/2}}, \frac{\sqrt{N}}{\log Q}\right). \tag{2.23}$$

Thus, if $Q \leqq \sqrt{N \log N}$, (2.22) holds except for at most $\frac{2^N \log^3 Q}{Q^2}$ sequences, while for $Q > \sqrt{N \log N}$ (2.22) holds, except for at most $\frac{2^N \log^2 N}{N}$ sequences.

COROLLARY. If $Q = \sqrt{AN \log N}$ $(A > 1)$ then $R(Q) \sim \frac{AN^2}{8}$ except for at most $\frac{2^N \log^2 N}{N}$ sequences.

Let us now consider the quantity

$$\operatorname*{Max}_{p \leqq Q}\left[\operatorname*{Max}_{0 \leqq a \leqq p-1}\left|Z(a, p) - \frac{Z}{p}\right|\right].$$

It is easy to show [using the central limit theorem and the fact that for any given p the quantities $Z(a, p)$ $(a = 0, 1, \ldots, p-1)$ are independent], that

$$P\left\{\operatorname*{Max}_{0 \leqq a \leqq p-1}\left|Z(a, p) - \frac{Z}{p}\right| > \sqrt{\frac{N \log pQ}{2p}}\right\} = O\left(\frac{1}{Q}\right) \tag{2.24}$$

and thus except for at most $O\left(\frac{2^N}{\log Q}\right)$ exceptional sequences we have

$$\left|Z(a, p) - \frac{Z}{p}\right| \leqq \sqrt{\frac{N \log pQ}{2p}}$$

for *all* a and p $(0 \leqq a \leqq p-1,\ p \leqq Q)$.

On the other hand, using again the independence of the random variables $Z(a, p)$ $(a = 0, 1, \ldots, p-1)$ and the central limit theorem it follows that for all except for at most $O\left(\frac{2^N}{N}\right)$ sequences S^N, one has, for all p such that $C \log N < p < \frac{N}{\sqrt{\log N}}$

$$P^2(p) = \frac{Np}{4}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log N}}\right)\right)$$

if C is a sufficiently large positive number.

§ 3. The values of a random trigonometrical polynomial at well spaced points

In this § we shall consider the sum

$$T(\alpha, S) = \sum_{\nu=1}^{D} |S(\alpha_\nu)|^2 \tag{3.1}$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_D$ are real numbers "well spaced" in the sense of Davenport and Halberstam, satisfying

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_D < 1 \quad \text{and}$$

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \geqq \delta > 0 \quad \text{for } \nu = 1, 2, \ldots, D-1 \tag{3.2}$$

and $S(\alpha)$ is the random trigonometric polynomial

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{2\pi i n \alpha} \tag{3.3}$$

where $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ are independent random variables, each taking on the values 1 and 0 with probability $\frac{1}{2}$.

We first evaluate the expectation of $T(\alpha, S)$. We have clearly

$$T(\alpha, S) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \varepsilon_n \varepsilon_m \sum_{\nu=1}^{D} e^{2\pi i (n-m)\alpha_\nu} \tag{3.4}$$

and thus

$$E(T(\alpha, S)) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{D} \left\{ \frac{N}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} (N-l) \cos 2\pi l \alpha_\nu \right\} + \frac{ND}{4}. \tag{3.5}$$

Now it is well known that

$$\frac{N}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} (N-l) \cos 2\pi l \alpha_\nu = \frac{\sin^2 N\pi\alpha_\nu}{2 \sin^2 \pi\alpha_\nu}. \tag{3.6}$$

As a matter of fact the formula (3.6) is well known as a formula for Fejér's kernel of the arithmetic means of Fourier series.

It follows from (3.5) and (3.6) that

$$E(T(\alpha, S)) = \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{D} \frac{\sin^2 N\pi\alpha_\nu}{\sin^2 \pi\alpha_\nu} + \frac{ND}{4}. \tag{3.7}$$

Let us now consider the special case when $\alpha_Q^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_D^*)$ is the set of all numbers $\frac{a}{q}$ with $(a, q) = 1$, $1 \leqq a \leqq q$, $1 < q \leqq Q \leqq N$. It is easy to see that

$$\sum_{q \leqq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \frac{\sin^2 N\pi \frac{a}{q}}{\sin^2 \pi \frac{a}{q}} = O(Q^3) \tag{3.8}$$

thus, denoting by $\varphi(q)$ the number of numbers $a<q$ relatively prime to q, we have

$$E(T(\alpha_Q^*, S)) = \frac{N}{4}\sum_{q=1}^{Q}\varphi(q)+O(Q^3). \tag{3.9}$$

As however

$$\sum_{q=1}^{Q}\varphi(q) = \frac{3Q^2}{\pi^2}+O(Q\log Q) \tag{3.10}$$

it follows that

$$E(T(\alpha_Q^*, S)) = \frac{3Q^2N}{4\pi^2}+O(NQ\log Q)+O(Q^3). \tag{3.11}$$

It follows that for $Q = o(N)$ there exists for each $\varepsilon>0$ a sequence S_N for which

$$T(\alpha_Q^*, S_N) > \frac{3Q^2N(1-\varepsilon)}{4\pi^2}. \tag{3.12}$$

Thus the estimate

$$\sum_{q\leq Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 = O(N^2) \tag{3.13}$$

which according to the theorem of Davenport and Halberstam is valid for $Q\leq\sqrt{N}$ cannot be valid if Q is of larger order of magnitude than $\sqrt{N}$. By evaluating the variance of $T(\alpha, S)$ one can prove even more, namely that $T(\alpha_Q^*, S_N)\sim \sim\frac{3Q^2N}{4\pi^2}$ for all except $o(2^N)$ sequences S_N, if $\frac{1}{Q} = o(1)$ and $\frac{Q}{N} = o(1)$. In particular one can prove that

$$D\left(\sum_{q\leq\sqrt{N}}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q-1}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\right) = O(N^{3/2}) \tag{3.14}$$

which implies that except for at most $O\left(\frac{2^N\log N}{N}\right)$ exceptional sequences

$$\sum_{q\leq\sqrt{N}}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q-1}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \sim \frac{3N^2}{4\pi^2}. \tag{3.15}$$

Let us summarize now our results: Theorem 1 shows that the estimate

$$R(Q) = O(N^2) \tag{3.16}$$

cannot hold if Q is of larger order of magnitude than $\sqrt{N\log N}$. It remains an open question whether (3.16) holds if $\sqrt{N}\leq Q\leq\sqrt{N\log N}$. However, (3.11) shows that even if (3.16) is true for the range $\sqrt{N}\leq Q\leq\sqrt{N\log N}$ it cannot be proved by the methods used up to now, as all these methods gave estimates for $R(Q)$ through estimating $T(\alpha_Q^*, S)$.

§ 4. Some open problems

Let S_N denote a subsequence of the sequence $\{1, 2, \ldots, N\}$ which contains at least cN elements $(0<c<1)$. Let $Y(\alpha, \varepsilon)$ where $0<\varepsilon<1$ and $1/2 \leqq \alpha < 1$ denote the number of those primes $p \leqq N^\alpha$ for which at least $p\varepsilon$ residue classes mod p do not contain any element of S_N. It follows already from Linnik's result (1.1) that $Y\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right)$ is bounded, namely that

$$Y\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) \leqq \frac{20\pi}{c\varepsilon^2}. \tag{4.1}$$

From (1.12) one obtains the slightly better estimate

$$Y\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) \leqq \frac{\pi+1}{\varepsilon c}. \tag{4.2}$$

As regards $Y(\alpha, \varepsilon)$ with $1/2 < \alpha < 1$ we get from (1.11) the estimate

$$Y(\alpha, \varepsilon) \leqq \frac{N^{2\alpha-1}}{\varepsilon c} + \frac{\pi}{\varepsilon c}. \tag{4.3}$$

It seems probable that (4.3) is far from being best possible; it is an open problem whether $Y(\alpha, \varepsilon)$ is bounded for every α with $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, or not. Of course, $Y(1, \varepsilon)$ is not bounded: as a matter of fact if S_N is the sequence of numbers $\leqq Nc \left(0 < c < \frac{1}{2}\right)$ and $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ then for all primes p with $\frac{cN}{1-\varepsilon} < p < N$ at least $p\varepsilon$ residue classes mod p do not contain any element of S_N, and thus

$$Y(1, \varepsilon) \geqq \frac{N}{\log N}\left(1 - \frac{c}{1-\varepsilon}\right) + O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right).$$

Another related problem is the following: if $0<\varepsilon<1$ let S_N be a subsequence of the sequence $\{1, 2, \ldots, N\}$ such that for every p with $A_\varepsilon < p < N^\alpha$ where $A_\varepsilon > 0$, $0<\alpha<1$ there are at least εp residue classes mod p which do not contain any element of S_N. What is the maximum $M_N(\varepsilon, \alpha)$ of the number of terms of such a sequence S_N? It is easy to show that for each ε with $0<\varepsilon<1/2$ $M_N(\varepsilon, 1) \geqq [\sqrt{N}]$. As a matter of fact let S_N denote the sequence of squares $\leqq N$. Clearly if b is a quadratic non-residue mod p, then there is no element of the sequence $1^2, 2^2, \ldots, k^2, \ldots$ which is congruent to b mod p; thus for each p the number of empty residue classes is at least $\frac{p-1}{2}$ if $p \geqq 3$.

References

[1] Yu. V. Linnik, The large sieve, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sci. de l'URSS*, **30** (1941), 292 – 294.
[2] Yu. V. Linnik, Remark on the least quadratic non-residue, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sci. de l'URSS*, **36** (1942), 131.
[3] A. Rényi, On the representation of an even number as the sum of a prime and of an almost prime, *Isrestiya Akad. Nauk SSSR*, Ser. Math., **12** (1948), 57 – 78 (in Russian), (see also *American Math. Soc.*, Translation Series 2., **19** (1962), 299 – 321).
[4] P. T. Bateman – S. Chowla – P. Erdős, Remarks on the size of $L(1, \chi)$ *Publ. Math.*, **1**(1950), 165 – 182.
[5] M. B. Barban, The large sieve and its applications in number theory, *Uspechi Mat. Nauk*, **21** (1966), 51 – 102, (in Russian).
[6] H. Halberstam – K. F. Roth, *Sequences*, Vol. I. (Oxford, Clarendon Press, 1966). Ch. IV. § 10. The larges sieves of Linnik and Rényi (pp. 224 – 237).
[7] A. Rényi, On the large sieve of Yu. V. Linnik, *Compositio Math.*, **8** (1950), 68 – 75.
[8] A. Rényi, Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications à la théorie des nombres, *Journal Math. Pure et Appl.*, **28** (1949), 137 – 149.
[9] A. Rényi, Sur un théorème général de probabilité, *Annales de l'Institut Fourier*, **1** (1950), 43 – 52.
[10] A. Rényi, On a general theorem in probability theory and its application in the theory of numbers, *Zprávy o společnem 3. sjezdu matematikařu československých a 7. sjezdu matematikařu polskich*, Praha 1950. 167 – 174.
[11] A. Rényi, On the probabilistic generalization of the large sieve of Linnik, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **3** (1958), 199 – 206.
[12] A. Rényi, New version of the probabilistic generalization of the large sieve, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 217 – 226.
[13] K. F. Roth, On the large sieve of Linnik and Rényi, *Mathematika*, **12** (1965), 1 – 9.
[14] E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika*, **12** (1965), 201 – 225.
[15] H. Davenport – H. Halberstam, The values of a trigonometrical polynomial at well spaced points, *Mathematika*, **13** (1966), 91 – 96.
[16] P. X. Gallagher, The large sieve, *Mathematika*, **14** (1967), 14 – 20.
[17] P. Erdős, Remarks on number theory V., *Mat. Lapok*, **17** (1966), 135 – 155. (In Hungarian).

ON AN INEQUALITY OF ČEBYŠEV

By

P. TURÁN

Department of Algebra and Theory of Numbers, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received February 14, 1967)

1. The following classical inequality is due to P. L. ČEBYŠEV[1].

For all polynomials

$$\pi_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1.1}$$

the inequality

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\pi_n(x)| \geqq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1.2}$$

holds.

The wide applicability of this theorem, even in number theory[2] is well-known. Therefore I got interested in a conjecture of K. MAHLER[3] according to which instead of (1.2) also the stronger inequality[4]

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\pi_n(x)| \geqq \frac{1}{2^{n-1}} \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\pi_n(e^{ix})|\, dx\right\} \tag{1.3}$$

holds. Owing to the well-known integral formula

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |e^{ix} - \zeta|\, dx = \begin{cases} 0 & \text{for } |\zeta| \leqq 1 \\ \log |\zeta| & \text{for } |\zeta| \geqq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

the value of the integral on the right of (1.3) is

$$0 \tag{1.5}$$

if all zeros of $\pi_n(z)$ lie on the unit disk $|z| \leqq 1$ resp.

[1] Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative de fonctions, *Oeuvres I.*, 295–301.

[2] See the papers E. LANDAU, Neuer Beweis eines Satzes von Herrn Valiron, *Jahresber. der Deutsch. Math. Ver.*, **29** (1920), p. 239 and VERA T. SÓS and P. TURÁN, On some new theorems in the theory of diophantine approximations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 241–257.

[3] Oral communication. He stated it in a number of his lectures.

[4] Exp x stands for e^x.

$$2\pi \sum_{j=1}^{r} \log |z_j| \tag{1.6}$$

if the zeros of $\pi_n(z)$ are such that

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_r| > 1 \geqq |z_{r+1}| \geqq \ldots \geqq |z_n|. \tag{1.7}$$

Hence (1.3) assumes the form[5]

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\pi_n(x)| > \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{|z_j|>1}{}^{(j)} |z_j|, \tag{1.8}$$

and this is not weaker than (1.2) indeed. We shall prove (1.3) in this form.

2. We remark first that for all $|z_j|$'s outside the unit disk we have for $|z| \leqq 1$

$$\left| \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right| \geqq 1$$

and hence

$$\min_{-1 \leqq x \leqq +1} \left| \frac{x - z_j}{1 - \bar{z}_j x} \right| \geqq 1. \tag{2.1}$$

Secondly we remark that Čebyšev's original inequality (1.1) reads for arbitrary polynomials

$$\varphi_n(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$$

(i.e. without normalisation) as

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\varphi_n(x)| \geqq \frac{|b_n|}{2^{n-1}}. \tag{2.2}$$

Now for the proof of (1.8) we consider the auxiliary function

$$\psi_n(z) = \frac{\pi_n(z)}{\prod_{|z_j|>1}{}^{(j)} \dfrac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}}.$$

Let us observe that this is a polynomial of nth degree too and has the form

$$\psi_n(z) = \left\{ \prod_{|z_j|>1}{}^{(j)} (-\bar{z}_j) \right\} z^n + \ldots \tag{2.3}$$

Further owing to (2.1) we have on $-1 \leqq x \leqq +1$

$$|\psi_n(x)| \leqq |\pi_n(x)|.$$

Hence applying (2.2) to $\psi_n(x)$ we get

$$\max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\pi_n(x)| \geqq \max_{-1 \leqq x \leqq +1} |\psi_n(x)| \geqq \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{|z_j|>1}{}^{(j)} |z_j|$$

indeed.

[5] Empty product on the right as usual means 1.

REMARKS ON A PAPER OF A. A. GONČAR AND SOME CONNECTED PROBLEMS IN THE THEORY OF RATIONAL APPROXIMATION

By

J. SZABADOS

Department of Geometry of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received April 26, 1967)

Let $f(x)$ be a continuous function in a finite interval Δ, $p_n(x)$ and $r_n(x)$ its best approximating polynomial and rational function of degree at most n, respectively;

$$E_n(f, \Delta) = \max_{x \in \Delta} |f(x) - p_n(x)|, \quad R_n(f, \Delta) = \max_{x \in \Delta} |f(x) - r_n(x)|.$$

If $\Delta = [-1, +1]$ we use the shorter symbols $E_n(f)$ and $R_n(f)$ instead of $E_n(f; [-1, +1])$ and $R_n(f; [-1, +1])$, respectively.

In his paper [1] A. A. Gončar gives among others lower and upper estimations for $R_n(f)$ when $f(x)$ is some special function, or it belongs to certain classes of functions. In this paper we add some remarks and theorems to this topic.

1. Let

$$\begin{gathered} -1 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_t = +1, \quad \Delta_i = [\xi_i, \xi_{i+1}] \quad (i = 0, 1, \ldots, t-1), \\ \xi = \min_{0 \le i \le t-1} (\xi_{i+1} - \xi_i). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Assume that the continuous function $f(x)$ (defined in $[-1, +1]$) is infinitely many times differentiable in every Δ_i, and

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\sqrt[n]{\max\limits_{0 \le i \le t-1} \max\limits_{x \in \Delta_i} |f^{(n)}(x)|}}{n} \le Q n^{\nu - 1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

where $Q > 0$ is a constant and $\nu \ge 1$. Gončar proves that in this case

$$R_n(f) < e^{-c n^{\mu}} \left| \mu = \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\right) \right| \tag{1.3}$$

holds with a constant $c > 0$ depending only on $f(x)$.

Now, using the previous notations, we prove the following more general (but in the GONČAR's case a little weaker)

THEOREM 1. *If*

$$a_n = o(a^n) \tag{1.4}$$

or every $a > 1$ *then*

$$R_n(f) = O(e^{-m}) \tag{1.5}$$

where m *is the greatest integer satisfying the inequality*

$$200tm^2a_m \leq n. \tag{1.6}$$

REMARKS. As regards to $E_n(f)$, generally there does not exist better estimation than $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. If the GONČAR's condition (1.2) holds then (1.4) is valid and by (1.6) we have $m \asymp \left(\frac{n}{200Qt}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}$, thus (1.5) gives

$$R_n(f) = O\left\{\exp\left[-\left(\frac{n}{200Qt}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}\right]\right\}$$

which is hardly worse than the GONČAR's result. An other example — which is not yet the GONČAR's case — can be $a_n = n^{\log n}$ when

$$R_n(f) = O(\exp[-c_1 \exp(c_2\sqrt{\log n})]).$$

PROOF OF THEOREM 1. We may suppose $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, because if $a_n = O(1)$ (i.e. when $f(x)$ is analytic in every Δ_i) was treated by P. TURÁN in [2]. Divide every Δ_i $(i = 0, 1, \ldots, t-1)$ into $[3e^2a_{m+1}]$ equal part and denote by $\bar{\Delta}_j^{(m)}$ $(j = 1, \ldots, t[3e^2a_{m+1}])$ the appearing intervals. Considering the Taylor-polynomial of $f(x)$ in $\bar{\Delta}_j^{(m)}$ we have by (1.2)

$$E_m(f, \bar{\Delta}_j^{(m)}) \leq \frac{\max\limits_{x\in\bar{\Delta}_j^{(m)}} |f^{(m+1)}(x)|}{(m+1)!}\left(\frac{2}{[3e^2a_{m+1}]}\right)^{m+1} \leq e^{-m} \tag{1.7}$$

$$(j = 1, \ldots, t[3e^2a_{m+1}]).$$

Now we use the following theorem (see [3]): *Let* $f(x)$ *be continuous in* $[-1, +1]$ *and* $\max\limits_{-1\leq x\leq +1} |f(x)| \leq M$. *Further let* $[-1, +1] = \bigcup\limits_{j=1}^{s(m)} \bar{\Delta}_j^{(m)}$ $(\bar{\Delta}_i^{(m)} \cap \bar{\Delta}_j^{(m)} = 0$ if $i \neq j)$ *where the minimal length of the intervals* $\bar{\Delta}_j^{(m)}$ *is* $\geq \delta_m$. *Then*

$$R_n(f) = O(\max_{1\leq j\leq s(m)} E_m(f, \bar{\Delta}_j^{(m)})) \tag{1.8}$$

where m is the greatest integer satisfying the inequality

$$s(m)\left[3m+\log^2\frac{57M^2m^2s(m)}{\delta_m\max\limits_{1\le j\le s(m)}E_m(f,\bar{\Delta}_j^{(m)})^3}\right]\le n. \tag{1.9}$$

In our case (by (1.1) and (1.7))

$$s(m)=t[3e^2a_m],\quad \delta_m=\frac{\xi}{[3e^2a_m]},\qquad \max_{1\le j\le s(m)}E_m(f,\bar{\Delta}_j^{(m)})\le e^{-m}.$$

Thus condition (1.9) gives for sufficiently large m's

$$3e^2ta_m\max(9m^2,4\log^2a_m)\le 200tm^2a_m\le n$$

by (1.4). Consequently, (1.5) holds by (1.8), qu.e.d.

If we do not restrict the growth of a_n then we get the following weaker result:

THEOREM 2. *Assume that $f(x)$ is continuous in $[-1,+1]$ and is infinitely many times differentiable in every Δ_i. Then*

$$\lim_{n\to\infty}n^lR_n(f)=0\qquad(l=1,2,\ldots). \tag{1.10}$$

REMARK. It is worthwile to compare (1.10) with the order of $E_n(f)$ which is generally not better than $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

PROOF OF THEOREM 2. We use a theorem of G. FREUD [3] which can be formulated as follows: *If $f(x)$ is continuous in $[-1,+1]$ then*

$$R_n(f)=O\left(\max_{0\le i\le t-1}E_{n(t)}(f,\Delta_i)+te^{-\frac{1}{2}\sqrt{n(t)}}\right)\qquad\left(n(t)=2\left[\frac{n}{4t}\right]\right). \tag{1.11}$$

Being $f(x)$ infinitely many times differentiable in every Δ_i, we have

$$\lim_{n\to\infty}n^l\max_{0\le i\le t-1}E_{n(t)}(f,\Delta_i)=0\qquad(l=1,2,\ldots)$$

and evidently

$$\lim_{n\to\infty}n^le^{-\frac{1}{2}\sqrt{n(t)}}=0\qquad(l=1,2,\ldots).$$

Thus (1.11) implies (1.10). Qu.e.d.

2. In connection with the problem of the lower and upper estimation of $R_n(|x|)$, GONČAR investigates the lower estimation of $R_n(f)$ in the following special cases:

Let

$$f_q(x)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad x\in[-1,0]\\ q(x) & \text{if}\quad x\in[0,+1]\end{cases}$$

where $\varphi(x)$ is one of the following five types:

1° $\varphi_1(x) = x$,

2° $\varphi_2(x) = x^\alpha \ (\alpha > 0)$,

3° $\varphi_3(x) = \begin{cases} (-\ln x)^{-\beta} & \text{if } 0 \leq x \leq 1/2 \\ (\ln 2)^{-\beta} & \text{if } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (\beta > 0)$,

4° $\varphi_4(x) = \exp\left[-(-\ln x)^\gamma\right] \ (0 < \gamma < 1)$,

5° $\varphi_5(x) = \exp(-x^{-\delta}) \ (\delta > 0)$.

He proves that

1° $R_n(f_{\varphi_1}) > e^{-c_1\sqrt{n}}$,

2° $R_n(f_{\varphi_2}) > e^{-c_\alpha\sqrt[\alpha]{n}}$,

3° $R_n(f_{\varphi_3}) > c_\beta n^{-\beta}$,

4° $R_n(f_{\varphi_4}) > \exp\left(-c_\gamma n^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right)$,

5° $R_n(f_{\varphi_5}) > \exp\left(-\dfrac{c_\delta n}{\log n}\right)$

for $n \geq 2$, with absolute constants $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$ (see [1]).

I believe Gončar investigates these special functions because they are the simplest types of such elementary functions for which the rational approximation is essentially better than the polynomial one. But he does not give upper bounds for these $R_n(f_\varphi)$'s.* Our following theorem deals with this problem (for the sake of comparison we give the order of $E_n(f_\varphi)$ in brackets).

Theorem 3. *We have*

1° $R_n(f_{\varphi_1}) \leq e^{-\bar{c}_1\sqrt{n}}$ $\quad \left(E_n(f_{\varphi_1}) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$,

2° $R_n(f_{\varphi_2}) \leq e^{-\bar{c}_\alpha\sqrt[\alpha]{n}}$ $\quad \left(E_n(f_{\varphi_2}) = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right)$,

3° $R_n(f_{\varphi_3}) \leq \bar{c}_\beta n^{-\frac{\beta}{3}}$ $\quad (E_n(f_{\varphi_3}) = O((\log n)^{-\beta}))$,

4° $R_n(f_{\varphi_4}) \leq \exp\left(-\bar{c}_\gamma n^{\frac{\gamma}{3}}\right)$ $\quad (E_n(f_{\varphi_4}) = O(\exp(-(\log n)^\gamma)))$,

5° $R_n(f_{\varphi_5}) \leq \exp\left(-\bar{c}_\delta n^{\frac{1}{\delta+2}}\right)$ $\quad (n^l E_n(f_{\varphi_5}) = o(1) \ (l = 1, 2, \ldots))$

with absolute positive constants $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\delta$.**

* *Added in proof (July 30, 1968):* In a recent paper A. A. Gončar gives stronger upper bounds than our Theorem 3, using different methods (On the degree of rational approximation of continuous functions with characteristic singularity (Russian), *Math. Sbornik*, **73 (115)** (1967), pp. 630–638).

** We remark that in the case $0 < \beta < 1$ the stronger result $R_n(f_{\varphi_3}) \leq \bar{c}_\beta n^{-\frac{\beta}{\beta+2}}$ holds besides 3° (see G. Freud [3]).

PROOF. 1° is a special case of the TURÁN's theorem in [2].

2° was proved by G. FREUD and the author in [4].

3° Using the notation (1.1), let

$$A_i(\varepsilon) = [\xi_i+\varepsilon, \xi_{i+1}-\varepsilon] \quad \left(i = 0, \ldots, t-1;\ 0<\varepsilon<\frac{\xi}{2}\right).$$

We shall use the following theorem (see 5]): *Suppose that for the continuous function $f(x)$ in $[-1, +1]$ $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ exists when $x\in A_i$ $(i = 0, 1, \ldots \ldots, t-1)$. Moreover*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\max\limits_{0\le i\le t-1} \max\limits_{x\in A_i(\varepsilon)} |f^{(n)}(x)|}}{n} \le \frac{c}{\varepsilon} \qquad \left(0<\varepsilon<\frac{\xi}{2}\right) \tag{2.1}$$

with a constant $c>0$ depending only on $f(x)$. Then

$$R_n(f) = O\left(\omega\left(f, \exp\left(-\sqrt[3]{n}\,\frac{\log 1/q}{t}\right)\right)\right) \tag{2.2}$$

where $\omega(f, h)$ is the module of continuity of $f(x)$ in $[-1, +1]$ and

$$q = \frac{\sqrt{c^2e^2+4ec}-ce}{2}. \tag{2.3}$$

In our case let $\xi_1=0$, $\xi_2={}^1/_2$, $t=3$. It is easy to verify that

$$|f^{(n)}_{\varphi_3}(x)| = \left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_n^{(i)}(\ln x)^i}{x^n(\ln x)^{n+\beta}}\right| \qquad (0<x\le {}^1/_2;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

where

$$a_1^{(0)} = \beta,\ a_{n+1}^{(0)} = (n+\beta)a_n^{(0)},\ a_{n+1}^{(i)} = (n-i+\beta)a_n^{(i)} + na_n^{(i-1)}$$
$$(i = 1, \ldots, n-1),\ a_{n+1}^{(n)} = na_n^{(n-1)}.$$

Thus

$$\max_{0\le i\le n-1} a_n^{(i)} \le 2^n(n+[\beta])!,$$

hence and by (2.4)

$$\max_{\varepsilon\le x\le 1/2} |f^{(n)}_{\varphi_3}(x)| \le \frac{2^n(n+[\beta])!}{\varepsilon^n(-\log\varepsilon)^{\beta+1}},$$

i.e. (2.1) holds with $c=\dfrac{2}{e}$. Thus by (2.3) $q=\sqrt{3}-1$, and by (2.2) (being $\omega(f_{\varphi_3}, h) = (-\log h)^{-\beta}$) 3° holds.

4° Let $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \frac{1}{e}$, $t = 3$. Easy to see that

$$|f_{\varphi_4}^{(n)}(x)| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{k_n} a_n^{(i)} (-\log x)^{b_n^{(i)}}}{x^n (\log x)^n} \right| e^{-(-\log x)^\nu} \quad (0 < x < 1;\ n = 1, 2, \ldots)$$

where

$$k_n < 3^n,\ 0 \leq b_n^{(1)} < \ldots < b_n^{(k_n)} \leq n,\ |a_n^{(i)}| \leq 2^n n! \quad (i = 0, 1, \ldots, k_n).$$

Thus

$$\max_{\varepsilon \leq x \leq \frac{1}{e}} |f_{\varphi_4}^{(n)}(x)| \leq \frac{6^n n!}{\varepsilon^n}, \qquad \max_{\frac{1}{e} \leq x \leq 1-\varepsilon} f_{\varphi_4}^{(n)}(x) \leq \frac{6^n n!\, e^n}{(-\log(1-\varepsilon))^n} \leq \frac{(12e)^n n!}{\varepsilon^n},$$

i.e. (2.1) holds with $c = 12e^2$, and being $\omega(f_{\varphi_4}, h) = \exp(-(-\log h)^\nu)$, we have the statement by (2.2).

5° Let $\xi_1 = 0$, $t = 2$. Then

$$f_{\varphi_5}^{(n)}(x) = \delta e^{-x^{-\delta}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_n^{(i)} (-1)^{n-i}}{x^{i\delta+n}}$$

where

$$a_1^{(1)} = 1,\ a_{n+1}^{(1)} = (-1)^n (\delta + n) a_n^{(1)},\ a_{n+1}^{(i)} = \delta a_n^{(i-1)} + (i\delta + n) a_n^{(i)}$$
$$(i = 2, \ldots, n),\ a_{n+1}^{(n+1)} = \delta a_n^{(n)}.$$

Thus $\max_{1 \leq i \leq n} a_n^{(i)} \leq (2\delta + 2)^n n!$ and

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{\max_{0 \leq x \leq 1} |f_{\varphi_5}^{(n)}(x)|}}{n} \leq \frac{2\delta + 2}{e} \sqrt[n]{\frac{n\delta}{\sqrt{2\pi n}} \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{e^{-x^{-\delta}}}{x^{n(\delta+1)}}} \leq (2\delta + 2)\left(n \frac{\delta + 1}{\delta}\right)^{\delta+1} \leq$$
$$\leq Q n^{\delta+1}.$$

Consequently, we may apply the above mentioned GONČAR's theorem with $\nu = \delta + 2$, and we obtain (see (1.2) and (1.3))

$$R_n(f_{\varphi_5}) < \exp\left(-\bar{c}_\delta n^{\frac{1}{\delta+2}}\right).$$

3. Let $f(x)$ be infinitely many times differentiable in $[-1, +1]$, and suppose

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{\sqrt[n_k]{\max_{-1 \leq x \leq +1} |f^{(n_k)}(x)|}}{n_k} < \infty$$

with a certain sequence of integers $n_1 < n_2 < \dots$. Then we call $f(x)$ *quasianalytic* in $[-1, +1]$. This definition is due to S. BERNSTEIN [9]. An important property of the quasianalytic functions is that

$$(3.1) \qquad f(x) = 0 \ (-1 \leq a \leq x \leq b \leq +1) \text{ implies } f(x) = 0 \ (-1 \leq x \leq +1).$$

This property can be deduced also from the approximability of $f(x)$. The problem has been totally elaborated in connection with the polynomial approximation. GONČAR proved (see [5]) that

$$(3.2) \qquad \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < \frac{1}{36}$$

implies (3.1). He states in [1] (without proof) that (3.2) can be replaced by

$$\liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{R_n(f)} < 1.$$

I can not reconstruct his proof, but I prove the weaker

THEOREM 4. *Let $f(x)$ be continuous in $[-1, +1]$ and assume that there exists a sequence of integers $n_1 < n_2 < \dots$, a $0 < q < 1$ and rational functions $r_{n_k}(x)$ of degree at most n_k $(k = 1, 2, \dots)$ such that*

$$(3.3) \qquad \sqrt[n_k]{\max_{-1 \leq x \leq +1} |f(x) - r_{n_k}(x)|} \leq q \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

and the poles of the $r_{n_k}(x)$'s do not accumulate to $[-1, +1]$. Then (3.1) *holds.*

PROOF. We shall follow a similar way as in [7], p. 386. Denote by $E(R, \alpha, \beta)$ the closed ellipse-domain in the complex plane with focuses α and β, and for which the sum of the half-axis is $\frac{\beta - \alpha}{2} R (R > 1)$. By assumption, we can find to every $-1 \leq \alpha < \beta \leq +1$ an $R(\alpha, \beta) > 1$ such that $E(R(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$ does not contain poles of the $r_{n_k}(x)$'s. Let

$$\bar{R} = \inf_{-1 \leq \alpha < \beta \leq +1} R(\alpha, \beta).$$

By assumption, $\bar{R} > 1$. Evidently, $E(\bar{R}, \alpha, \beta)$ does not contain poles of the $r_{n_k}(x)$'s, if $-1 \leq \alpha < \beta \leq +1$.

We have by (3.1) and (3.3)

$$|r_{n_k}(x)| \leq q^{n_k} \qquad (a \leq x \leq b;\ k = 1, 2, \dots).$$

Applying Lemma 2 from [8], we get

$$\max_{z \in E(\varrho, a, b)} |r_{n_k}(z)| \leq q^{n_k} \left| \frac{\bar{R}\varrho - 1}{\bar{R} - \varrho} \right|^{n_k} \quad (1 < \varrho < \bar{R})$$

Choosing

$$\varrho = \frac{\bar{R} + \sqrt{q}}{\bar{R}\sqrt{q} + 1}$$

we obtain

$$\max_{z \in E(\varrho, a, b)} |r_{n_k}(z)| \leq (\sqrt{q})^{n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Thus

$$\lim_{k \to \infty} r_{n_k}(x) = 0 \quad (x \in [a_1, b_1] \cap [-1, +1]) \tag{3.4}$$

where

$$a_1 = a - \frac{b-a}{2}\left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2} - 1\right), \quad b_1 = b + \frac{b-a}{2}\left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2} - 1\right).$$

By (3.3) $|f(x)| \leq |r_{n_k}(x)| + q^{n_k}$, hence and by (3.4)

$$f(x) = 0 \quad (x \in [a_1, b_1] \cap [-1, +1]).$$

If $[a_1, b_1] \supseteq [-1, +1]$ then our theorem is proved. If at least one of a_1 and b_1 is in the interior of $[-1, +1]$ then we may establish that the interval in which $f(x) = 0$, lengthened with

$$\frac{b-a}{2}\left(\frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2} - 1\right) > 0 \tag{3.5}$$

at least. Repeating the above procedure with $[a_1, b_1]$ instead of $[a, b]$ etc., we get a sequence of intervals

$$[a, b] \subset [a_1, b_1] \subset \ldots$$

in which $f(x) = 0$. Because every interval lengthens with (3.5) at least, after finitely many steps we reach $[-1, +1]$, qu.e.d.

4. Finally, we seek upper estimation for $R_n(f)$ if $f(x)$ is continuous and piecewise quasianalytic in $[-1, +1]$. This problem was raised by P. TURÁN [2].

Let $n_1 < n_2 < \ldots$ be a sequence of integers for which (see (1.2))

$$a_{n_k} \leq a < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

holds. We may assume

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty \tag{4.2}$$

because in the contrary case $f(x)$ is piecewise analytic (see e.g. [7], p. 163). We adapt a continuous, strictly increasing function $p(x)$ in the interval $[n_1, +\infty)$ to the sequence $\{n_k\}$ such that

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{x} = \infty \tag{4.3}$$

as follows. Let $p(n_k) = n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, and let $p(x)$ be linear in every interval $[n_k, n_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Then (4.3) holds because of (4.2).

Conversely, if $p(x)$ is an arbitrary continuous, strictly increasing function in $[1, +\infty)$ with the property (4.3) then we may define a sequence of integers $n_1 < n_2 < \ldots$ by:

$$n_1 \text{ sufficiently large, } n_{k+1} = [p(n_k)] \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

for which (4.2) holds.

Let $q(x)$ be the inverse function of $p(x)$. Then evidently

$$\lim_{x\to\infty} q(x) = \infty, \quad n_k \geq q(n_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

THEOREM 5. *If* (4.1) *holds and*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log n_{k+1}}{n_k} = 0 \tag{4.5}$$

then

$$R_n(f) = O\left(e^{-q\left(\frac{n}{c_1}\right)} + e^{-c_2\sqrt{n}}\right) \tag{4.6}$$

where $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ depends only on a and t.

REMARKS. It is worthwile to compare (4.6) with the order of $E_n(f)$, which is generally not better than $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Condition (4.5) is not necessary for (4.6) being hold, but if (4.5) is false then (4.6) becomes a weaker estimation than (1.10) (which evidently holds in our case). (4.5) and (4.6) implies (1.10), namely, if $m = q\left(\frac{n}{c_1}\right)$, $n = c_1 p(m)$ then

$$n^l e^{-q\left(\frac{n}{c_1}\right)} = \left(e^{l\frac{\log p(m)}{m} + l\frac{\log c_1}{m} - 1}\right)^m \to 0 \quad \text{if} \quad n \to \infty \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Two examples: 1. If $n_{k+1} = [e^{\sqrt{n_k}}]$ then (4.5) holds, $p(x) = e^{\sqrt{x}}$, $q(x) = (\log x)^2$ and (4.6) gives $R_n(f) = O(n^{-\log n})$.

2. If $n_{k+1} = n_k^2$ then $R_n(f) = O(e^{-c\sqrt{n}})$.

PROOF OF THEOREM 5. Let

$$\eta_j = -1 + \frac{j}{[ae^2]+1} \quad (j = 1, \ldots, 2[ae^2]+1).$$

Join the point-systems $\{\xi_i\}$ (see (1.1)) and $\{\eta_j\}$. We obtain a subdivision of $[-1, +1]$ into intervals $\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \ldots, \overline{\Delta}_r$ $(r \leq 2[ae^2]+t+1)$, each of them is of length not greater than $\frac{1}{ae^2}$.

Now let $n_k < n \leq n_{k+1}$. Considering the Taylor-polynomial of $f(x)$ of degree at most $n_k - 1$ in every $\bar{\Delta}_i$, we have by (4.1) and (4.4)

$$E_n(f, \bar{\Delta}_i) \leq E_{n_k-1}(f, \bar{\Delta}_i) \leq \frac{\max\limits_{x \in \bar{\Delta}_i} |f^{(n_k)}(x)|}{n_k!} \cdot \frac{1}{(ae^2)^{n_k}} \leq \frac{a^{n_k} n_k^{n_k}}{\left(\frac{n_k}{e}\right)^{n_k} (ae^2)^{n_k}} =$$

$$= e^{-n_k} \leq e^{-q(n_{k+1})} \leq e^{-q(n)} \quad (n > n_1).$$

Using the above mentioned FREUD's theorem (see (1.11)) we have

$$R_n(f) = O\left\{\max_{1 \leq i \leq r} E_{n(t_1)}(f, \bar{\Delta}_i) + t_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{n(t_1)}}\right\} = O\left(e^{-q\left(\frac{n}{c_1}\right)} + e^{-c_2\sqrt{n}}\right)$$

where $t_1 = 2\left[\frac{n}{4(2[ae^2]+t+1)}\right]$ and $c_1, c_2 > 0$ depend only on t, qu.e.d.

References

[1] A. A. GONČAR, Estimations of growth of rational functions and some applications (Russian), *Mat. Sbornik*, **72(114)** (1967), 489 – 503.

[2] P. TURÁN, On the approximation of piecewise analytic functions, *Contemporary problems of theory of analytic functions* (Publishing House „Nauka", Moscow, 1966), 296 – 300.

[3] G. FREUD, Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), 313 – 324.

[4] G. FREUD – J. SZABADOS, Rational approximation to x^2, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967) 393 – 399.

[5] J. SZABADOS, Rational approximation in certain classes of functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **19** (1968), 81 – 85.

[6] A. A. GONČAR, On best approximation by rational functions (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **100** (1955), 205 – 208.

[7] A. F. TIMAN, *Theory of approximation of functions of real variable* (Russian) (Moscow, 1960).

[8] J. SZABADOS, Structural properties of continuous functions connected with the order of rational approximation, II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **19** (1968), 95 – 102.

[9] S. BERNSTEIN, Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle, *Math. Ann.*, **75** (1914), 449 – 468.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ ЛАГРАНЖЕВА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

О. КИШ (O. KIS)

Кафедра геометрии университета им. Л. Этвеша, Будапешт

(Поступило 9. 6. 1967)

§1. Содержание статьи

Обозначим через $\omega(h)$ модуль непрерывности некоторой непрерывной на отрезке $[-1, +1]$ функции, а через $C(\omega)$ множество определенных на отрезке $[-1, +1]$ функций $f(x)$, модуль непрерывности которых не превосходит $c_1\omega(h)$, где положительное число c_1 (и далее $c_2, c_3, \ldots, c_{19}$) зависит лишь от функции $f(x)$. Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа $n-1$-ой степени функции $f(x)$, совпадающий с ней в узлах Чебышева

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.1}$$

В **§2–§4** мы докажем, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА I. *Если $f(x) \in C(\omega)$, то*

$$|f(x) - L_n(f, x)| \leqq c_2\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\ln n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,\omega\left(\frac{i}{n^2}\right)\right] \tag{1.2}$$

$$(-1 \leqq x \leqq +1;\ n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Так как здесь

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,\omega\left(\frac{1}{n^2}\right) \leqq \omega\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \leqq c_3\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n,$$

то из теоремы I следует хорошо известное неравенство

$$|f(x) - L_n(f, x)| \leqq c_4\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1,\ n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{1.3}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,\omega\left(\frac{i}{n^2}\right) \leqq c_5\,\omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.4}$$

то

$$|f(x) - L_n(f, x)| \leqq c_6\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\ln n + \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{1.5}$$

$$(-1 \leqq x \leqq +1;\ n = 2, 3, 4, \ldots).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Если*

$$\omega(h) = h^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqq 1), \tag{1.6}$$

т. е. функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то условие (1.4) *выполняется.* (Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(\frac{i}{n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha}}\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha-1} \leqq \frac{1}{n^{2\alpha}}\,c_5 n^{\alpha} = \frac{c_5}{n^{\alpha}}.\ )$$

Это следствие и замечание показывают, что, если модуль непрерывности „хороший", то теорема 1 является усилением неравенства (1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Пусть*

$$\omega(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{h}}, & \text{если} \quad 0 < h \leqq \dfrac{1}{e}, \\[2ex] 1, & \text{если} \quad h \geqq \dfrac{1}{e}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,\omega\left(\frac{i}{n^2}\right) \geqq c_8\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

(Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,\omega\left(\frac{i}{n^2}\right) \geqq \omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \geqq \frac{1}{2\ln n}\,c_9 \ln n = \frac{c_9}{2}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n.\ )$$

Таким образом в случае „плохих" модулей непрерывности неравенство (1.2) не лучше, чем (1.3).

В **§5** мы докажем, что имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Если**

$$\lim_{h=+0} \frac{\omega(h)}{h} = \infty,$$

* Это условие не выполняется лишь в случае $C(\omega) = \mathrm{Lip}\ 1$, т. е. когда $\omega(h) = h$.

то в $C(\omega)$ существует такая функция $f(x)$, что для бесконечной последовательности натуральных чисел n

$$L_n(f, 0)-f(0) \geqq c_{10}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n.$$

Таким образом неравенство (1.3) нельзя заменить на неравенство

$$|L_n(f, x)-f(x)| = o\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n\right] \quad (-1 \leqq x \leqq +1;\ n = 2, 3, 4, \ldots).$$

В **§6** мы докажем, что имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если**

$$\lim_{h=+0} \frac{\omega(h)}{h \ln \frac{1}{h}} = \infty,$$

то в $C(\omega)$ существует такая функция $f(x)$, что для бесконечной последовательности натуральных чисел n

$$|L_n(f, 1)-f(1)| \geqq c_{11}\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом в неравенстве (1.5) член $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ нельзя заменить на $o\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Если узлы Чебышева* (1.1) *заменить на узлы*

$$x_k = \cos\frac{k-1}{n-1}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n-1}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$x_k = \cos\frac{2k-2}{2n-1}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то можно получить результаты, аналогичные предыдущим.

Вопрос о том можно ли улучшить оценку (1.3), поставил Г. ФРАЙД (G. FREUD). Ему же принадлежит идея приведенного в **§4** доказательства теоремы 1. Я благодарен ему за внимание к моей работе.

* Это условие выполняется, например, в случае (1.6) при $\alpha = 1$.

§2. Вспомогательные предложения

Пусть

$$\frac{j-1}{n}\pi \leqq t \leqq \frac{j}{n}\pi \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad x = \cos t. \tag{2.1}$$

ЛЕММА 1.

$$|f(x_k) - f(x)| \leqq \begin{cases} \left[2\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right) + 2\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] c_1, & \text{если } k = j, \\ \left[5\omega\left(\frac{i \sin t}{n}\right) + 13\omega\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\right] c_1, & \text{если } j < k = j+i \leqq n \\ & \text{или } 1 \leqq k = j-i < j. \end{cases} \tag{2.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$t_k = \frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Воспользовавшись формулой Тэйлора с остаточным членом Лагранжа, получаем:

$$x_k - x = \cos t_k - \cos t = (t - t_k)\sin t - \frac{1}{2}(t_k - t)^2 \cos s,$$

где точка s расположена между t и t_k. Поэтому

$$|x_k - x| \leqq |t_k - t| \sin t + \frac{1}{2}(t_k - t)^2. \tag{2.4}$$

Ввиду (2.1) и (2.3)

$$|t_j - t| \leqq \frac{\pi}{2n} < \frac{2}{n}. \tag{2.5}$$

Следовательно

$$|x_j - x| < \frac{2}{n}\sin t + \frac{2}{n^2}$$

и неравенство (2.2) справедливо при $k = j$.

Если

$$j < n; \quad i = 1, 2, \ldots, n-j; \quad k = j+i,$$

то ввиду (2.1) и (2.3)

$$|t_k - t| \leqq |t_k - t_j| + |t_j - t| \leqq \frac{i\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} \leqq \frac{3i\pi}{2n} < \frac{5i}{n}.$$

Отсюда и из (2.4) получаем:

$$|x_k - x| < \frac{5i}{n}\sin t + \frac{13i^2}{n^2}$$

и следовательно неравенство (2.2) справедливо при $k = j+i$. Аналогичным образом рассматривается случай $k = j-i$.

ЛЕММА 2. *Пусть имеет место* (2.1). *Тогда*

$$(2.6)\qquad |f(x_k)-f(x_{k+1})| \leqq \left[4\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)+20\omega\left(\frac{i}{n^2}\right)\right]c_1, \quad \text{если} \quad j<k=j+i<n;$$

$$(2.7)\qquad |f(x_k)-f(x_{k+1})| \leqq \left[4\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)+20\omega\left(\frac{i}{n^2}\right)\right]c_1, \quad \text{если} \quad 1<k=j-i<j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $j<k=j+i<n$. Очевидно

$$x_k-x_{k+1}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi=2\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{n}<\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

По теореме о среднем Лагранжа

$$\sin\frac{k\pi}{n}=\sin t+\left(\frac{k\pi}{n}-t\right)\cos s,$$

где точка s расположена между t и $\frac{k\pi}{n}$. Здесь ввиду (2.1)

$$\frac{k\pi}{n}-t\leqq\frac{i+1}{n}\pi\leqq\frac{2i\pi}{n}.$$

Поэтому

$$x_k-x_{k+1}<\frac{\pi}{n}\sin t+\frac{2i\pi^2}{n^2}<\frac{4}{n}\sin t+\frac{20i}{n^2}.$$

Отсюда следует (2.6). Аналогичным образом доказывается (2.7).

Обозначим через $l_k(x)$ фундаментальные многочлены Лагранжева интерполирования по узлам Чебышева.

ЛЕММА 3. *Пусть выполняется* (2.1). *Тогда*

$$(2.8)\qquad |l_k(x)|\leqq\begin{cases}2, & \text{если} \quad k=j,\\ \dfrac{2}{i}, & \text{если} \quad j<k=j+i\leqq n \quad \text{или} \quad 1\leqq k=j-i<j.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что

$$(2.9)\qquad l_k(x)=(-1)^k\cdot\frac{\cos nt\sin t_k}{n(\cos t_k-\cos t)}=(-1)^{k+1}\frac{\cos nt}{2n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t_k+t}{2}\right).$$

Здесь

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}\right|\leqq\frac{1}{\sin\frac{1}{2}|t_k-t|};\qquad \left|\operatorname{ctg}\frac{t_k+t}{t}\right|\leqq\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(t_k+t)}.$$

Так как

$$\sin\frac{t_k+t}{2} = \sin\frac{t_k}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos\frac{t_k}{2}\sin\frac{t}{2} \geqq \tag{2.10}$$

$$\geqq \left|\sin\frac{t_k}{2}\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{t_k}{2}\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{1}{2}|t_k-t|,$$

то

$$|l_k(x)| \leqq \frac{|\cos nt|}{n\sin\frac{1}{2}|t-t_k|}.$$

Если $k = j$, то

$$|\cos nt| = |\cos nt-\cos nt_j| = 2\left|\sin n\frac{t-t_j}{2}\sin\frac{t+t_j}{2}\right| \leqq 2n\sin\frac{1}{2}|t-t_j|$$

и поэтому выполняется (2.8). Если $j < k = j+i \leqq n$, то

$$\sin\frac{t_k-t}{2} \geqq \sin\frac{2i-1}{4n}\pi \geqq \frac{2i-1}{2n} \geqq \frac{i}{2n} \tag{2.11}$$

и поэтому снова выполняется (2.8). Аналогичным образом рассматривается случай $1 \leqq k = j-i < j$.

ЛЕММА 4. *Пусть имеет место* (2.1). *Тогда*

$$|l_k(x)+l_{k+1}(x)| \leqq \frac{7}{i^2}, \quad \text{если} \quad j < k = j+i < n, \tag{2.12}$$

$$|l_k(x)+l_{k-1}(x)| \leqq \frac{7}{i^2}, \quad \text{если} \quad 1 < k = j-i < j. \tag{2.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $j < k = j+i < n$. Ввиду (2.9)

$$l_k(x)+l_{k+1}(x) = (-1)^k\frac{\cos nt}{2n}\left[\operatorname{ctg}\frac{t_{k+1}-t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}+\operatorname{ctg}\frac{t_{k+1}+t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_k+t}{2}\right].$$

Поэтому

$$|l_k(x)+l_{k+1}(x)| \leqq \frac{1}{2n}\left[\left|\operatorname{ctg}\frac{t_{k+1}-t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}\right|+\left|\operatorname{ctg}\frac{t_{k+1}+t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_k+t}{2}\right|\right].$$

Принимая во внимание (2.11), получаем:

$$\operatorname{ctg}\frac{t_k-t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_{k+1}-t}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{t_k-t}{2}\sin\frac{t_{k+1}-t}{2}} \leqq \frac{\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{i}{2n}\right)^2} = \frac{2\pi n}{i^2} < \frac{7n}{i^2}.$$

Ввиду (2.10) аналогичное неравенство выполняется и для

$$\operatorname{ctg}\frac{t_k+t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{t_{k+1}+t}{2}.$$

Следовательно (2.12) действительно имеет место. Аналогичным образом доказывается (2.13)

§3. Первое доказательство теоремы 1

Очевидно

$$L_n(f,x)-f(x)=\sum_{k=1}^{n} l_k(x)[f(x_k)-f(x)]. \tag{3.1}$$

Оценим сначала j-тый член этой суммы. С помощью леммы 3 и 1 получаем:

$$|l_j(x)|\,|f(x_j)-f(x)| \leqq 4c_1\left[\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)+\omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Если $k=j+i$; $i=1,3,5,\ldots$; $i<n-j$, то сумма k-ого и $k+1$-ого члена выражения (3.1) оценивается с помощью тождества

$$\begin{aligned} l_k(x)\,[f(x_k)-f(x)]+l_{k+1}(x)\,[f(x_{k+1})-f(x)] &= \\ =[l_k(x)+l_{k+1}(x)]\,[f(x_k)-f(x)]+l_{k+1}(x)\,[f(x_{k+1})-f(x_k)]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Используя леммы 1–4, видим, что абсолютная величина этого выражения не превосходит

$$\frac{7c_1}{i^2}\left[5\omega\left(\frac{i\sin t}{n}\right)+13\omega\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\right]+\frac{2c_1}{i}\left[4\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)+20\omega\left(\frac{i}{n^2}\right)\right]\leqq$$

$$\leqq\frac{43c_1}{i}\,\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)+\frac{131c_1}{i}\,\omega\left(\frac{i}{n^2}\right).$$

Аналогичным образом оценивается сумма k-ого и $k-1$-ого члена, если $k=j-i$; $i=1,3,5,\ldots$; $i<j-1$.

Если число $i=n-j$ нечетно, то последний член суммы (3.1) оценивается также, как и j-тый:

$$|l_n(x)|\cdot|f(x_n)-f(x)|\leqq\frac{2c_1}{i}\left[5\omega\left(\frac{i\sin t}{n}\right)+13\omega\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\right]\leqq 10c_1\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)+26c_1\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогичным образом оценивается первый член суммы (3.1), если число $i=j-1$ нечетно.

Резюмируя сказанное и принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leqq c_3\ln n\qquad(n=2,3,4,\ldots),$$

получаем при $n \geqq 2$ неравенство

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqq c_2\left[\omega\left(\frac{\sin t}{n}\right)\ln n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,\omega\left(\frac{i}{n^2}\right)\right],$$

что и требовалось доказать.

§4. Второе доказательство теоремы 1

Приведем еще одно, менее элементарное, доказательство теоремы 1. Если $p_n(x)$ любой многочлен $n-1$-ой степени, то очевидно

$$L_n(f, x)-f(x) = p_n(x)-f(x)+\sum_{k=1}^{n} l_k(x)[f(x_k)-p_n(x_k)].$$

В цитированной в конце работы статье С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ доказал, что многочлен $p_n(x)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)-p_n(x)| \leqq c_{12}\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) \quad (-1 \leqq x \leqq +1; \quad n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Поэтому

$$(4.1) \qquad |L_n(f, x)-f(x)| \leqq c_{12}\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\omega\left(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n}\right)|l_k(x)|\right] \leqq$$

$$\leqq c_{12}\left\{\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\left[1+\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|\right]+\sum_{|x_k|<|x|}\left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n}\right)-\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\right]|l_k(x)|\right\}.$$

Известно, что

$$(4.2) \qquad 1+\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)| \leqq c_{13}\ln n \qquad (-1 \leqq x \leqq +1; \quad n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Остается оценить сумму

$$\sum_{|x_k|<|x|}\left|\omega\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n}\right|-\omega\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right|\Bigg||l_k(x)|.$$

Очевидно

$$\sqrt{1-x_k^2} = \sin t_k, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin t.$$

Если $|x_k| < |x|$, то $\sin t_k > \sin t$ и поэтому

$$\omega\left|\frac{\sin t_k}{n}\right|-\omega\left|\frac{\sin t}{n}\right| \leqq \omega\left|\frac{\sin t_k-\sin t}{n}\right|.$$

Так как

$$\sin t_k-\sin t = 2\cos\frac{t_k+t}{2}\sin\frac{t_k-t}{2},$$

то

$$|\sin t_k-\sin t| \leqq 2\sin\frac{1}{2}|t_k-t| \leqq |t_k-t|.$$

В **§2** мы видели, что

$$|t_k - t| \leq \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & \text{если} \quad k = j, \\ \dfrac{5i}{n}, & \text{если} \quad k = j+i \text{ или } k = j-i. \end{cases}$$

Поэтому

$$\omega\left(\frac{\sin t_k - \sin t}{n}\right) \leq \begin{cases} 2\omega\left(\dfrac{1}{n^2}\right), & \text{если} \quad k = j, \\ 5\omega\left(\dfrac{i}{n^2}\right), & \text{если} \quad k \neq j. \end{cases}$$

Принимая во внимание лемму 3, получаем:

$$\sum_{|x_k|<|x|} \left[\omega\left(\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{n}\right) - \omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)\right] |l_k(x)| \leq 4\omega\left(\frac{1}{n^2}\right) + 20 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\, \omega\left(\frac{i}{n^2}\right). \tag{4.3}$$

Резюмируя (4.1)–(4.3), получаем неравенство (1.2).

§5. Доказательство теоремы 2

Пусть $n = 8m$, где m натуральное число. Определим функции $g_n(x)$ следующим образом:

(5.1) $\quad g_n(x) = 0$, если $x \leq x_{4m-1}$ или $x \geq x_{2m+1}$;

(5.2) $\quad g_n(x_i) = 0$, если $i = 2m+3, 2m+5, \ldots, 4m-3$;

(5.3) $\quad g_n(x_i) = 1$, если $i = 2m+2, 2m+4, \ldots, 4m-2$;

(5.4) $\quad g_n(x)$ линейна, если $x_i \geq x \geq x_{i+1}$ и $i = 2m+1, 2m+2, \ldots, 4m-2$.

Приведем некоторые свойства функций $g_n(x)$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Очевидно

$$|g_n(x)| \leq 1. \tag{5.5}$$

Так как

$$x_{4m-1} = \cos\frac{8m-3}{2n}\pi > \cos\frac{4m}{n}\pi = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

то из (5.1) получаем:

$$g_n(0) = 0,$$

и так как

$$x_{2m+1} = \cos\frac{4m+1}{2n}\pi < \cos\frac{2m}{n}\pi = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то из (5.1) получаем:

$$g_n(1) = 0. \tag{5.7}$$

Если $2m+1 \leqq i \leqq 4m-2$, то

$$x_i - x_{i+1} = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi - \cos\frac{2i+1}{2n}\pi > \frac{\pi}{n}\sin\frac{2i-1}{2n}\pi \geqq$$

$$\geqq \frac{\pi}{n}\sin\frac{4m+1}{2n}\pi > \frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{n\sqrt{2}} > \frac{2}{n}.$$

Поэтому и ввиду (5.1)–(5.4) при $h > 0$

$$|g_n(x+h) - g_n(x)| \leqq \frac{nh}{2}. \tag{5.8}$$

Ввиду (5.1)–(5.3) и (2.9)

$$L_n(g_n, 0) = \sum_{i=m+1}^{2m-1} l_{2i}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{2m-1}\frac{\sin t_{2i}}{\cos t_{2i}}.$$

Здесь

$$\sin t_{2i} \geqq \sin t_{2m+2} = \sin\frac{4m+3}{2n}\pi > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$\cos t_{2i} = \cos\frac{4i-1}{2n}\pi = \sin\frac{n-4i+1}{2n}\pi \leqq \frac{n-4i+1}{2n}\pi.$$

Поэтому

$$L_n(g_n, 0) \geqq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{i=m+1}^{2m-1}\frac{1}{n-4i+1} \geqq c_{11}\ln n. \tag{5.9}$$

Используя (1.3), (5.6) и (5.8), получаем:

$$|L_N(g_n, 0)| \leqq c_4\frac{n}{2N}\ln N \quad (N = 2, 3, 4, \ldots), \tag{5.10}$$

а используя тождество

$$L_N(g_n, x) = \sum_{i=1}^{N} g_n(x_i)l_i(x) \tag{5.11}$$

и неравенства (4.2) и (5.5), получаем:

$$|L_N(g_n, 0)| \leqq c_{13}\ln N \quad (N = 2, 3, 4, \ldots). \tag{5.12}$$

Определим возрастающую последовательность натуральных чисел m_i так, чтобы для чисел $n_i = 8m_i$ выполнялись неравенства

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \leqq c_{15}\omega\left(\frac{1}{n_{k-1}}\right) \quad (k \geqq 2), \tag{5.13}$$

$$n_k\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \geqq c_{16}\sum_{i=1}^{k-1} n_i\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \quad (k \geqq 2), \tag{5.14}$$

где

$$c_{15} = 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{c_{14}}{3c_{13}}} < 1 \tag{5.15}$$

и

$$c_{16} = \frac{3c_4}{2c_{11}}. \tag{5.16}$$

Это возможно, так как

$$\lim_{h=+0} \omega(h) = 0$$

и мы предположили, что

$$\lim_{h=+0} \frac{\omega(h)}{h} = \infty.$$

Заметим, что ввиду (5.13) и (5.15)

$$\sum_{i=k}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq \frac{1}{1-c_{15}}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (k \geqq 1). \tag{5.17}$$

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) g_{n_i}(x). \tag{5.18}$$

Ряд справа сходится в силу (5.17) и (5.5).

Используя (5.6), получаем:

$$f(0) = 0. \tag{5.19}$$

Докажем, что $f(x) \in C(\omega)$. Очевидно

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right)|g_{n_i}(x+h)-g_{n_i}(x)|. \tag{5.20}$$

Обозначим через j наименьший индекс, для которого $n_j h \geqq 1$. Ввиду (5.8), (5.5), (5.14) и 5.(17) получаем:

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{j-1} n_i\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)+2\sum_{i=j}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{c_{16}}\right)n_{j-1}\omega\left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)+\frac{2}{1-c_{15}}\,\omega\left(\frac{1}{n_j}\right).$$

Так как

$$\omega\left(\frac{1}{n_{j-1}}\right)=\omega\left(\frac{h}{h n_{j-1}}\right) \leqq \frac{2}{h n_{j-1}}\,\omega(h)$$

и

$$\omega\left(\frac{1}{n_j}\right) \leqq \omega(h),$$

то

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq \left(1+\frac{1}{c_{16}}+\frac{2}{1-c_{15}}\right)\omega(h)=c_{17}\omega(h),$$

что мы и хотели доказать.

Покажем теперь, что

$$L_{n_k}(f,0) \geqq c_{10}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\ln n_k \qquad (k=1,2,3,\ldots), \tag{5.21}$$

где

$$c_{10}=\frac{1}{3}c_{11}. \tag{5.22}$$

Ввиду (5.19) мы тем самым завершим доказательство теоремы 2.

Из (5.18) получаем:

$$L_{n_k}(f,0)=\sum_{i=1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)L_{n_k}(g_{n_i},0). \tag{5.23}$$

Ввиду (5.9)

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)L_{n_k}(g_{n_k},0) \geqq c_{11}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\ln n_k. \tag{5.24}$$

Следствием неравенства (5.10), (5.14) и (5.16) является формула

$$\sum_{i=1}^{k-1}\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)|L_{n_k}(g_{n_i},0)| \leqq \frac{c_4}{2}\,\frac{\ln n_k}{n_k}\sum_{i=1}^{k-1} n_i\omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq \ldots \tag{5.25}$$

$$\leqq \frac{c_4}{2}\,\frac{\ln n_k}{n_k}\,\frac{n_k}{c_{16}}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)=\frac{c_4}{2c_{16}}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\ln n_k=\frac{1}{3}c_{14}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\ln n_k.$$

Наконец, в силу (5.12), (5.17) и (5.15)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) |Lg_{n_k}(g_{n_i}, 0)| \leqq c_{13} \ln n_k \sum_{i=k+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq \tag{5.26}$$

$$\leqq c_{13} \ln n_k \left(\frac{1}{1-c_{15}} - 1\right) \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) = \frac{1}{3} c_{14} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \ln n_k.$$

Резюмируя (5.22)–(5.26), получаем (5.21).

§6. Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы 3 похоже на доказательство теоремы 2. Ввиду (5.1)–(5.3) и (2.9)

$$L_n(g_n, 1) = \sum_{i=m+1}^{2m-1} l_{2i}(1) = -\frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{2m-1} \frac{\sin t_{2i}}{1-\cos t_{2i}} = -\frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{2m-1} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} t_{2i}.$$

Здесь

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} t_{2i} \geqq \operatorname{ctg} \frac{1}{2} t_{4m-2} = \operatorname{ctg} \frac{n-5}{4n} \pi > 1.$$

Поэтому при $m \geqq 2$

$$L_n(g_n, 1) \leqq -\frac{1}{n}(m-1) \leqq -\frac{m}{2n} = -\frac{1}{16}. \tag{6.1}$$

Используя (1.3), (5.7) и (5.8), получаем:

$$|L_N(g_n, 1)| \leqq \frac{c_4 n \ln N}{2N} \quad (N = 2, 3, 4, \ldots), \tag{6.2}$$

а используя (5.11), (4.2) и (5.5), получаем:

$$|L_N(g_n, 1)| \leqq c_{13} \ln N \quad (N = 2, 3, 4, \ldots). \tag{6.3}$$

Определим возрастающую последовательность натуральных чисел $m_i \geqq 2$ так, чтобы для чисел $n_i = 8m_i$ выполнялись неравенства

$$\omega\left(\frac{1}{n_{i+1}}\right) \leqq c_{18} \frac{\omega\left(\frac{1}{n_i}\right)}{\ln n_i} \quad (i \geqq 1) \tag{6.4}$$

и

$$\frac{n_k}{\ln n_k} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \leqq c_{19} \sum_{i=1}^{k-1} n_i \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \quad (k \geqq 2), \tag{6.5}$$

где

$$c_{18} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{48c_{13}}} \tag{6.6}$$

и

$$c_{19} = 24c_1, \tag{6.7}$$

что возможно, так как

$$\lim_{h=+0} \omega(h) = 0$$

и мы предположили, что

$$\lim_{h=+0} \frac{\omega(h)}{h \ln \frac{1}{h}} = \infty.$$

Снова определим функцию $f(x)$ формулой (5.18). Так как условия (6.4) и (6.5) более жесткие, чем условия (5.13) и (5.14), то снова $f(x) \in C(\omega)$. Ввиду (5.7) $f(1) = 0$. Поэтому теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что

$$L_{n_k}(f, 1) \leqq -\frac{1}{48}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6.8}$$

Для этого воспользуемся формулой

$$L_{n_k}(f, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) L_{n_k}(g_{n_i}, 1). \tag{6.9}$$

Ввиду (6.1)

$$L_{n_k}(g_{n_k}, 1) \leqq -\frac{1}{16}. \tag{6.10}$$

Из (6.2), (6.5) и (6.7) получаем:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right)|L_{n_k}(g_{n_i}, 1)| \leqq \frac{c_4 \ln n_k}{2n_k} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} n_i \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq \tag{6.11}$$

$$\leqq \frac{c_4}{2c_{19}}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) = \frac{1}{48}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Наконец, в силу (6.3), (6.4) и (6.6)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right)|L_{n_k}(g_{n_i}, 1)| \leqq c_{13} \ln n_k \sum_{i=k+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_i}\right) \leqq c_{13}\left(\frac{1}{1-c_{18}} - 1\right)\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) = \tag{6.12}$$

$$= \frac{1}{48}\,\omega\left(\frac{1}{n_k}\right).$$

Резюмируя (6.9)—(6.12), получаем (6.8).

Литература

С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ, Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами, *Математический сборник*, **70** (1966), 252—265.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОРЯДКЕ ПОГРЕШНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

О. КИШ (O. KIS)

Кафедра геометрии университета им. Л. Этвеша, Будапешт

(Поступило 2. 8. 1967)

Обозначим через $\omega(h)$ модуль непрерывности некоторой фиксированной 2π-периодической непрерывной функции, а через $C(\omega)$ множество 2π-периодических непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих при $h > 0$ условию

$$\omega(f, h) \leqq c_1\omega(h),$$

где $\omega(f, h)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, а c_1 (и далее $c_2, \ldots, c_7$) положительное число, зависящее лишь от $f(x)$. Пусть

$$||f(x)|| = \max |f(x)|.$$

Обозначим через $x_{k,n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ узлы тригонометрического интерполирования, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqq x_{0,n} < x_{1,n} < \ldots < x_{2n,n} < 2\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

через λ_n — соответствующие им числа Лебега и через $L_n(f, x)$ — соответствующие этим узлам и функции $f(x)$ тригонометрические интерполяционные многочлены. Пусть, наконец,

$$x_{2n+1,n} = x_{0,n} + 2\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$d_n = \min_{0 \leqq k \leqq 2n} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Цель настоящей работы — доказать следующий результат:

ТЕОРЕМА. *Если*

$$\lim_{h=+0} \frac{h}{\omega(h)} = 0 \tag{1}$$

то существует такая функция $f(x) \in C(\omega)$, что

$$||L_n(f, x) - f(x)|| \geqq c_2\omega(d_n)\lambda_n \qquad (n = n_1, n_2, n_3, \ldots), \tag{2}$$

где n_i — возрастающая последовательность натуральных чисел.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сделаем несколько замечаний.

1. В работе [1] было доказано, что

$$d_n > \frac{1}{n\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому в (2) $\omega(d_n)$ можно заменить на $\omega\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right)$.

2. Пусть

$$d_n \geqq \frac{c_3}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) = \omega\left(\frac{1}{c_3}\,\frac{c_3}{n}\right) \leqq \left(\frac{1}{c_3} + 1\right)\omega\left(\frac{c_3}{n}\right),$$

то

$$\omega(d_n) \geqq \omega\left(\frac{c_3}{n}\right) \geqq \frac{1}{1 + \frac{1}{c_3}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

и поэтому в (2) $c_2\omega(d_n)$ можно заменить на $c_4\omega\left(\frac{1}{n}\right)$. Известно, что если $f(x) \in C(\omega)$, то

$$(3) \qquad \|L_n(f, x) - f(x)\| \leqq c_5\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом из нашей теоремы следует, что порядок этого неравенства, вообще говоря, не может быть улучшен.

3. В другой работе мы покажем, что узлы $x_{k,n}$ можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$d_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \omega(d_n) = o\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$\|L_n(f, x) - f(x)\| \leqq c_6\omega(d_n)\lambda_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

т.е. для некоторых узлов порядок оценки (3) может быть улучшен.

4. Если

$$\limsup_{n\to\infty} \omega(d_n)\lambda_n > 0,$$

то последовательность n_k можно выбрать так, чтобы было

$$\omega(d_{n_k})\lambda_{n_k} \geqq c_7 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

а если

$$\limsup_{n\to\infty} \omega(d_n)\lambda_n = \infty,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \omega(d_{n_k})\lambda_{n_k} = \infty.$$

Поэтому из нашей теоремы следуют результаты работы [2].

Приступаем к доказательству теоремы.

Обозначим через $l_{k,n}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ фундаментальные многочлены тригонометрического интерполирования по узлам $x_{k,n}$. Пусть функция Лебега принимает в точке z_n свое наибольшее значение:

$$\sum_{k=0}^{2n} |l_{k,n}(z_n)| = \lambda_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть 2π-периодические непрерывные функции $g_n(x)$ линейны между соседними узлами $x_{k,n}$ и $x_{k+1,n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ и

$$g_n(x_{k,n}) = \operatorname{sign} l_{k,n}(z_n) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n+1),$$

где

$$l_{2n+1,n}(x) = l_{0,n}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В дальнейшем нам потребуются следующие очевидные свойства этих функций:

$$\|g_n(x)\| = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{4}$$

$$|g_n(x+h) - g_n(x)| \leqq \frac{2h}{d_n} \qquad (h > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

$$g_n(x) \in C(\omega) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{6}$$

$$L_n(g_n, z_n) = \lambda_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{7}$$

$$\|L_n(g_m, x)\| \leqq \lambda_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\quad m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Если для некоторого фиксированного m

$$\|L_n(g_m, x) - g_m(x)\| \geqq \omega(d_n)\lambda_n \quad (n = n_1, n_2, n_3, \ldots),$$

то теорема доказана. Поэтому можно считать, что при любом m

$$\|L_n(g_m, x) - g_m(x)\| \leqq \omega(d_n)\lambda_n \quad (n \geqq N_m), \tag{9}$$

где число N_m зависит лишь от m.

Определим возрастающую последовательность натуральных чисел n_i так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\omega(d_{n_1}) \leqq \frac{1}{11}, \quad \omega(d_{n_{i+1}}) \leqq \frac{1}{11}\,\omega(d_{n_i}) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots); \tag{10}$$

(11) $$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\omega(d_{n_i})}{d_{n_i}} \leqq \frac{1}{10} \cdot \frac{\omega(d_{n_j})}{d_{n_j}} \quad (j = 2, 3, 4, \ldots);$$

(12) $$||L_{n_k}(g_{n_i}, x) - g_{n_i}(x)|| \leqq \omega(d_{n_k})\lambda_{n_k} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots;\ k = i+1, i+2, i+3, \ldots);$$

(13) $$\lambda_{n_k} \geqq 11 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Это возможно, так как

$$d_n \leqq \frac{2\pi}{2n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и поэтому

$$\lim_{i \to \infty} \omega(d_{n_i}) = 0,$$

а также в силу соотношений (1), (9) и

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

Пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(d_{n_i}) g_{n_i}(x).$$

Ряд справа сходится ввиду (10) и (4), функция $f(x)$ очевидно 2π-периодична.

Покажем, что при $h > 0$

(14) $$\omega(f, h) \leqq 6{,}6\omega(h)$$

и поэтому $f(x) \in C(\omega)$. Очевидно

(15) $$|f(x+h) - f(x)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \omega(d_{n_i}) |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)|.$$

Если $d_{n_1} \geqq h$, то обозначим через j индекс, для которого

$$d_{n_{j+1}} < h \leqq d_{n_j}.$$

Такой индекс существует и единственен, так как ввиду (10) последовательность d_{n_i} убывая сходится к нулю. Если $d_{n_1} < h$, то пусть $j = 0$. Ввиду (5) и (11) при $j \geqq 1$

(16) $$\sum_{i=1}^{j} \omega(d_{n_i}) |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| \leqq \sum_{i=1}^{j} \omega(d_{n_i}) \frac{2h}{d_{n_i}} \leqq 2{,}2h \frac{\omega(d_{n_j})}{d_{n_j}} \leqq 4{,}4\omega(h).$$

Используя (4) и (10), получаем:

(17) $$\sum_{i=j+1}^{\infty} \omega(d_{n_i}) |g_{n_i}(x+h) - g_{n_i}(x)| \leqq 2 \sum_{i=j+1}^{\infty} \omega(d_{n_i}) \leqq 2{,}2\,\omega(d_{n_{j+1}}) \leqq 2{,}2\omega(h).$$

Из (15)–(17) следует (14).

Покажем, что

(18) $$L_{n_k}(f, z_{n_k}) - f(z_{n_k}) \geqq 0{,}7\omega(d_{n_k})\lambda_{n_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

и тем самым докажем (2) и завершим доказательство теоремы. Очевидно

$$L_{n_k}(f, z_{n_k}) - f(z_{n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(d_{n_i})[L_{n_k}(g_{n_i}, z_{n_k}) - g_{n_i}(z_{n_k})]. \tag{19}$$

Ввиду (7)

$$\omega(d_{n_k}) L_{n_k}(g_{n_k}, z_{n_k}) = \omega(d_{n_k}) \lambda_{n_k}. \tag{20}$$

В силу (12) и (10)

$$\sum_{i=1}^{k-1} \omega(d_{n_i})[L_{n_k}(g_{n_i}, z_{n_k}) - f(z_{n_k})] \geqq -\omega(d_{n_k})\lambda_{n_k} \sum_{i=1}^{k-1} \omega(d_{n_i}) \geqq -0{,}1\omega(d_{n_k})\lambda_{n_k}. \tag{21}$$

Используя (8) и (10), получаем:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \omega(d_{n_i}) L_{n_k}(g_{n_i}, z_{n_k}) \geqq -\lambda_{n_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \omega(d_{n_i}) \geqq -0{,}1\omega(d_{n_k})\lambda_{n_k}. \tag{22}$$

Аналогичным образом, ввиду (4), (10) и (13)

$$\sum_{i=k}^{\infty} \omega(d_{n_i}) g_{n_i}(z_{n_k}) \leqq \sum_{i=k}^{\infty} \omega(d_{n_i}) \leqq 1{,}1\omega(d_{n_k}) \leqq 0{,}1\omega(d_{n_k})\lambda_{n_k}. \tag{23}$$

Из (19) – (23) следует (18).

Литература

[1] О. Киш, О сходимости интерполяционных процессов в некоторых пространствах функций, *Труды математического института АН Венгрии*, **7** (1962), 385 – 394.

[2] О. Киш, Одно условие расходимости тригонометрического интерполирования, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **10** (1967), 125 – 142.

О ПОРЯДКЕ ПОГРЕШНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

О. КИШ (O. KIS)

Кафедра геометрии университета им. Л. Этвеша, Будапешт

(Поступило 13. 9. 1967)

1. В работах [1]–[10] исследовалась зависимость порядка погрешности Лагранжева и тригонометрического интерполирования от порядка роста чисел Лебега λ_n узлов интерполирования. Продолжая эти исследования, мы докажем следующую теорему:

Если модуль непрерывности $\omega(h)$ непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h\to+0}\frac{\omega(h)}{h}=\infty, \tag{1}$$

то для некоторых зависящих лишь от $\omega(h)$ узлов тригонометрического интерполирования выполняется соотношение

$$|f(x)-L_n(x)|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right)\lambda_n\right]\quad(n=1,2,3,\ldots), \tag{2}$$

где $L_n(x)$-тригонометрический интерполяционный многочлен функции $f(x)$.

Известно, что для любых узлов интерполирования

$$|f(x)-L_n(x)|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\lambda_n\right]\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Мы видим, что для некоторых узлов порядок этой оценки может быть улучшен для всех 2π-периодических функций с модулем непрерывности одинакого порядка.

Порядок оценки (2) не может быть улучшен для всех таких функций ни для каких узлов в силу следующей теоремы из [9]: если модуль непрерывности $\omega(h)$ некоторой 2π-периодической непрерывной функции удовлет-

воряет условию (1), то в множестве 2π-периодических функций, модуль непрерывности которых равен $O[\omega(h)]$, существует функция $f(x)$, для которой

$$|f(x)-L_n(x)| \geqq \omega\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right)\lambda_n$$

при бесконечной последовательности натуральных чисел n.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right)\lambda_n = 0,$$

то ввиду (2) последовательность $L_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$. Это уже было доказано в [3].

2. Нижеследующее доказательство теоремы похоже на соответствующее доказательство работы [2].

Прежде всего определим узлы интерполирования, для которых доказывается теорема:

$$x_{k,n} = \frac{\pi k}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$x_{0,n} = x_{1,n} - d_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

относительно величины d_n мы пока предположим лишь, что

$$0 < d_n \leqq \frac{\pi}{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Чтобы упростить запись, второй индекс узлов будет опускаться.

Запишем фундаментальные многочлены тригонометрического интерполирования по нашим узлам:

$$l_{0,n}(x) = \frac{\sin nx}{\sin nx_0} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$l_{k,n}(x) = \frac{\sin n(x-x_k)}{2n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)} \frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_0)}{\sin\frac{1}{2}(x_k-x_0)} \quad (1 \leqq k \leqq 2n; \quad n=1, 2, 3, \ldots),$$

так как эти тригонометрические многочлены n-ого порядка удовлетворяют условиям

$$l_{k,n}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = i \\ 0, & \text{если} \quad k \neq i \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, 2n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Вместо $l_{k,n}(x)$ мы будем писать просто l_k.

3. Оценим величины l_0, l_1 и $\sum\limits_{k=2}^{2n} |l_k|$.

Очевидно

$$|l_0| \leqq \frac{1}{\sin nx_0} = \frac{1}{\sin nd_n} < \frac{\pi}{2nd_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Так как

$$\sin\frac{1}{2}(x-x_0) = \sin\frac{1}{2}(x-x_k)\cos\frac{1}{2}(x_k-x_0)+\cos\frac{1}{2}(x-x_k)\sin\frac{1}{2}(x_k-x_0),$$

то при $1 \leqq k \leqq 2n$

$$l_k = \frac{\sin n(x-x_k)}{2n\sin\frac{1}{2}(x_k-x_0)}\cos\frac{1}{2}(x_k-x_0)+\frac{\sin n(x-x_k)}{2n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\cos\frac{1}{2}(x-x_k)$$

и поэтому

$$|l_k| \leqq \frac{1}{2n\left|\sin\frac{1}{2}(x_k-x_0)\right|}+\left|\frac{\sin n(x-x_k)}{2n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right|. \tag{5}$$

Здесь

$$\frac{1}{2n\left|\sin\frac{1}{2}(x_k-x_0)\right|} \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{2n\sin\frac{1}{2}d_n} \leqq \dfrac{\pi}{2nd_n}, & \text{если } k = 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2n\sin\frac{1}{2}(x_k-x_1)} \leqq \dfrac{1}{2(k-1)}, & \text{если } 2 \leqq k \leqq n, \\[2ex] \dfrac{1}{2n\sin\frac{1}{2}\left(x_k-\frac{\pi}{2n}\right)} \leqq \dfrac{1}{4n-2k+1}, & \text{если } n<k\leqq 2n. \end{cases}$$

Второй член правой части неравенства (5) оценим на отрезке

$$\frac{\pi}{2n} \leqq x \leqq 2\pi+\frac{\pi}{2n}.$$

Ввиду 2π-периодичности оцениваемой величины полученная оценка будет справедлива для всех вещественных x. Обозначим через x_j $(1 \leqq j \leqq 2n)$ ближайший к точке x узел и пусть

$$i = \begin{cases} k-j, & \text{если } j\leqq k\leqq j+n, \\ j-k, & \text{если } j-n\leqq k\leqq j, \\ k-j-n, & \text{если } j+n<k\leqq 2n, \\ j+n-k, & \text{если } 0<k<j-n. \end{cases}$$

Очевидно

$$\left|\frac{\sin n(x-x_k)}{2n\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}\right| \leqq \begin{cases} 1, & \text{если } i=0, \\ \dfrac{1}{2n\sin\frac{1}{2}\,\frac{2i-1}{2n}\,\pi} \leqq \dfrac{1}{2i-1}, & \text{если } 1 \leqq i \leqq n. \end{cases}$$

Таким образом

$$|l_1| \leqq \frac{\pi}{2nd_n}+1, \tag{6}$$

$$\sum_{k=2}^{2n} |l_k| \leqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+3\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1} = O(\ln n). \tag{7}$$

4. Пусть

$$m = \begin{cases} \dfrac{n}{2}+1, & \text{если } n \text{ четно}, \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases}$$

$$u_n(x) = \frac{3}{\pi m(2m^2+1)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\left|\frac{\sin mt}{\sin t}\right|^4 dt.$$

По теореме Джексона для этого тригонометрического многочлена n-ого порядка выполняется условие

$$|f(x)-u_n(x)| \leqq 12\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Легко видеть, что

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \leqq \omega(h) \qquad (h>0), \tag{9}$$

так как

$$u_n(x+h)-u_n(x) = \frac{3}{\pi m(2m^2+1)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+h+2t)-f(x+2t)]\left(\frac{\sin mt}{\sin t}\right)^4 dt$$

и поэтому

$$|u_n(x+h)-u_n(x)| \leqq \omega(h)\frac{3}{\pi m(2m^2+1)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin mt}{\sin t}\right|^4 dt = \omega(h).$$

Пусть

$$v_n(x) = u_n(x) - u_n(x_1) + f(x_1).$$

Для этого тригонометрического многочлена n-ого порядка ввиду (8) и (9) выполняются условия

$$|v_n(x) - f(x)| \leqq 24\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{10}$$

$$|v_n(x+h) - v_n(x)| \leqq \omega(h), \tag{11}$$

$$v_n(x_1) = f(x_1). \tag{12}$$

5. Теперь мы уже можем оценить погрешность тригонометрического интерполирования. Очевидно

$$f(x) - L_n(x) = f(x) - v_n(x) + v_n(x) - L_n(x) = f(x) - v_n(x) + \sum_{k=0}^{2n} [v_n(x_k) - f(x_k)] l_k. \tag{13}$$

Первый член стоящего справа выражения оценивается с помощью формулы (10). Второй член ввиду (12) преобразуется следующим образом:

$$[v_n(x_0) - f(x_0)] l_0 = [v_n(x_0) - v_n(x_1) + f(x_1) - f(x_0)] l_0.$$

В силу (3), (11) и (4)

$$|v_n(x_0) - f(x_0)| \cdot |l_0| \leqq \frac{\pi\omega(d_n)}{nd_n}.$$

Ввиду (12) третий член правой части равенства (13) $[v_n(x_1) - f(x_1)] l_1$ равен нулю. Наконец,

$$\sum_{k=2}^{2n} |v_n(x_k) - f(x_k)| \cdot |l_k| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n\right]$$

в силу (10) и (7). Таким образом

$$|f(x) - L_n(x)| = O\left[\frac{\omega(d_n)}{nd_n} + \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n\right]. \tag{14}$$

6. Ввиду (1) последовательность d_n можно выбрать столь быстро сходящейся к нулю, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\omega(d_n)}{d_n} \geqq n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n. \tag{15}$$

Тогда в силу (14)

$$|f(x) - L_n(x)| = O\left[\frac{\omega(d_n)}{nd_n}\right].$$

Так как

$$\lambda_n > l_0\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{\sin nd_n} > \frac{1}{nd_n},$$

то отсюда следует:

$$|f(x) - L_n(x)| = O\left[\omega(d_n)\lambda_n\right]. \tag{16}$$

Используя (4), (6) и (7), получаем:

$$\lambda_n = O\left(\frac{1}{nd_n} + \ln n\right). \tag{17}$$

Если последовательность d_n такова, что кроме условия (15) выполняется еще и неравенство

$$d_n \leqq \frac{1}{n \ln n},$$

то ввиду (17)

$$\lambda_n = O\left(\frac{1}{nd_n}\right)$$

и поэтому

$$d_n = O\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right).$$

Отсюда и из (16) получаем:

$$|f(x) - L_n(x)| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n\lambda_n}\right)\lambda_n\right],$$

что и требовалось доказать.

Литература

[1] С. М. Лозинский, Пространства $\tilde{C}_\omega$ и $\tilde{C}\tilde{\lambda}$ и сходимость интерполяционных процессов в них, *ДАН*, **59** (1948), 1389–1392.

[2] P. Erdős, P. Turán, On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 47–65.

[3] О. Киш, О сходимости интерполяционных процессов в некоторых пространствах функций, *Труды мат. инст. А. Н. Венгрии*, **7** (1962), 65–75.

[4] О. Киш, О достаточном условии равномерной сходимости тригонометрического интерполирования, *Труды мат. инст. А. Н. Венгрии*, **7** (1962), 385–394.

[5] О. Киш, Замечания о сходимости тригонометрического интерполирования, *Труды мат. инст. А. Н. Венгрии*, **9** (1964), 515–541.

[6] О. Киш и Й. Сабадош, Замечания о сходимости Лагранжева интерполирования, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 389–430.

[7] Й. Сабадош, О сходимости Лагранжева интерполирования в некоторых множествах функций, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17** (1966), 31–44.

[8] В. Ф. Власов, Тонкая и грубая сходимость интерполяционных и квадратурных процессов, *ДАН*, **168** (1966), 735–736.

[9] О. Киш, Одно условие расходимости тригонометрического интерполирования, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **10** (1967), 135–142.

[10] О. Киш, Замечания о порядке погрешности тригонометрического интерполирования, *AnnalesUniv. Sci. Budapest*, Sectio Math, 11 (1968), 41–45.

BEMERKUNG ZUR DIVERGENZ DER WALSH-FOURIERREIHEN

Von

F. SCHIPP

II. Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 25. April 1967)

Einleitung

Es sei $\{r_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ das Rademachersche System, d. h.

$$(1) \qquad r_0(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < 1/2), \\ -1 & (1/2 \leqq x < 1), \end{cases} \qquad r_0(x+1) = r_0(x),$$

$$r_n(x) = r_0(2^n x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Das Walshsche System $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist folgenderweise definiert: $\varphi_0(x) \equiv 1$; und für $n \geqq 1$ mit der dyadischen Entwicklung

$$n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_s} \qquad (\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_s \geqq 0)$$

ist

$$(2) \qquad \varphi_n(x) = r_{\nu_1}(x)\, r_{\nu_2}(x) \ldots r_{\nu_s}(x).$$

Es ist bekannt, daß $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ im Intervall $[0, 1)$ ein vollständiges orthonormiertes System ist.

Wir bezeichnen mit $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ die dyadische Entwicklung der Zahl $x \in [0, 1)$, wobei wir festsetzen, daß für $x = p \cdot 2^{-q}$ alle x_i $(i \geqq q+1)$ gleich 0 sind. FINE [2] hatte die folgende Operation eingeführt: es sei

$$x + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

für

$$x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},$$

$$y = 0, y_1 y_2 \ldots y_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}.$$

Wir bezeichnen mit G die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. In der Menge G führen wir eine Operation $\oplus$ folgenderweise ein:

$$k \oplus l = \sum_{n=0}^{\infty} |k_n - l_n| \, 2^n \tag{3}$$

für

$$k = \sum_{n=0}^{\infty} k_n 2^n, \quad l = \sum_{n=0}^{\infty} l_n 2^n \qquad (k_n, l_n = 0, 1).$$

Offensichtlich wird G mit der Operation $\oplus$ zu einer Abelschen Gruppe und die nichtnegativen ganzen Zahlen, die kleiner als 2^n sind, bilden eine Untergruppe G_n von G, wobei noch

$$\psi_n(x) \cdot \psi_m(x) = \psi_{n \oplus m}(x) \tag{4}$$

besteht.

MORGENTHALER [3] hatte den folgende Begriff eingeführt: Eine nach 1 periodische Funktion $f(x)$ heißt an der Stelle $x \in [0, 1)$ „(W) stetig", wenn sich nach Wahl einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl δ so angeben läßt, daß die Ungleichung $|f(x \dot{+} y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle y erfüllt ist, die der Bedingung $0 \leq y < \delta$ genügen. Die Funktionen $\psi_n(x)$ sind offensichtlich „(W) stetig".

Die Walsh-Entwicklung einer „(W) stetigen" Funktion und die (trigonometrische) Fourier-Entwicklung einer stetigen Funktion haben ähnliche Eigenschaften. In dieser Arbeit werden wir für das Walsh-System das Analogon der FEJÉRsche Polynome[1] angeben. Mit diesen Walsh-Polynome $Q_n(x)$ kann mann solche Beispiele konstruieren die zu den bekannte Konstruktion ähnlich sind, in welchen das Fejérsche Beispiel benutzt wird.

Als Anwendung der Polynomen $Q_n(x)$ beweisen wir den folgenden

SATZ. *Man kann eine „(W) stetige" Funktion $F(x)$ so angeben, daß die Partialsummen der Walsh-Entwicklung $S(F)$ von $F(x)$ beschränkt sind, $S(F)$ aber auf einer Menge, welche in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, divergiert.*

TANDORI [4] hat einen analogen Satz für Fourierreihen bewiesen.

1. Hilfssätze

Zur Konstruktion der Funktion $F(x)$ werden wir einige Hilfssätze benutzen.

HILFSSATZ 1. *Es seien*

$$E_\nu = \{k : k = 2^\nu, 2^\nu + 1, \ldots, 2^{\nu+1} - 1\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.1}$$

$$E_{-1} = \{0\}.$$

$$m_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} z_\nu 2^\nu > 0 \quad (z_\nu = 0, 1)$$

[1] Siehe z. B. [1], [4].

und

$$F_n^{(0)} = E_{-1} \cup \Big(\bigcup_{\nu: z_\nu = 0} E_\nu \Big), \quad F_n^{(1)} = \bigcup_{\nu: z_\nu = 1} E_\nu,$$

(1.2) $$H_n = \{l : l = 0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\}.$$

Dann besteht

(1.3) $$\{l : l = m_n \oplus k,\ k \in F_n^{(1)}\} = H_n.$$

Beweis von Hilfssatz I. Da für $k_1 \neq k_2$, $m_n \oplus k_1 \neq m_n \oplus k_2$ gilt, weiterhin der Anzahl der Elemente von $F_n^{(1)}$ gleich $\sum_{\nu: z_\nu = 1} 2^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} z_\nu 2^\nu = m_n$ ist, deshalb auf Grund von (1.2) folgt (1.3) aus der Ungleichung

(1.4) $$m_n \oplus k < m_n \quad (k \in F_n^{(1)}).$$

Es sei nun $k \in E_\nu \subset F_n^{(1)}$. Dann ist $z_\nu = 1$ und $k = \sum_{j=0}^{\nu-1} k_j 2^j + 2^\nu (k_j = 0, 1)$, woraus sich (1.4) auf Grund von (3) und (1.1) folgenderweise ergibt:

$$m_n \oplus k = \sum_{j=0}^{\nu-1} |z_j - k_j| 2^j + \sum_{j=\nu+1}^{n-1} z_j 2^j \leq 2^\nu - 1 + \sum_{j=\nu+1}^{n-1} z_j 2^j \leq \sum_{j=0}^{n-1} z_j 2^j - 1 = m_n - 1.$$

Hilfssatz II. *Für $n = 2^\nu + n'$ $(0 \leq n' < 2^\nu)$ sei*

(1.5) $$a_n = \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),\ a_0 = 1.$$

Dann sind die Partialsummen der Walsh-Reihe

(1.6) $$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

gleichmäßig beschränkt.

Beweis von Hilfssatz II. Es seien $m = 2^s + m'$ $(0 \leq m' < 2^s)$,

(1.7) $$S_m(x) = \sum_{l=0}^{m-1} a_l \psi_l(x) \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$D_n(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \psi_l(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dann auf Grund von (1), (2), (1.5) und (1.7) folgt:

$$S_m(x) = \sum_{l=0}^{2^s-1} a_l \psi_l(x) + \sum_{l'=0}^{m'-1} a_{2^s+l'} \psi_{2^s+l'}(x) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} \sum_{k=0}^{2^\nu-1} \psi_{2^\nu+k}(x) + \frac{(-1)^s}{2^s} \sum_{l'=0}^{m'-1} \psi_{2^s+l'}(x) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{(-1)^\nu}{2^\nu} r_\nu(x) D_{2^\nu}(x) + \frac{(-1)^s}{2^s} r_s(x) D_{m'}(x).$$

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein: es sei

$$e_\nu(x) = \begin{cases} 1 (1/2^{\nu+1} \leqq x < 1/2^\nu), \\ 0 \ (\text{sonst in } [0, 1)) \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$h_\nu(x) = \begin{cases} 1 \ (0 \leqq x < 1/2^\nu), \\ 0 \ (\text{sonst in } [0, 1)) \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da

$$\frac{r_\nu(x) D_{2^\nu}(x)}{2^\nu} = \begin{cases} 1 \ (0 \leqq x < 1/2^{\nu+1}), \\ -1 \ (1/2^{\nu+1} \leqq x < 1/2^\nu), \\ 0 \ (\text{sonst in } [0, 1)) \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt[2], erhalten wir

$$\frac{r_\nu(x) D_{2^\nu}(x)}{2^\nu} = h_{s+1}(x) + \sum_{j=\nu+1}^{s} e_j(x) - e_\nu(x),$$

woraus sich die Gleichung

$$A_s(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu / 2^\nu r_\nu(x) D_{2^\nu}(x) =$$

$$= h_{s+1}(x) \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu - \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu e_\nu(x) + \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu \sum_{j=\nu+1}^{s} e_j(x) =$$

$$= h_{s+1}(x) \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu - \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^\nu e_\nu(x) + \sum_{j=1}^{s} e_j(x) \sum_{\nu=j+1}^{s-1} (-1)^\nu$$

ergibt. Daraus folgt, daß $|A_s(x)| \leqq 3$ ist und da $|D_{m'}(x)| \leqq 2^{s+1}$ gilt, erhalten wir schließlich $|S_m(x)| \leqq 5$ $(x \in [0, 1))$, womit der Hilfssatz II bewiesen ist.

Wir bezeichnen mit

$$S_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \psi_k(x) \qquad \left(c_k = \int_0^1 f(t) \psi_k(t)\, dt \right)$$

die n-te Partialsumme der nach dem System $\{\psi_n(x)\}$ fortschreitenden Fourier-Entwicklung von $f(x)$. Dann gilt

Hilfssatz III. *Es seien*

$$z_\nu = \begin{cases} 1 \ (\nu = 2k), \\ 0 \ (\nu = 2k+1) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$m_n = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu 2^\nu \tag{1.8}$$

und

$$Q_n(x) = \psi_{m_n}(x) \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \psi_k(x). \tag{1.9}$$

[2] Siehe z. B. [2].

Dann bestehen

$$|Q_n(x)| \leq 5 \qquad (x \in [0, 1)) \tag{1.10}$$

und

$$S_{m_n}(0;\, Q_n) \geqq \frac{n}{2}. \tag{1.11}$$

Beweis von Hilfssatz III. Die Behauptung (1.10) folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz II.

Aus (1.8) auf Grund des Hilfssatzes I folgt $F_n^{(0)} \cup F_n^{(1)} = G_n$, $F_n^{(0)} \cap F_n^{(1)} = \emptyset$. Aus (4) und (1.9) erhalten wir weiterhin

$$Q_n(x) = \sum_{k \in G_n} a_k \psi_{m_n \oplus k}(x) = \sum_{k \in F_n^{(1)}} a_k \psi_{m_n \oplus k}(x) + \sum_{k \in F_n^{(0)}} a_k \psi_{m_n \oplus k}(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m_n - 1} a_{l \oplus m_n} \psi_l(x) + \sum_{l=m_n}^{2^n - 1} a_{l \oplus m_n} \psi_l(x),$$

woraus sich mit Berücksichtigung von (1.3) und (1.5)

$$S_{m_n}(0;\, Q_n) = \sum_{l=0}^{m_n - 1} a_{l \oplus m_n} = \sum_{k \in F_n^{(1)}} a_k = \sum_{\substack{\nu \\ 0 \leq \nu \leq n/2}} \sum_{k \in E_{2\nu}} a_k =$$

$$= \sum_{\substack{\nu \\ 0 \leq \nu \leq n/2}} \frac{(-1)^{2\nu}}{2^{2\nu}} \cdot 2^{2\nu} = \sum_{\substack{\nu \\ 0 \leq \nu \leq n/2}} 1 \geqq n/2$$

ergibt.

Damit haben wir den Hilfssatz III bewiesen.

2. Beweis des Satzes

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r_{N_k}(x) Q_{n_k}(x + x_k), \tag{2.1}$$

wo die α_k positive Zahlen, die n_k, N_k natürliche Zahlen bedeuten, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{a)} & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty, \\ \text{b)} & 2^{N_k} + 2^{n_k} - 1 < 2^{N_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ \text{c)} & \alpha_k n_k > \gamma > 0 \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots), \\ \text{d)} & \alpha_k n_k = O(1). \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Wenn z. B. $\alpha_k = k^{-2}$, $n_k = N_k = k^2$ ist, so sind diese Bedingungen erfüllt. Die Punkte x_k werden wir später bestimmen.

Wegen (1.10) und (2.2) a) stellt die Reihe (2.1) eine nach 1 periodische, „(W) stetige" Funktion $F(x)$ dar. Wir behaupten, daß die Partialsummen der Walsh-Fourierreihe $S(F)$ gleichmäßig beschränkt sind. Da auf Grund von (2.2) b) für $2^{N_k}+2^{n_k}<n\leq 2^{N_{k+1}}$

$$S_n(x;\,F)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j r_{N_j}(x)Q_{n_j}(x\dotplus x_j)$$

und für $2^{N_{k+1}}<n\leq 2^{N_{k+1}}+2^{n_{k+1}}$

$$S_n(x;\,F)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j r_{N_j}(x)Q_{n_j}(x+x_j)+R(x)$$

gilt, wo $R(x)$ ein Abschnitt des Walsh-Polynoms $\alpha_{k+1}Q_{n_{k+1}}(x)$ ist, d. h. nach (1.9) und (2.2) d)

$$|R(x)|\leq\alpha_{k+1}\left|1+\sum_{r=0}^{n_{k+1}-1}1\right|=\alpha_{k+1}(n_{k+1}+1)=O(1)$$

gilt, deshalb ist unsere Behauptung richtig.

Auf Grund von (2.1), (2.2) c), und Hilfssatz III läßt sich behaupten, daß man zu jeden x_k eine abgeschlossene Umgebung I_k angeben kann, in welcher

$$|S_{2^{N_k}+m_{n_k}}(x;\,F)-S_{2^{N_k}}(x;\,F)|=\alpha_{n_k}S_{m_{n_k}}(x;Q_{n_k})\geq\frac{\gamma}{2}\qquad(x\in I_k)\tag{2.3}$$

gilt.

Wir zerlegen die Folge $\{n_k\}$ in abzählbar unendlich viele unendliche Folge $\{n_k^{(i)}\}$ $(i=1,2,3,\ldots)$. Dann ordnen wir die dyadischen Intervalle $\left[\frac{s}{2^m},\frac{s+1}{2^m}\right]$ $(m=1,2,\ldots;\,s=0,1,\ldots,2^m-1)$ in eine Reihe $J_1,J_2,\ldots,J_l,\ldots$. Zu jedem l konstruieren wir auf J_l eine perfekte Menge H_l mit Hilfe der Folge $\{n_k^{(l)}\}$. Dazu wählen wir die Punkte $x_{lk}\in J_l$ z. B. so, daß die entsprechenden Intervalle I_{lk} ein dyadisches Schema bilden[3]. Die sämtliche Punkte der so erhaltener perfekten Menge H_l sind in unendlich vielen I_{lk} enthalten. Es ist klar, daß die Menge $H=\bigcup_{l=1}^{\infty}H_l$ in jeden Teilintervall von $[0,1]$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Da die Ungleichung (2.3) in der Punkte von H für unendlich viele k besteht, deshalb divergiert die Walsh-Fourierreihe $S(f)$ in jedem Punkte der Menge H.

Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Fejér, Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*, **28** (1911), 63–103.
[2] N. J. Fine, On the Walsh funktions, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372–414.
[3] G. W. Morgenthaler, On Walsh–Fourier series, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 472–507.
[4] K. Tandori, Bemerkung zur Divergenz der Fourier-reihen stetiger Funktionen, *Publ. Math. Debrecen*, 2 (1952), 191–193.

[3] Wir können z. B. x_{l1}, x_{l2} und x_{l3} derart wählen, daß $I_{l2}, I_{l3}\subset I_{l1}$ und $I_{l2}\cap I_{l3}=0$ ist, x_{l4}, x_{l5}, x_{l6} und x_{l7} derart, daß $I_{l4}, I_{l5}\subset I_{l2}$ und $I_{l6}, I_{l7}\subset I_{l3}$ ferner $I_{l4}\cap I_{l5}=I_{l6}\cap I_{l7}=0$ ist, usw.

ON ORDERED CATEGORIES

By

M. BOGNÁR

Department of Geometry of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received July 10, 1967)

Introduction

In some categories we frequently need the indication of subobjects. This problem appears at first in the papers of MACLANE [4] (1948), [5] (1950). He considers an object A_1 a subobject of A, if there exists an injection $\alpha : A_1 \to A$. Some authors, as e.g. ISBELL, KOWALSKY, MITCHELL, SEMADENI adapted from MACLANE the principal idea of subobjects, but they differ in the definition of the injection. MITCHELL identifies the injections with the monomorphisms [7], with KOWALSKY and SEMADENI the notion of injection is even more general, than that of monomorphism [3,8]. In connection with certain types of categories, namely with categories $\mathcal{A}$ supplied with a covariant faithful functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ — where $\mathcal{S}$ is the category of sets and their maps — MALCEV dealt likewise with the notion of subobjects. He deduces it from the structures of $\mathcal{A}$ and F [6] (1958).

The nearest to our definition stands the inclusion of ISBELL [2] (1957). ISBELL calls class of inclusions a class I of morphisms of a category $\mathcal{A}$, if it satisfies the following conditions:

(1) every identity is in I.
(2) I is closed under composition.
(3) $\alpha = \beta\gamma$ with α and β in I implies γ is in I,
(4) $\alpha\beta = \alpha\gamma$ with α in I implies $\beta = \gamma$,
(5) I contains at most one element with given domain and codomain.

Let two morphisms of I, α and β be called equivalent, if there is a finite chain $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_n = \beta$ such, that for $1 \leq i \leq n-1$, either $\gamma_i = \delta_i\gamma_{i+1}$ or $\gamma_{i+1} = \delta_i\gamma_i$ for some δ_i in I. The last condition pronounces:

(6) Two equivalent morphisms of $\mathcal{A}$ having the same codomain are identical.

ISBELL proved, that if $\mathcal{A}$ is a small category, then the enumerated conditions assure the existence of a covariant faithful functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, which carries each element of I and nothing other into inclusion map. The constructed functor is, however, not always an imbedding, it may eventually carry distinct morphisms into the same map. To make the functor an imbedding it is necessary and sufficient to take a supplementary condition as follows:

(7) If $\alpha : A_1 \to A_2$ and $\beta : A_2 \to A_1$ are two elements of I, then $A_1 = A_2$.

We investigate two types of categories, which will be called regular and normal category. By the first type the supplied condition of ISBELL will be weakened , by the second it will be made stricter. We extend our examination to the categories introduced by MALCEV.

Our aim is to find some common algebraic properties of the restriction of a morphism to a subobject. Thus these definitions and properties will be applicable even if the restrictions are not expressible as restrictions to a subset. This is the case by the category of compact pairs and triads, by the category of diagrams over a scheme, etc.

The definition of a regular category will be given in point **1.** In point **2** we define and discuss the normal categories. Normal is used here in a wholly different sense, than by MITCHELL. In point **3** we investigate a special kind of regular categories, the so called ordinary regular s-category. A sufficient condition will be given to the normality of such a category . Operations, which make from a regular [normal] category other regular [normal] categories will be given in point **4.** Finally point **5** discusses the concept of regular and normal subcategories and that of regular and normal functors.

General Notions

Instead of "if and only if" I use sometimes Halmos' "iff". The end of each proof is indicated by ▌.

The following basic notions and notations are taken from Mitchell's book [7]:

Category, object, morphism, domain, codomain, identity, isomorphism, inverse, monomorphism, small category, subcategory, full subcategory, covariant contravariant and faithful functor, imbedding, diagram, commutative diagram.

We make some complements:

The *domain* of a morphism α of a category $\mathcal{A}$ will be denoted with $\lrcorner(\alpha)$ and its *codomain* with $\triangledown(\alpha)$.

An *ordered class* is a class M with a binary relation $\prec$ satisfying the following conditions:

(1) $a \prec a$ for every $a \in M$.
(2) $a \prec b$ and $b \prec a$ implies $a = b$.
(3) If $a \prec b$ and $b \prec c$, then $a \prec c$.

For $a \prec b$ we say that *a precedes b* or that *b follows a*. We call a the *least* [*greatest*] *member* of M, if it precedes [follows] each element of M. If a least [greatest] member exists, then it is unique.

1. Regular Categories

An *injective category* is a category with at most one morphism from any object to any other object satisfying the following condition:

If $\alpha : A_1 \to A_2$ and $\beta : A_2 \to A_1$ are two morphisms of the category, then $A_1 = A_2$.

$\mathcal{J}$ is an *injective subcategory* of the category $\mathcal{A}$, if it is simultaneously subcategory of $\mathcal{A}$ and injective.

A *regular category* is a category $\mathcal{A}$ with an injective subcategory $\mathcal{J}$, containing each object of $\mathcal{A}$. It will be denoted with $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ or ${}^{+}\mathcal{A}$. We call the objects of $\mathcal{A}$ objects of ${}^{+}\mathcal{A}$, the morphisms of $\mathcal{A}$ morphisms of ${}^{+}\mathcal{A}$. The *class of injections* is defined as the class of morphisms of $\mathcal{J}$.

REMARK 1.1. *There is at most one injection $\alpha : A_2 \to A_1$ from any object A_2 to any object A_1.*▌

Denoting an injection $\alpha : A_2 \to A_1$ with inj_{A_1, A_2} or $\alpha : A_2 \sqsubset A_1$ the injections fulfil obviously the conditions:

1.2. $\mathrm{inj}_{A, A} = 1_A$.▌
1.3. $\mathrm{inj}_{A_1, A_2}\, \mathrm{inj}_{A_2, A_3} = \mathrm{inj}_{A_1, A_3}$.▌

A_2 is a *subobject* of A_1 and A_1 a *superobject* of A_2 — marking this fact with $A_2 \prec A_1$ or with $A_1 \succ A_2$ — if the injection inj_{A_1, A_2} exists in ${}^{+}\mathcal{A}$. The class of objects of ${}^{+}\mathcal{A}$ with the relation $\prec$ becomes an ordered class.

Let D be a diagram in a regular category ${}^{+}\mathcal{A}$ over the scheme Σ. Supposing, that to each arrow m of Σ belongs an injection $D(m)$ of ${}^{+}\mathcal{A}$ we conclude, that by each composite arrow c of Σ, $D(c)$ is an injection and the diagram D is commutative.

For the diagrams in ${}^{+}\mathcal{A}$ over a scheme Σ let us make the following establishment: *if nothing is written to any arrow m of Σ, then $D(m)$ is an injection.*

Let $\alpha : A \to B$ and $\beta : A_1 \to B_1$ be morphisms in ${}^{+}\mathcal{A}$. Be $\beta \prec \alpha$ if $A_1 \prec A$, $B_1 \prec B$ and if the diagram

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B_1 \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

is commutative, that is if $\mathrm{inj}_{B, B_1}\, \beta = \alpha\, \mathrm{inj}_{A, A_1}$. We call β a *submorphism* of α and α a *supermorphism* of β. The class of morphisms of ${}^{+}\mathcal{A}$ with the relation $\prec$ becomes obviously an ordered class.

Let us add some remarks:

1.4. $\mathrm{inj}_{A_1, A_2} \prec \mathrm{inj}_{B_1, B_2}$ *iff A_1 is a subobject of B_1 and A_2 is a subobject of B_2.*▌
1.5. $1_A \prec \mathrm{inj}_{B_1, B_2}$ *is equivalent to* $A \prec B_2$.▌
1.6. $B \prec A$ *is equivalent to* $1_B \prec 1_A$.▌

1.7. *If* $\alpha : A \to B_1$, $\beta : A_1 \to B_1$ and $\gamma : A \to B$ *are morphisms in* ${}^{+}\mathcal{A}$ *and* $A_1 \prec A$, $B_1 \prec B$, *then* $\beta \prec \alpha$ $[\alpha \prec \gamma]$ *is equivalent to* $\beta = \alpha\, \mathrm{inj}_{A, A_1}$ $[\gamma = \mathrm{inj}_{B, B_1}\alpha]$.▌

1.8. *If* α_1 *is a submorphism of* α, β_1 *is a submorphism of* β *and the compositions* $\beta_1\alpha_1$ *and* $\beta\alpha$ *exist, then* $\beta_1\alpha_1$ *is a submorphism of* $\beta\alpha$.▌

2. Normal Categories

Let ${}^{+}\mathcal{A}$ be a regular category, α a morphism in ${}^{+}\mathcal{A}$ and $A_1 \prec I(\alpha)$. Let us denote with (A_1, α) the class of morphisms β with $\beta \prec \alpha$ and $A_1 \prec I(\beta)$. As a subclass of the ordered class of morphisms belonging to ${}^{+}\mathcal{A}$, (A_1, α) itself will be an ordered class.

We say, that α *fulfils the minimum condition rel.* A_1, if (A_1, α) has a least member. Let us denote this least member with $\alpha\|_{A_1}$ and the codomain of $\alpha\|_{A_1}$ with $\alpha(A_1)$. $\alpha\|_{A_1}$ is called the *strong restriction of* α *rel.* A_1.

Let us make some remarks:

2.1. *If* $\beta \prec \alpha$ *and* $A_1 \prec I(\beta)$, *then* $\beta \in (A_1, \alpha)$ *and* $\alpha\|_{A_1} \prec \beta$. This fact is an immediate consequence of the definition of $\alpha\|_{A_1}$ and will be later frequently used.▌

2.2. $\alpha\|_{A_1} \prec \alpha$ *and* $\alpha(A_1) \prec \nabla(\alpha)$.▌

2.3. *If* $\beta \in (A_1, \alpha)$ *then* $\alpha(A_1) \prec \nabla(\beta)$.▌

2.4. $I(\alpha\|_{A_1}) = A_1$. By $\alpha\, \mathrm{inj}_{I(\alpha), A_1} \in (A_1, \alpha)$ is namely $\alpha\|_{A_1} \prec \alpha\, \mathrm{inj}_{I(\alpha), A_1}$, and so $A_1 \prec I(\alpha\|_{A_1}) \prec I(\alpha\, \mathrm{inj}_{I(\alpha), A_1}) = A_1$, that is $A_1 = I(\alpha\|_{A_1})$.▌

2.5. $\alpha\|_{A_1}$ *is a morphism of the type* $\alpha\|_{A_1} : A_1 \to \alpha(A_1)$.▌

A *normal category* ${}^{+}\mathcal{A}$ is defined as a regular category satisfying the following conditions:

(i) Every morphism α of ${}^{+}\mathcal{A}$ fulfils the minimum condition rel. A_1 at all A_1 with $A_1 \prec I(\alpha)$.
(ii) For each object A of ${}^{+}\mathcal{A}$ it holds, that $1_A\|_A = 1_A$.
(iii) If the composition $\beta\alpha$ of the morphisms α and β belonging to ${}^{+}\mathcal{A}$ exists, and if $A_1 \prec I(\alpha)$, then $(\beta\alpha)\|_{A_1} = \beta\|_{\alpha(A_1)}\alpha\|_{A_1}$.

In the following ${}^{+}\mathcal{A}$ will always be in this point a normal category. Let us consider some properties of ${}^{+}\mathcal{A}$:

PROPOSITION 2.6. *Suppose, that* $\alpha : A \to B$ *is a morphism and* A_1, A_2 *objects with* $A_2 \prec A_1 \prec A$ *in* ${}^{+}\mathcal{A}$. *Then* $\alpha\|_{A_2} \prec \alpha\|_{A_1}$ *and* $\alpha(A_2) \prec \alpha(A_1)$.

PROOF. Since by 2.2. and 2.4. it is true, that $\alpha\|_{A_1} \prec \alpha$ and $A_2 \prec A_1 = I(\alpha\|_{A_1})$, consequently by 2.1. it holds, that $\alpha\|_{A_2} \prec \alpha\|_{A_1}$. Therefore $\alpha(A_2) = \nabla(\alpha\|_{A_2}) \prec \nabla(\alpha\|_{A_1}) = \alpha(A_1)$.▌

PROPOSITION 2.7. *Let* $\alpha : A \to B$ *and* $\beta : A_1 \to B_1$ *be two morphisms in* ${}^{+}\mathcal{A}$ *with* $\beta \prec \alpha$. *Let* A_2 *be an object and suppose that* $A_2 \prec A_1$. *Then* $\alpha\|_{A_2} = \beta\|_{A_2}$ *and consequently* $\alpha(A_2) = \beta(A_2)$.

PROOF. By $\beta\|_{A_2} \prec \beta \prec \alpha$ and $A_2 \prec A_2 = I(\beta\|_{A_2})$ is according to 2.1.

(1) $\alpha\|_{A_2} \prec \beta\|_{A_2}$.

That means $\alpha\|_{A_2} \prec \beta$. From this last statement it follows by $A_2 \prec A_2 = \mathcal{J}(\alpha\|_{A_2})$ and 2.1.

(2) $\beta\|_{A_2} \prec \alpha\|_{A_2}$.

Statements (1) and (2) gives the proof of our proposition.▌

PROPOSITION 2.8. *Let $\alpha : A \to B$ be a morphism and A_1, A_2 objects in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$. Suppose, that $A_2 \prec A_1 \prec A$. Then $(\alpha\|_{A_1})\|_{A_2} = \alpha\|_{A_2}$.*

PROOF. The proposition is a trivial consequence of the proposition 2.7. and of the fact, that $\alpha\|_{A_1} \prec \alpha$.▌

PROPOSITION 2.9. *Let $\alpha : A \to B$ and $\beta : A \to B$ be two morphisms of ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ with $\alpha\|_A = \beta\|_A$. Then $\alpha = \beta$.*

PROOF. Marking $\alpha\|_A = \beta\|_A$ as γ and $\nabla(\gamma)$ as B_1, γ precedes α and β and so by 1.7. $\alpha = \beta = \mathrm{inj}_{B, B_1}\gamma$.▌

PROPOSITION 2.10. *Let $\alpha : A \to B$ and $\beta : A \to B$ be two morphisms in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$. Suppose, that they have a common supermorphism γ in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$. Then $\alpha = \beta$.*

PROOF. From proposition 2.7. by $\alpha \prec \gamma$ and $\beta \prec \gamma$ it follows the statement $\alpha\|_A = \gamma\|_A = \beta\|_A$, and so by 2.9. also $\alpha = \beta$.▌

PROPOSITION 2.11. *Let $\alpha : A \to B$ be a morphism and A_1, B_1 objects in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ satisfying the conditions $A_1 \prec A$ and $\alpha(A_1) \prec B_1 \prec B$. Then there exists a morphism $\beta : A_1 \to B_1$ in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ which is a submorphism of α. This morphism β is unique, namely $\beta = \mathrm{inj}_{B_1, \alpha(A_1)}\, \alpha\|_{A_1}$.*

PROOF. Since $\alpha\|_{A_1} \prec \alpha$ and $\mathrm{inj}_{B, \alpha(A_1)} = \mathrm{inj}_{B, B_1}\mathrm{inj}_{B_1, \alpha(A_1)}$ the diagram

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\|_{A_1}"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
\alpha(A_1) \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

must be commutative. Hence $\mathrm{inj}_{B_1, \alpha(A_1)}\, \alpha\|_{A_1} \prec \alpha$.

Thus we have shown the existence of β. The uniqueness of β follows from 2.10.▌

Let us denote β with $\alpha|_{A_1, B_1}$. The morphism $\alpha|_{A_1, B_1}$ will be called the *restriction of α rel. A_1, B_1*. If $B_1 = B$, then $\alpha|_{A_1}$ will be used instead of $\alpha|_{A_1, B}$. $\alpha|_{A_1}$ is the *weak restriction of α rel A_1*. The commutativity of the above diagram involves $\alpha|_{A_1} = \alpha\, \mathrm{inj}_{A, A_1}$.

Assuming only the regularity of ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$, we can find in this case also to each morphism $\alpha : A \to B$ of ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ and to each object A_1 with $A_1 \prec A$ a unique morphism $\beta : A_1 \to B$ with $\beta \prec \alpha$. β is here likewise $\alpha\, \mathrm{inj}_{A, A_1}$. Therefore the sign $\beta = \alpha|_{A_1}$ is correct in regular categories as well.

On the other hand we remark as a trivial consequence of 1.7. that for some $\alpha : A \to B$ of ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ it is true, that $\alpha = \mathrm{inj}_{B, \alpha(A)}\, \alpha\|_A$.

PROPOSITION 2.12. *In the normal categories the injections are monomorphisms.*

PROOF. Given an injection inj_{B,B_1} in ${}^+c\mathcal{A}$. Let $\alpha : A \to B_1$ and $\beta : A \to B_1$ be two morphisms in ${}^+c\mathcal{A}$ satisfying the condition $\mathrm{inj}_{B,B_1}\alpha = \mathrm{inj}_{B,B_1}\beta$. Denoting $\mathrm{inj}_{B,B_1}\alpha = \mathrm{inj}_{B,B_1}\beta$ with γ we obtain $\alpha \prec \gamma$ and $\beta \prec \gamma$, and so by 2.10. $\alpha = \beta$. Consequently inj_{B,B_1} is a monomorphism.∎

PROPOSITION 2.13. *Let $\alpha : A_1 \to B_1$ and $\beta : A_2 \to B_2$ be two morphisms in ${}^+c\mathcal{A}$ with a common supermorphism $\gamma : A \to B$. Suppose, that $A_2 \prec A_1$ and $B_2 \prec B_1$. Then $\beta \prec \alpha$.*

PROOF. Consider the diagram

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta"'] & & A_1 \arrow[dl] \arrow[dd, "\alpha"] \\
& A \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dl, phantom, "II"] \arrow[dr, phantom, "I"] & \\
& B \arrow[dl, phantom, "III"] \arrow[dr, phantom, "IV"] & \\
B_2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & B_1 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

According to our assumption and by 1.3. the subdiagrams framing the domains I, II, III and IV are commutative. Therefore $\mathrm{inj}_{B,B_1}\alpha\,\mathrm{inj}_{A_1,A_2} = \gamma\,\mathrm{inj}_{A,A_1}\mathrm{inj}_{A_1,A_2} = \gamma\,\mathrm{inj}_{A,A_2} = \mathrm{inj}_{B,B_2}\beta = \mathrm{inj}_{B,B_1}\,\mathrm{inj}_{B_1,B_2}\beta$.

inj_{B,B_1} being a monomorphism (See 2.12.) it follows from this last formula $\alpha\,\mathrm{inj}_{A_1,A_2} = \mathrm{inj}_{B_1,B_2}\beta$, that is $\beta \prec \alpha$.∎

We obtain as a direct consequence of this last proposition, that by any morphism α of ${}^+c\mathcal{A}$, $\alpha|_{A_2,B_2} \prec \alpha|_{A_1,B_1}$ holds iff $A_2 \prec A_1$ and $B_2 \prec B_1$.

PROPOSITION 2.14. *Let $\alpha : A \to B$ and $\beta : A \to B$ be morphisms in ${}^+\mathcal{A}$. Suppose the existence of a chain of morphisms $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ and a chain of injections $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ of ${}^+\mathcal{A}$ satisfying the conditions $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_k$ and $\gamma_i = \delta_i\gamma_{i+1}$ or $\gamma_{i+1} = \delta_i\gamma_i$ for $i = 1, \ldots, k-1$. Then $\alpha = \beta$.*

PROOF. $\gamma_i = \delta_i\gamma_{i+1}$ implies by 1.7. $\gamma_{i+1} \prec \gamma_i$ and $\gamma_{i+1} = \delta_i\gamma_i$ implies $\gamma_i \prec \gamma_{i+1}$ respectively. In both cases $\gamma_i\|_A = \gamma_{i+1}\|_A$ (See. 2.7.).

That is $\alpha\|_A = \beta\|_A$ and so by 2.9. $\alpha = \beta$.∎

Let us mention, that from the normality of ${}^+\mathcal{A}$ we have used till now only condition (i). In the following we need condition (ii) and condition (iii) as well.

PROPOSITION 2.15. *Let α be an injection and A an object in ${}^+c\mathcal{A}$ with $A \prec A(\alpha)$. Then $\alpha\|_A = 1_A$ and so $\alpha(A) = A$.*

PROOF. By 1.5. it is $1_A \prec \alpha$, consequently by 2.7. and (ii) $\alpha\|_A = 1_A\|_A = 1_A$.∎

COROLLARY 2.16. *If $\alpha = 1_B = \mathrm{inj}_{B,B}$ and $A \prec B$, then $1_B\|_A = 1_A$, and so $\alpha(A) = A$.*∎

PROPOSITION 2.17. *Each submorphism of an injection is an injection in* ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$.

PROOF. Given an injection α and a submorphism $\beta : A \to B$ of α, then by 2.7. and 2.15. $\beta\|_A = \alpha\|_A = 1_A$, furthermore by 1.7. $\beta\|_A \prec \beta$ implies $\beta = \mathrm{inj}_{B,\beta(A)}\beta\|_A = \mathrm{inj}_{B,A}1_A = \mathrm{inj}_{B,A}$.▌

PROPOSITION 2.18. *Let α, β, γ be three morphisms of ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ with $\alpha = \beta\gamma$. Suppose, that α and β are injections. Then γ is similarly an injection.*

PROOF. Because $\gamma \prec \alpha$ (See 1.7.) the proposition is an immediate consequence of 2.17.▌

THEOREM 2.19. *The class of injections of a normal category ${}^{+}_{c}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{I})$ satisfies the conditions of Isbell* (See the introduction).

PROOF. (1) is a consequence of 1.2., (2) of 1.3., (3) of 2.18., (4) of 2.12., (5) of 1.1. and (6) of 2.14.▌

PROPOSITION 2.20. *Let $\alpha : A \to B$ and $\beta : B \to C$ be two morphisms in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$ and A_1 an object with $A_1 \prec A$. Then $(\beta\alpha)(A_1) = \beta(\alpha(A_1))$.*

PROOF. By (iii) is $(\beta\alpha)(A_1) = \nabla((\beta\alpha)\|_{A_1}) = \nabla(\beta\|_{\alpha(A_1)}\alpha\|_{A_1}) = \nabla(\beta\|_{\alpha(A_1)}) = \beta(\alpha(A_1))$.▌

PROPOSITION 2.21. *Be $\alpha : A \to B$ an isomorphism and A_1 a subobject of A in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$. Then we can show, that $\alpha^{-1}(\alpha(A_1)) = A_1$ and that $\alpha\|_{A_1}$ is also an isomorphism.*

PROOF. From $\alpha^{-1}\alpha = 1_A$ it follows by 2.15., 2.20. and (iii)

(1) $$\alpha^{-1}\|_{\alpha(A_1)}\alpha\|_{A_1} = 1_A\|_{A_1} = 1_{A_1} \text{ and}$$

(2) $$\alpha^{-1}(\alpha(A_1)) = A_1.$$

Furthermore from $\alpha\alpha^{-1} = 1_B$ it follows by (2) (iii) and 2.15.

(3) $$\alpha\|_{A_1}\alpha^{-1}\|_{\alpha(A_1)} = \alpha\|_{\alpha^{-1}(\alpha(A_1))}\alpha^{-1}\|_{\alpha(A_1)} = 1_B\|_{\alpha(A_1)} = 1_{\alpha(A_1)}.$$

(1) and (3) implie the isomorphism of $\alpha\|_{A_1}$.▌

Obviously $(\alpha\|_{A_1})^{-1} = \alpha^{-1}\|_{\alpha(A_1)}$.

PROPOSITION 2.22. *If $\alpha : A \to B$ is an isomorphism in ${}^{+}_{c}\mathcal{A}$, then $B = \alpha(A)$ and $\alpha\|_A = \alpha$.*

PROOF. From $\alpha\alpha^{-1} = 1_B$ it follows by 2.21., that

(1) $$\alpha(\alpha^{-1}(B)) = 1_B(B) = B.$$

$\nabla(\alpha^{-1}) = A$ implies by 2.3. $\alpha^{-1}(B) \prec A$ and so by (1) and 2.6.

(2) $$B = \alpha(\alpha^{-1}(B)) \prec \alpha(A).$$

On the other hand $\nabla(\alpha) = B$ involves

(3) $$\alpha(A) \prec B.$$

As a consequence of (2) and (3) we obtain $\alpha(A) = B$. Finally from $\alpha\|_A : A \to \alpha(A)$, $\alpha : A \to (B = \alpha(A))$ and $\alpha\|_A \prec \alpha$ it follows by 2.10., that $\alpha\|_A = \alpha$.▌

3. s-Categories

Let us consider a class $\mathcal{A}$ with elements of two types. The elements of the first type — the objects — are ordered pairs $A = (M, N)$, where the first member of a pair is a nonvoid set. The second member indicates a structure on the first. If e.g. A is a topological space, then N is a family of subsets of M, satisfying the axioms of open sets. If A is a group, then N is a subset of $M \times M \times M$ etc. The first member of A is the *basic set of* A and will be denoted by $|A|$.

The elements of the second type — the morphisms — are ordered triples $\alpha = (B, f, A)$ where A and B are objects and f is a mapping of the set $|A|$ in the set $|B|$. The morphism $\alpha = (B, f, A)$ has the domain A and the codomain B. f is the *basic mapping of* α and will be denoted by $|\alpha|$.

The composition $\beta\alpha$ of two morphisms $\alpha = (B, f, A)$ and $\beta = (C, g, B)$ is defined by $\beta\alpha = (C, gf, A)$.

The fulfilling of the following conditions shall be required:

(i) For any two distinct objects $A = (M, N)$ and $A' = (M', N')$ of $\mathcal{A}$ is valid, that $N \neq N'$.

(ii) If the composition $\beta\alpha$ of two morphisms α, β of $\mathcal{A}$ is defined, so belongs $\beta\alpha$ to $\mathcal{A}$.

(iii) With each object A of $\mathcal{A}$ the morphism $(A, 1_{|A|}, A)$ belongs also to $\mathcal{A}$. (where $1_{|A|}$ is the identical mapping of the set $|A|$).

The class $\mathcal{A}$ regulated by this composition law and satisfying the preceeding rules is a category. We call these categories *s-categories*.

Let us take some examples for s-categories:

1. The category $\mathcal{S}$ of nonvoid sets and of mappings between the sets. Hence the objects are of the type $A = (M, M)$.

2. The category $\mathcal{T}$ of nonvoid topological spaces and the continous mappings between them.

3. The category $\mathcal{T}_c$ of nonvoid compact Hausdorff spaces and their continous mappings. This is a full subcategory of $\mathcal{T}$.

4. The category $\mathcal{M}$ of nonvoid metric spaces and their continous mappings.

5. The category $\mathcal{A}b$ of Abelian groups and their homomorphisms.

Some remarks:

Let $\mathcal{A}$ be an s-category.

3.1. *For each object A of $\mathcal{A}$ is $1_A = (A, 1_{|A|}, A)$.*▮

3.2. *Suppose the existence of the composition $\beta\alpha$ of the morphisms α, β belonging to $\mathcal{A}$. Then $|\beta\alpha| = |\beta||\alpha|$.*▮

3.3. *For each morphism $\alpha : A \to B$ of $\mathcal{A}$ it is true, that $|\alpha| : |A| \to |B|$.*▮

3.4. *If the basic map $|\alpha|$ of a morphism α of $\mathcal{A}$ is a monomorphic [epimorphic] mapping, then α is a monomorphism [epimorphism].*▮

3.5. *If α is an isomorphism in $\mathcal{A}$, then $|\alpha|$ is one to one mapping and $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$.*▮

Let us take now a category $\mathcal{A}$ provided with a covariant faithful functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$. Then the category $\mathcal{A}' = \Phi(\mathcal{A}, F)$ with objects $T(A) = (|F(A)|, A)$ and with morphisms

$$T(\alpha) = ((|F(\nabla(\alpha))|, \nabla(\alpha)), |F(\alpha)|, (|F(\Delta(\alpha))|, \Delta(\alpha))),$$

where A runs through the objects of $\mathcal{A}$ and α through the morphisms of $\mathcal{A}$ is obviously an s-category, and $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ is an isomorphic covariant functor. On the other hand to every s-category $\mathcal{A}'$ we can find a category $\mathcal{A}$ and a covariant faithful functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ such that $\mathcal{A}'$ will be identical with $\Phi(\mathcal{A}, F)$.

Thus the original concept of the s-categories may be replaced by the following:

An s-category is a category $\mathcal{A}$ provided with a covariant faithful functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$.

Let us call two objects A, B in an s-category *equivalent*, if $|A| = |B|$ and if the morphisms $(B, 1_A, A)$ and $(A, 1_B, B)$ belong to $\mathcal{A}$. An s-category $\mathcal{A}$ is *irreductible*, if from the equivalence of two objects it follows their equality. The s-categories $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ and $\mathcal{G}$ are irreductible, but $\mathcal{M}$ is not irreductible.

At non irreductible s-categories MALCEV considers two equivalent objects as equal [6]. In such manner we can get in a natural way a factorisation, and the factor category will be an irreductible s-category. Thus we obtain from the category $\mathcal{M}$ the category of the nonvoid metrizable topological spaces and their continous mappings.

An *ordinary injective s-category* $\mathcal{J}$ is defined as an s-category, which is injective and satisfies the following condition: if $\alpha = (B, f, A)$ is a morphism of $\mathcal{J}$, then $|A|$ is a subset of $|B|$ and $|\alpha| = f = \mathrm{inj}_{|B|,|A|}$ (where $\mathrm{inj}_{|B|,|A|}$ is the injective mapping of the set $|A|$ into the set $|B|$). An *ordinary regular s-category* is a pair ${}^{+}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{J})$ where ${}^{+}\mathcal{A}$ is a regular category, $\mathcal{A}$ an s-category and $\mathcal{J}$ an ordinary injective s-category.

Let us mention, that *if $\mathcal{A}$ is an s-category, then we can transforme it into an ordinary regular s-category, taking an order on the class of objects belonging to $\mathcal{A}$ satisfying the condition: if $A < B$ then $|A| \subset |B|$ and $(B, \mathrm{inj}_{|B|,|A|}, A)$ is a morphism in $\mathcal{A}$. In that case the class of injections of ${}^{+}\mathcal{A}$ consists of the morphisms $(B, \mathrm{inj}_{|B|,|A|}, A)$ of $\mathcal{A}$ with $A < B$.*

Whenever $\mathcal{A}$ is an irreductible s-category, and the class of morphisms of $\mathcal{J}$ is equal to the class of all morphisms of the type $(B, \mathrm{inj}_{|B|,|A|}, A)$ of $\mathcal{A}$, then ${}^{+}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{J})$ will be a regular s-category. This regular s-category is called the *full ordinary regular s-category belonging to* $\mathcal{A}$. We denote the full ordinary regular s-categories belonging to $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_c$ and $\mathcal{G}$ with ${}^{+}\mathcal{S}$, ${}^{+}\mathcal{T}$, ${}^{+}\mathcal{T}_c$, ${}^{+}\mathcal{G}$ respectively.

${}^{+}\mathcal{T}$ is obviously not the only ordinary regular s-category of the type $(\mathcal{T}, \mathcal{J})$. E.g. taking $A < B$ if A is a subspace, [closed or open subspace] of B, we obtain the ordinary regular s-categories ${}^{+}\mathcal{T}^{*}$, $[{}^{+}\mathcal{T}^{**}, {}^{+}\mathcal{T}^{***}]$ differing from each other and from ${}^{+}\mathcal{T}$.

Ordered s-categories have been investigated the first time by MALCEV [6]. He introduced the order to the class of objects by a deduction from the structure of the s-category. This definition applies also to non irreductible s-categories, but is different from the idea of the full ordinary regular s-categories, belonging to an s-category. SEMADENI proceeded in a similar way [8]. He dealt with subcategories of $\mathcal{S}$, and observed, that by the indication of the subobjects one has to count with the possibility of more variations.

It is easy to prove, that *an ordinary regular s-category ${}^{+}\mathcal{A}$ is a normal s-category, if*

(1) *for each triple of objects* A, A_1, A_2 *with* $A_1 \prec A$, $A_2 \prec A$ *and* $|A_2| \subseteq |A_1|$ *the relation* $A_2 \prec A_1$ *holds.*

(2) *to every morphism* $\alpha = (B, f, A)$ *and to each object* A_1 *with* $A_1 \prec A$ *we can find an object* B_1 *in* ${}^{+}\mathcal{A}$ *with* $B_1 \prec B$, $|B_1| = f(|A_1|)$ *and for which* $\beta = (B_1, f\|_{|A_1|}, A_1)$ *is a morphism in* ${}^{+}\mathcal{A}$. ($f\|_{|A_1|}$ is the restriction of the map f to the sets $|A_1|$ and $|B_1|$.)

The categories ${}^{+}\mathcal{S}$, ${}^{+}\mathcal{T}_c$, ${}^{+}\mathcal{A}_l$, ${}^{+}\mathcal{T}^*$ satisfie the conditions (1) and (2), consequently they are normal. An ordinary regular s-category doesn't need, however, conditions (1) and (2) to be a normal category. The category ${}^{+}\mathcal{T}$ doesn't satisfy (1) and ${}^{+}\mathcal{T}^{**}$ doesn't satisfy (2), but they are still normal. The category ${}^{+}\mathcal{T}^{***}$ satisfies (1) but (2) not. This category is not normal.

4. Extended and Product Categories. Categories of Diagrams

Suppose, that the empty set doesn't belong to the objects or morphisms of the category $\mathcal{A}$. Let us extend $\mathcal{A}$ to a category $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \dot{+} 0$ in the following way:

The objects of $\mathcal{A}'$ are the objects of $\mathcal{A}$ and the empty set $\emptyset$. The morphisms of $\mathcal{A}'$ are the morphisms of $\mathcal{A}$, and the symbols $\square$ and $(A, \emptyset)$, where A runs through the objects of $\mathcal{A}$. The domain and codomain of $\square$ is $\emptyset$, the domain of any $(A, \emptyset)$ is $\emptyset$ and its codomain is A. The composition of the morphisms belonging to $\mathcal{A}$ is the same as in $\mathcal{A}$. Moreover be $\square\square = \square$, $(A, \emptyset)\square = (A, \emptyset)$ and for $\alpha : A \to B$, $\alpha(A, \emptyset) = (B, \emptyset)$.

Suppose, that for a regular category ${}^{+}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{F})$ the empty set doesn't belong to $\mathcal{A}$. Let $\mathcal{A}'$ be $\mathcal{A} \dot{+} 0$ and $\mathcal{F}'$ be $\mathcal{F} \dot{+} 0$. Then ${}^{+}\mathcal{A}' = (\mathcal{A}', \mathcal{F}')$ is likewise a regular category. It is an *extended category, the extension of* ${}^{+}\mathcal{A}$ *by the empty set.* If ${}^{+}\mathcal{A}$ is normal, then ${}^{+}\mathcal{A}'$ is also normal. Obviously in this case $(A, \emptyset)\|_{\emptyset} = \square$, and for any morphism $\alpha : A \to B$ of ${}^{+}\mathcal{A}$ it is $\alpha\|_{\emptyset} = \square$. We can obtain in this way from the normal categories ${}^{+}\mathcal{S}$, ${}^{+}\mathcal{T}_c$ and ${}^{+}\mathcal{T}^*$ the normal categories ${}^{+}\mathcal{S}'$, ${}^{+}\mathcal{T}'_c$, ${}^{+}\mathcal{T}^{*\prime}$.

Let ${}^{+}\mathcal{A}$ be a regular category and M a finite ordered set with the elements $a_1, \ldots, a_k$. We form the *product category* ${}^{+}\mathcal{A}^M$ *of* ${}^{+}\mathcal{A}$ *with the exponent* M as follows:

The objects of ${}^{+}\mathcal{A}^M$ are the couples $(A_1, \ldots, A_k)$ of objects in ${}^{+}\mathcal{A}$ satisfying the condition: if $a_i \prec a_j$ then $A_i \prec A_j$. The morphisms of ${}^{+}\mathcal{A}^M$ are the couples $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ of morphisms belonging to ${}^{+}\mathcal{A}$ satisfying the condition: if $a_i \prec a_j$ then $\alpha_i \prec \alpha_j$. The domain of a morphism $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ is $(\Delta(\alpha_1), \ldots, \Delta(\alpha_k))$ and its codomain is $(\nabla(\alpha_1), \ldots, \nabla(\alpha_k))$. The composition $(\beta_1, \ldots, \beta_k)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ of the morphisms in ${}^{+}\mathcal{A}^M$ is defined, if $\beta_i\alpha_i$ is defined for $i = 1, \ldots, k$, and then

$$(\beta_1, \ldots, \beta_k)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (\beta_1\alpha_1, \ldots, \beta_k\alpha_k).$$

The coordinates of an object $G = (A_1, \ldots, A_k)$ [of a morphism $\zeta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$] of ${}^{+}\mathcal{A}^M$ are $A_1, \ldots, A_k$ [$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$]. We introduce the signification ${}^{i}G$ for A_i and ${}^{i}\zeta$ for α_i.

The injections in ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$ are defined as morphisms each of whose coordinate is an injection in ${}^{+}\mathcal{A}$. In such manner ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$ becomes a regular category. If ${}^{+}\mathcal{A}$ is normal, then ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$ is also normal.

Suppose, that ${}^{+}\mathcal{A}$ is normal, and that M has a greatest element, namely a_1. Let $G = (A_1, \ldots, A_k)$ and $H = (B_1, \ldots, B_k)$ be two objects of ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$ and $\alpha : A_1 \to B_1$ a morphism in ${}^{+}\mathcal{A}$. We can look for a necessary and sufficient condition for the existence of a morphism $\zeta : G \to H$ in ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$ with ${}^{1}\zeta = \alpha$. This condition is naturally the accomplishment of the formula $\alpha(A_i) \prec B_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. We can take namely in this case $\alpha_i = \alpha|_{A_i, B_i}$, and so by 2.13 $\zeta = (\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k) : G \to H$ is a morphism in ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$. This morphism $\zeta : G \to H$ with ${}^{1}\zeta = \alpha$ is, however, unique. We can denote it with α^{M}.

Let us see some examples for ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$:

1. Suppose M is linearly ordered such, that $a_k \prec \ldots \prec a_2 \prec a_1$. Then we denote also ${}^{+}\mathcal{A}^{k}$ instead of ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$. If $k = 2$, then we obtain the *category of* ${}^{+}\mathcal{A}$ *pairs*, if $k = 3$, then the *category of* ${}^{+}\mathcal{A}$ *triples*. Is ${}^{+}\mathcal{A} = {}^{+}\mathcal{T}'_c$, so is ${}^{+}\mathcal{A}^2 = {}^{+}\mathcal{T}'^{2}_c$ the *normal category of compact pairs* and ${}^{+}\mathcal{A}^3 = {}^{+}\mathcal{T}'^{3}_c$ that of *compact triples*.

2. Let M be an ordered set having three elements a_1, a_2, a_3 with the order $a_1 \prec a_1$, $a_2 \prec a_2$, $a_3 \prec a_3$, $a_2 \prec a_1$ and $a_3 \prec a_1$. We call then ${}^{+}\mathcal{A}^{M}$ the *category of* ${}^{+}\mathcal{A}$ *triads* and denote it with ${}^{+}\mathcal{A}^{tr}$. ${}^{+}\mathcal{T}'^{tr}_c$ is the *normal category of compact triads*.

The category of compact pairs, triples and triads play an important role in the axiomatic foundation of the algebraic topology (See [1]).

Finally we make a short remark concerning the categories of diagrams.

Let $\Sigma = (I, M, d)$ be a diagram scheme and ${}^{+}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{J})$ a regular category. We transform the diagram category $[\Sigma, \mathcal{A}]$ into a regular category $[\Sigma, {}^{+}\mathcal{A}]$ by defining a morphism $\{\alpha_i : A_i \to B_i; i \in I\}$ of $[\Sigma, \mathcal{A}]$ as an injection, iff for each i, α_i is an injection in ${}^{+}\mathcal{A}$. It is easy to prove, that from the normality of ${}^{+}\mathcal{A}$ it follows the normality of $[\Sigma, {}^{+}\mathcal{A}]$.

5. Regular and Normal Subcategories. Regular and Normal Functors

A regular category ${}^{+}\mathcal{A}' = (\mathcal{A}', \mathcal{J}')$ is *regular subcategory* of the regular category ${}^{+}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{J})$ if $\mathcal{A}'$ is a subcategory of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{J}'$ is the intersection of $\mathcal{A}'$ and $\mathcal{J}$. Hence the injections in ${}^{+}\mathcal{A}'$ are those injections of ${}^{+}\mathcal{A}$ which belong to ${}^{+}\mathcal{A}'$. Consequently for two objects A_1, A_2 of ${}^{+}\mathcal{A}'$ the object A_2 is a subobject of A_1 iff A_2 is a subobject of A_1 in ${}^{+}\mathcal{A}$.

Let ${}^{+}\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{J})$ be a normal category. A regular category ${}^{+}\mathcal{A}' = (\mathcal{A}', \mathcal{J}')$ is a *normal subcategory* of ${}^{+}\mathcal{A}$, if it is a regular subcategory of ${}^{+}\mathcal{A}$ satisfying the following condition:

for every morphism $\alpha : A \to B$ of ${}^{+}\mathcal{A}'$ and for each object A_1 of ${}^{+}\mathcal{A}'$ with $A_1 \prec A$ the morphism $\alpha\|_{A_1}$ belongs to ${}^{+}\mathcal{A}'$.

If ${}^{+}\mathcal{A}'$ is a normal subcategory of ${}^{+}\mathcal{A}$ then ${}^{+}\mathcal{A}'$ itself is normal, and the restrictions in ${}^{+}\mathcal{A}'$ are the same as in ${}^{+}\mathcal{A}$. But it may happen, that ${}^{+}\mathcal{A}$ is a normal category, it is a regular subcategory of ${}^{+}\mathcal{A}$, but not a normal subcategory of ${}^{+}\mathcal{A}$.

Let ${}^{\tau}\mathcal{A} = ({}_{c}\mathcal{A}, \mathcal{J})$ and ${}^{+}\bar{\mathcal{A}} = ({}_{c}\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{J}})$ be regular categories and $F : {}_{c}\mathcal{A} \to {}_{c}\bar{\mathcal{A}}$ a covariant or contravariant functor. The functor F will be called a *regular covariant* [*contravariant*] *functor* and denoted with $F : {}^{\tau}\mathcal{A} \to {}^{+}\bar{\mathcal{A}}$ if injections are carried by F into injections.

The covariant regular functor $F : {}^{\tau}\mathcal{A} \to {}^{\tau}\bar{\mathcal{A}}$ is *normal*, if ${}^{\tau}\mathcal{A}$ and ${}^{\tau}\bar{\mathcal{A}}$ are normal categories and if for each morphism $\alpha : A \to B$ of ${}^{+}\mathcal{A}$ and each subobject A_1 of A

$$F(\alpha_{A_1}) = F(\alpha)_{F(A_1)}.$$

Let us see e.g. the normal categories ${}^{\tau}\mathcal{T}_{c}^{tr}$ and ${}^{+}\mathcal{T}_{c}^{t2}$. Let us define the functors $F^1 : {}^{\tau}\mathcal{T}_{c}^{tr} \to {}^{\tau}\mathcal{T}_{c}^{t2}$ and $F^2 : {}^{\tau}\mathcal{T}_{c}^{tr} \to {}^{\tau}\mathcal{T}_{c}^{t2}$ as follows: the object (A_1, A_2, A_3) of ${}^{+}\mathcal{T}_{c}^{tr}$ is carried by F^1 into $(A_1, A_2 \cap A_3)$ and by F^2 into $(A_1, A_2 \cup A_3)$,[1] the morphism $\zeta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (A_1, A_2, A_3) \to (B_1, B_2, B_3)$ of ${}^{\tau}\mathcal{T}_{c}^{tr}$ is carried by F^1 into the morphism

[1] A_2, A_3 are subcompacts of the compact A_1, therefore there exists a greatest common subobject $A_2 \cap A_3$ and a least common superobject $A_2 \cup A_3$ of A_2 and A_3 in ${}^{\tau}\mathcal{T}_{c}$. $A_2 \cap A_3$ is the intersection space of the two subspaces A_2, A_3 or the empty set, $A_2 \cup A_3$ is the union space of A_2 and A_3.

$$(\alpha_1, \alpha_{1\,A_2 \cap A_3}, B_{2 \cap B_3}) : (A_1, A_2 \cap A_3) \to (B_1, B_2 \cap B_3)$$

and by F^2 into

$$(\alpha_1, \alpha_{1\,A_2 \cup A_3}, B_{2 \cup B_3}) : (A_1, A_2 \cup A_3) \to (B_1, B_2 \cup B_3).$$

F^1 and F^2 are regular covariant functors. F^2 is normal, but F^1 is not normal.

References

[1] Eilenberg, S. and Steenrod, N., *Foundations of algebraic topology*, University Press, Princeton, 1952.

[2] Isbell, J. R., Some remarks concerning categories and subspaces, *Canadian J. Math.*, **9** (1957), 563–577.

[3] Kowalsky, H. J., Kategorien topologischer Räume, *Math. Z.*, **77** (1961), 249–272.

[4] MacLane, S., Groups, categories, and duality, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, **34** (1948), 263–267.

[5] MacLane, S., Duality for groups, *Bull. Am. Math. Soc.*, **56** (1950), 485–516.

[6] Мальцев, А. И., Определяющие соотношения в категориях, *Доклады Академии Наук СССР.*, **119** (1958), 1095–1098.

[7] Mitchell, B., *Theory of categories*, Academic Press, New York and London, 1965.

[8] Semadeni, Z., Projectivity, injectivity, and duality, *Rozprawy Matematiczne*, **35** (1963), 1–46.

STATISTICAL THEOREMS FOR THE NUMBER OF PRIME FACTORS OF INTEGERS

By

I. KÁTAI

Department of Algebra and Theory of Numbers, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received September 11, 1967)

1. Notations

(1.1) The letters $p, q, p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ denote prime numbers.

(1.2) $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \delta, \delta_1, \ldots$ denote arbitrary sufficiently small positive constants.

(1.3) For the sake of brevity let $x_1 = \log x, x_2 = \log\log x$.

(1.4) $U(n)$ denote the number of different prime factors of n.

(1.5) $d(n)$ denote the number of divisors of n.

$$R(x, c_1, c_2) = \sum_{n \le x} c_1^{U(n)} c_2^{U(n+1)}, \tag{1.6}$$

$$D(x) = \sum_{n \le x} d(n), \tag{1.7}$$

$$D^+(x) = \sum_{n \le x} \max\,(d(n), d(n+1)), \tag{1.8}$$

$$D^-(x) = \sum_{n \le x} \min\,(d(n), d(n+1)). \tag{1.9}$$

Let $r(n)$ denote the number of representation of n as the sum of two squares, and let

$$M(x) = \sum_{p \le x} r(p+1)|\mu(p+1)|, \tag{1.10}$$

$$T(x) = \sum_{p \le x} r(p+1). \tag{1.11}$$

Let further

$$A(x, c) = \sum_{p \le x} c^{U(p+1)}, \tag{1.12}$$

$$A(x) = \sum_{p \le x} d(p+1). \tag{1.13}$$

(1.14) Q_r, Q_r' denote square free numbers having exactly r prime factors.
Let $A(c, \varepsilon)$ denote the set of those n-s for which the inequality

$$|U(n) - cx_2| < \varepsilon x_2 \tag{1.15}$$

holds.

Let

$$r(x, c_1, c_2, \varepsilon) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \in A(c_1, \varepsilon) \\ n+1 \in A(c_2, \varepsilon)}} 1 \tag{1.16}$$

$$\delta(x, c, \varepsilon) = \sum_{\substack{p \le x \\ p+1 \in A(c, \varepsilon)}} \tag{1.17}$$

(1.18) Let $B(x)$ denote the number of those p, $p \le x$ for which $p+1$ has no prime divisor in the arithmetical progression $\equiv -1 \pmod 4$.

(1.19) We use sometimes the Vinogradov notation $\ll$. We write $f \asymp g$ if the inequalities $f \ll g$, $g \ll f$ simultaneously hold. The letters B, B_1, ... denote positive absolute constants.

2. Theorems

In this paper we shall prove the following assertions.

THEOREM 1. *Let $c_1 > 1$, $c_2 > 1$, $\varepsilon > 0$ be constants. Then*

$$R(x, c_1, c_2) \asymp x \cdot x_1^{c_1+c_2-2}, \tag{2.1}$$

$$R(x, c_1, c_2) = (1 + o(1)) \sum_{\substack{n \le x \\ n \in A(c_1, \varepsilon) \\ n+1 \in A(c_2, \varepsilon)}} c_1^{U(n)} c_2^{U(n+1)}, \tag{2.2}$$

$$x_1^{-\varepsilon \log c_1 c_2} \ll \frac{r(x, c_1, c_2, \varepsilon)}{x \cdot x_1^{c_1+c_2-2-(c_1 \log c_1 + c_2 \log c_2)}} \ll x_1^{\varepsilon \log c_1 c_2}. \tag{2.3}$$

THEOREM 2. *For every fixed $\varepsilon > 0$ hold the inequalities*

$$x \cdot x_1^{2(\sqrt{2}-1)-\varepsilon} \ll D^-(x) \ll x \cdot x_1^{2(\sqrt{2}-1)}, \tag{2.4}$$

$$D^+(x) = 2x\{x_1 + (2\gamma - 1)\} + O(xL(x)), \tag{2.5}$$

where γ stands for the Euler constant and

$$x_1^{2(\sqrt{2}-1)-\varepsilon_1} \ll L(x) \ll x_1^{2(\sqrt{2}-1)}, \tag{2.6}$$

$\varepsilon_1 > 0$ arbitrary constant.

THEOREM 3. *For $c > 1$, $\varepsilon > 0$ the relations*

$$A(x, c) = (1 + o(1)) \sum_{\substack{p \le x \\ p+1 \in A(c, \varepsilon)}} c^{\Omega(p+1)}, \tag{2.7}$$

$$A(x) = (1 + o(1)) \sum_{\substack{p \le x \\ p+1 \in A(2, \varepsilon)}} d(p+1), \tag{2.8}$$

$$x_1^{-\varepsilon \log c} \ll \frac{\delta(x, c, \varepsilon)}{x \cdot x_1^{c-2-c\log c}} \ll x_1^{\varepsilon \log c} \tag{2.9}$$

hold.

THEOREM 4. *Let $\varepsilon > 0$ be a constant. Then*

$$T(x) = (1 + o(1)) \sum_{\substack{p \le x \\ p+1 \in A(1, \varepsilon)}} r(p+1), \tag{2.10}$$

$$M(x) = (1 + o(1)) \sum_{\substack{p \le x \\ p+1 \in A(1, \varepsilon)}} r(p+1)\, \mu(p+1)^2, \tag{2.11}$$

$$x \cdot x_1^{-1-\log 2-\varepsilon} \ll B(x) \ll x \cdot x_1^{-3/2}. \tag{2.12}$$

3. Lemmas

Let

$$S(x, c, D, l) = \sum_{Dm+l \le x} c^{\Omega(Dm+l)}. \tag{3.1}$$

Using the method of A. I. VINOGRADOV and YU. V. LINNIK which was elaborated in [9] we can prove the following

LEMMA 1. *Let $\delta > 0$, $c > 1$ be arbitrary constants. Then the inequality*

$$S(x, c, D, l) \ll \frac{x}{D} x_1^{c-1} \tag{3.2}$$

holds uniformly for $(l, D) = 1$, $1 \le l \le D$, $D \le x^{1-\delta}$.

LEMMA 2. *If $c > 1$, then*

$$A(x, c) \asymp x \cdot x_1^{c-2}. \tag{3.3}$$

Further

$$A(x) = (1 + o(1)) Ax \tag{3.4}$$

where A is a suitable positive constant.

The inequality in (3.3) is a special case of a more general theorem of M. B. BARBAN [8] using the new improvements in the theory of large sieve due to M. B. BARBAN, A. I. VINOGRADOV and E. BOMBIERI [7], [10], [4].

The asymptotical relation (3.4) was proved by BREDIHIN in [11] with the dispersions-method due to YU. V. LINNIK [6].

Let $\pi(x, D, l)$ as usual denote the number of primes p, $p \leq x$ in the arithmetical progression $\equiv l \pmod D$.

Let $C(x, D)$ denote the number of those primes p, $p \leq x$ for which $p+1 \equiv 0 \pmod D$ and have the prime-decomposition

$$p+1 = Dq_1 \ldots q_s$$

with

$$q_i \equiv 1 \pmod 4, \quad i = 1, \ldots, s.$$

LEMMA 3. *For fixed $\delta > 0$ hold the inequalities*

$$\pi(x, D, l) \ll \frac{x \cdot x_1^{-1}}{\varphi(D)}, \tag{3.5}$$

$$C(x, D) \ll \frac{x \cdot x_1^{-3/2}}{\varphi(D)} \tag{3.6}$$

uniformly for $(l, D) = 1$ and $D \leq x^{1-\delta}$.

The inequality (3.5) is the well known Brun-Titchmarsh inequality (see [2], p. 44). (3.6) one can prove using the sieve method of A. SELBERG (see [2], Ch. II.).

LEMMA 4. *Let $N = p_1 p_2 \ldots p_k$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Let τ_r denote the number of those divisors of N which have exactly r prime divisors, and which are greater than N^β. Then*

$$\beta \tau_r \leq \frac{r}{k} \binom{k}{r}.$$

PROOF. Since

$$\prod_{Q_r | N} Q_r = N^{\binom{k-1}{r-1}},$$

so

$$N^{\beta \tau_r} \leq \prod_{\substack{Q_r | N \\ Q_r > N^\beta}} Q_r < N^{\binom{k-1}{r-1}},$$

and the assertion follows.

LEMMA 5. *Let $c > 1$, $\delta > 0$ be arbitrary constants. Let $d = c - 1$. Then*

$$c^k = (1 + o(1)) \sum_{\left|r - \frac{d}{c} k\right| < \delta k} d^r \binom{k}{r}$$

as $k \to \infty$.

This assertion is a well known special case of the law of the large numbers

LEMMA 6. *For $d>0$ holds the asymptotical relation*

$$\sum_{n\le y} \frac{d^{U(n)}|\mu(n)|}{n} = C(d)[\log y]^d + O((\log y)^{d-1}),$$

where $C(d)>0$ constant.

We have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{U(n)}|\mu(n)|}{n^{s+1}} = \zeta^d(s+1)h(s),$$

where $\zeta(s)$ denotes the zeta-function of Riemann, and $h(s)$ is regular and bounded one in $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$, so applying the contour-integration technique as SELBERG in [5] the assertion follow.

LEMMA 7.

$$T(x) = (1+o(1))C_1 \frac{x}{x_1}, \tag{3.7}$$

$$M(x) = (1+o(1))C_2 \frac{x}{x_1}. \tag{3.8}$$

C_1, C_2 are suitable positive constants.

The proof of the relations (3.7), (3.8) goes with the method of LINNIK or with the method of HOOLEY [3] combining this with the large sieve theorem of BOMBIERI [4].

4. Proof of Theorem 1.

Let $d = c-1$, $d_1 = c_1-1$, $d_2 = c_2-1$. From the binomial-theorem

$$c^{U(n)} = \sum_{r=0}^{U(n)} d^r \sum_{Q_r|n} 1 \tag{4.1}$$

follows. Let $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$, $R_4(x)$ denote the sums $\sum_{n\le x} c_1^{U(n)} \cdot c_2^{U(n+1)}$ extending over those n-s for which

$$U(n)<(c_1-\varepsilon)x_2,\ U(n)>(c_1+\varepsilon)x_2,\ U(n+1)<(c_2-\varepsilon)x_2,\ U(n+1)>(c_2+\varepsilon)x_2 \tag{4.2}$$

hold respectively.

Since $\frac{d}{c}<1$ so there exist suitable constants $\delta>0$, $0<\beta<1$, such that $\left(\frac{d}{c}+\delta\right)\frac{1}{\beta}<1$. Applying the Lemmas 4 and 5 and (4.1) we have

$$c^{U(n)} \ll \sum_{\left|r-\frac{d}{c}U(n)\right|<\delta U(n)} d^r \sum_{\substack{Q_r|n \\ Q_r\le n^\beta}} 1. \tag{4.3}$$

We shall now prove that

$$R_i(x) = o(1)x \cdot x_1^{c_1+c_2-2}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{4.4}$$

By (4.3) we have

$$R_1(x) \ll \sum_{r \le L_1} d_1^r \sum_{Q_r \le x^\beta} S(x, c_2, Q_r, 1), \tag{4.5}$$

$$L_1 = \left\{\frac{d_1}{c_1} + \delta\right\}(c_1 - \varepsilon)x_2.$$

Hence by Lemma 1

$$R_1(x) \ll x \cdot x_1^{c_1-1} \sum_{r \le L_1} d_1^r \sum_{Q_r \le x} \frac{1}{Q_r}$$

follows. Using that

$$\sum_{Q_r \le x} \frac{1}{Q_r} \le \frac{1}{r!}\left\{\sum_{p \le x} \frac{1}{p}\right\}^r < \frac{1}{r!}\{x_2 + B\}^r, \tag{4.6}$$

and that $L_1 < d_1(1-\varepsilon_1)x_2$, $\varepsilon_1 > 0$ if δ is small enough we obtain (4.4) for $i = 1$. The proof of (4.4) for $i = 3$ is similar.

Using (4.3) we have

$$R_2(x) \ll \sum_{r \ge L_2} d_1^r \sum_{Q_r \le x^\beta} S(x, c_2, Q_r, 1),$$

where $L_2 = \left\{\frac{d_1}{c_1} - \delta\right\}(c_1 + \varepsilon)x_2 > d_1(1+\varepsilon_2)x_2$, if δ is small enough.

By Lemma 1 and by (4.6) we obtain that

$$R_2(x) \ll x \cdot x_1^{c_2-1} \sum_{r \ge L_2} \frac{1}{r!}\left\{\sum_{p \le x} \frac{1}{p}\right\}^r \ll x \cdot x_1^{c_2-1} \sum_{r \ge L_2} \frac{1}{r!}(x_2 + B)^r,$$

whence the inequality (4.4) follow. The proof of the case $i = 4$ is similar.

Now we prove (2.1). Hence (2.2) immediately follows taking into account (4.4).

We have

$$R(x, c_1, c_2) \gg \sum_{n \le x} \left\{\sum_{r=0}^{U(n)} d_1^r \sum_{\substack{Q_r | n \\ Q_r \le \sqrt{x}}} 1\right\}\left\{\sum_{s=0}^{U(n+1)} d_2^s \sum_{\substack{Q'_s | n+1 \\ Q_s \le \sqrt{x}}} 1\right\} \gg$$

$$\ll x \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{Q_r \le \sqrt{x}} \sum_{Q'_s \le \sqrt{x}} \frac{d_1^r d_2^s}{Q_r Q'_s} \gg x \cdot x_1^{d_1+d_2}$$

applying Lemma 6. So the lower estimation in (2.1) is true.

Further for $U(n) < (c_1 + \varepsilon)x_2$ there exists a $\beta < 1$ such that

$$c_1^{U(n)} \ll \sum_{r=0}^{U(n)} d_1^r \sum_{\substack{Q_r | n \\ Q < n^\beta}} 1,$$

and consequently

$$R(x, c_1 c_2) \ll \sum_{r=0}^{\infty} d_1^r \sum_{Q_r \le x^\beta}' S(x, c_2, Q_r, 1) + O(R_2(x)) + O(R_4(x)) \ll$$

$$\ll x \cdot x_1^{c_2-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{d_1^r}{r!} \left\{ \sum_{p<x} \frac{1}{p} \right\}^r \ll x \cdot x_1^{c_1+c_2-2}.$$

(2.3) immediately follows from (2.1), (2.2).

5. Proof of Theorem 2.

Since $d(n) \asymp 2^{U(n)}$, so

$$\min(d(n), d(n+1)) \asymp 2^{\min(U(n), U(n+1))}$$

and consequently we have

$$D^-(x) \gg x_1^{-\varepsilon} \sum_{\substack{n \le x \\ n \in A(\sqrt{2}, \varepsilon) \\ n+1 \in A(\sqrt{2}, \varepsilon)}} |\sqrt{2}|^{U(n)U(n+1)} \gg x_1^{-\varepsilon} R(x, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \gg x \cdot x_1^{2(\sqrt{2}-1)-\varepsilon}$$

Further $\min(d(n), d(n+1)) \asymp \sqrt{d(n)} \cdot \sqrt{d(n+1)}$, and so

$$D^-(x) \ll \sum_{n \le x}' d^{1/2}(n) \cdot d^{1/2}(n+1).$$

The upper estimation of the sum on the right hand side is similar to the upper estimation in (2.1) and so we omit.

The relation (2.5) follows from (2.4) taking into account that

$$D^+(x) = 2D(x) - D^-(x) + O(x^\varepsilon) = 2x\{x_1 + (2\gamma - 1)\} - D^-(x) + O(x^{1/2}).$$

6. Proof of Theorem 3.

We shall prove only (2.7). Hence (2.9) immediately follows. The proof of (2.8) is very similar.

Let $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ denote the sums $\sum_{p \le x} c^{U(p+1)}$ extending over the p-s for which

$$U(p+1) < (c-\varepsilon)x_2, \quad U(p+1) > (c+\varepsilon)x_2$$

hold respectively. For the estimation of $\Delta_1(x)$ we choose suitable constants $0 < \delta$, $0 < \beta < 1$ such that $\left\{\frac{d}{c} + \delta\right\} \frac{1}{\beta} < 1$. Using (4.3) we have

$$\Delta_1(x) \ll \sum_{r \le L_1} d^r \sum_{Q_r \le x^\beta} \pi(x, Q_r, -1),$$

$L_1 \overset{\text{def}}{=} \left\lfloor \frac{d}{c} + \delta \right\rfloor (c-\varepsilon)x_2 < c(1-\varepsilon_1)x_2$, if δ sufficiently small. By (3.5) in Lemma 3 we have

$$A_1(x) \ll \frac{x}{x_1} \sum_{r \le L_1} \frac{d^r}{r!} (x_2 + B_1)^r = o(1) \cdot x \cdot x_1^{d-1}.$$

Similarily we can prove that

$$A_2(x) \ll \sum_{r > L_2} d^r \sum_{Q_r \le x^{\delta}} \pi(x, Q_r, -1),$$

where $L_2 = \left\lfloor \frac{d}{c} - \delta \right\rfloor (c+\varepsilon)x_2 > c(1+\varepsilon_1)x_2$, and consequently

$$A_2(x) = o(1) \cdot x \cdot x_1^{d-1}.$$

Using (3.3) hence (2.7) follows.

7. Proof of Theorem 4.

The proof of (2.10) and (2.11) goes in the standard way applying (3.6) in Lemma 3. The upper estimation of (2.12) is the special case of Lemma 3 since $B(x) \le C(x, 2)$. The lower estimation in (2.12) follows from (2.11) and Lemma 7

References

[1] P. Erdös, On the sum $\Sigma d(f(k))$, *J. Lond. Math. Soc.*, **27** (1952), 7–15.
[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer Verlag, 1957.
[3] C. Hooley, On the representation of numbers as the sum of two squares and a prime, *Acta Math.*, **97** (1957), 189–210.
[4] E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika*, **12** (1965), 201–225.
[5] A. Selberg, Note on a paper of L.G. Sathe, *J. Indian Math. Soc. N.S.*, **18** (1954), 83–87.
[6] Ю. В. Линник, *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах*, Изд. Ленинградского Университета, 1961.
[7] М. Б. Барбан, Плотность нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и почти простых чисел, *Матем. Сб.*, **61 (103)** (1963), 418–425.
[8] М. Б. Барбан, Мультипликативные функции от Σ_R-равнораспределенных последовательностей, *Известия Акад. Наук. Узбек*, Серия физ-мат наук, **6** (1964), 13–19.
[9] А. И. Виноградов и Ю. В. Линник, Оценки суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии, *Успехи Мат. Наук*, **12 4 (76)** (1957), 277–280.
[10] А. И. Виноградов, О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле, *Известия АН, Сер. мат.*, **29** (1965), 903–934.

ON THE CHARACTERIZATION OF COMPLETELY REGULAR SPACES

By

Á. CSÁSZÁR

1st Chair of Analysis, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received November 18, 1967)

1. In order to give a characterization of completely regular spaces without the use of real numbers, O. FRINK [3] proved the following theorem:

(1.1) *A T_1-space E is completely regular if and only if there exists in E a system $\mathfrak{Z}$ of sets with the following properties:*

(1.2) *$\mathfrak{Z}$ is a base for the closed sets;*

(1.3) *$\mathfrak{Z}$ is a lattice;**

(1.4) *$Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$, $Z_1 \cap Z_2 = 0$ implies the existence of $U_1 \supset Z_1$, $U_2 \supset Z_2$ with $E - U_1$, $E - U_2 \in \mathfrak{Z}$, $U_1 \cap U_2 = 0$;*

(1.5) *$x \in U$, $E - U \in \mathfrak{Z}$ implies the existence of $Z \in \mathfrak{Z}$ with $x \in Z \subset U$.*

The necessity of this condition follows from the fact that the system of all zero-sets clearly has the above properties. The sufficiency is proved in [3] by constructing a compact Hausdorff space containing E.

V. I. ZAICEV [6] has shown that, in (1.1), the condition (1.3) can be omitted and the proof of the sufficiency can easily be reduced to the following earlier result of YU. M. SMIRNOV [4]:

(1.6) *Let E be a topological space and $\mathfrak{C}$ a system of pairs of sets in E with the following properties:*

(1.7) *For $(F, G) \in \mathfrak{C}$, F is closed, G is open and $F \subset G$;*

(1.8) *If $(F, G) \in \mathfrak{C}$, then there exist G_1 and F_1 such that $G_1 \subset F_1$, $(F, G_1) \in \mathfrak{C}$, $(F_1, G) \in \mathfrak{C}$.*

Then, if $(F, G) \in \mathfrak{C}$, F and $E - G$ are functionally separated in E.

* In the obvious sense, i.e. with respect to set-theoretical union and intersection.

At the same time, the paper [6] gave another characterization of completely regular spaces. It can be formulated, in a slightly more general form as there, as follows:

(1.9) *In order that a T_1-space E be completely regular, it is necessary and sufficient that in E there exist a system $\mathfrak{H}$ of pairs of sets with the following properties:*

(1.10) *If $(F, G)\in\mathfrak{H}$, then F is closed, G is open and $F\subset G$;*

(1.11) *If $(F, G)\in\mathfrak{H}$, then there exist G_1 and G_2 such that $G_1\cap G_2=\emptyset$, $(F, G_1)\in\mathfrak{H}$, $(E-G, G_2)\in\mathfrak{H}$;*

(1.12) *If $x\in G$ and G is open, then there exists an F such that $x\in F$ and $(F,G)\in\mathfrak{H}$.*

Moreover, the paper [6] contains a characterization of all compactifications or, which is the same by the classical theorem of Yu. M. Smirnov [5], of all proximity relations compatible with a given completely regular topology. It may be formulated in the following form:

(1.13) *In the completely regular T_1-space E let $\mathfrak{A}$ be a system of sets and $\mathfrak{B}$ a system of pairs of sets with the following properties:*

(1.14) *$\mathfrak{A}$ is a base for the closed sets;*

(1.15) *If $(F, G)\in\mathfrak{B}$, then $F\in\mathfrak{A}$, $E-G\in\mathfrak{A}$, $F\subset G$;*

(1.16) *If $(F, G)\in\mathfrak{B}$, then there exist G_1 and G_2 such that $G_1\cap G_2=\emptyset$, $(F, G_1)\in\mathfrak{B}$, $(E-G, G_2)\in\mathfrak{B}$;*

(1.17) *If $x\in G$, $E-G\in\mathfrak{A}$, then there exists an F with $x\in F$, $(F, G)\in\mathfrak{B}$.*

To each proximity relation δ compatible with the topology of E there correspond two systems $\mathfrak{A}_\delta$, $\mathfrak{B}_\delta$ with the above properties, and to two such systems $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ there corresponds a proximity relation $\delta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ compatible with the topology of E in such a manner that $\delta_{\mathfrak{A}_\delta,\mathfrak{B}_\delta}=\delta$ for each δ.

The necessity of the condition in (1.9) follows from the fact that the system of all pairs (F, G) where F and $E-G$ are zero-sets and $F\subset G$ clearly satisfies (1.10), (1.11) and (1.12). The proof of the sufficiency, as well as the proof of (1.13) is based in [6] on results of P. S. Aleksandrov and V. I. Ponomarev [1].

The purpose of the present paper is to show that theorems (1.6) and (1.13), as well as the sufficiency of the conditions in (1.1) and (1.9) can easily be proved with the help of the methods and results contained in the monograph [2] of the author. Moreover, in (1.1), we can omit not only the condition (1.3), but also the hypothesis that E is a T_1-space. Similarly, axiom (T_1) may be omitted in (1.9) and (1.13).

2. Proof of the sufficiency in (1.1)

If $\mathfrak{Z}$ satisfies (1.2), (1.4) and (1.5), we may suppose that $\emptyset$, $E\in\mathfrak{Z}$ because the adjunction of $\emptyset$ and E to $\mathfrak{Z}$ does not concern the validity of these conditions.

Now, for $A, B \subset E$, put $A < B$ if and only if there exist Z and U with $Z \in \mathfrak{Z}$, $E - U \in \mathfrak{Z}$, $A \subset Z \subset U \subset B$. $<$ clearly is a symmetrical semi-topogenous order in E. Moreover, $< \subset <^2$ since $A < B$ implies

$$A \subset Z \subset U \subset B,\ Z \in \mathfrak{Z},\ E - U \in \mathfrak{Z},$$

and by (1.4) there exist U_1 and U_2 with

$$Z \subset U_1 \subset E - U_2 \subset U,\ E - U_1 \in \mathfrak{Z},\ E - U_2 \in \mathfrak{Z},$$

so that $A < U_1 < B$. Therefore $<^q$ is a symmetrical topogenous order satisfying $<^q \subset <^{q2}$ ([2] (3.6), (3.21), (3.53)), and $\mathscr{T} = \{<^q\}$ is a symmetrical topogenous structure.

By virtue of [2] (12.61), it suffices to show that $\mathscr{T}^p = \mathscr{T}_0$ where $\mathscr{T}_0 = \{<_0\}$ denotes the topology of the given space. Now $< \subset <_0$ since the sets of $\mathfrak{Z}$ are closed, hence $<^{qp} \subset <_0^{qp} = <_0$. On the other hand, if $x <_0 V$, there exists by (1.2) a U with $x \in U$, $E - U \in \mathfrak{Z}$, and by (1.5) we have

$$x \in Z \subset U \subset V,\ Z \in \mathfrak{Z},\ E - U \in \mathfrak{Z},$$

thus $x < V$. Therefore $A <_0 B$ implies $x < B$ for $x \in A$, a fortiori $x <^q B$ and $A <^{qp} B$.

3. Proof of (1.6)

If $\mathfrak{C}$ satisfies (1.7) and (1.8), we may assume that $(\emptyset, \emptyset) \in \mathfrak{C}$, $(E, E) \in \mathfrak{C}$ since the adjunction of these pairs does not concern (1.7) and (1.8). Put $A < B$ if and only if there exists $(F, G) \in \mathfrak{C}$ such that $A \subset F \subset G \subset B$. Clearly $<$ is a semi-topogenous order, and $< \subset <^2$ since $A < B$ implies

$$A \subset F \subset G \subset B,\ (F, G) \in \mathfrak{C},$$

hence by (1.8)

$$A \subset F \subset G_1 \subset F_1 \subset G \subset B,\ (F, G_1) \in \mathfrak{C},\ (F_1, G) \in \mathfrak{C}$$

so that $A < G_1 < B$.

$<^s$ is a symmetrical topogenous order satisfying $<^s \subset <^{s2}$ ([2] (3.35), (3.53)) and $\mathscr{T} = \{<^s\}$ is a symmetrical topogenous structure. If $(F, G) \in \mathfrak{C}$, then $F < G$ and a fortiori $F <^s G$, hence by [2] (12.41) there exists a $(\mathscr{T}, \mathscr{I})$-continuous function $f : E \to [0, 1]$ taking the value 0 in F and 1 in $E - G$. f is also $(\mathscr{T}^{st}, \mathscr{I}^{st})$-continuous, i.e. $(\mathscr{T}, \mathscr{H}^t)$-continuous ([2] (10.12), (10.19), (9.23)). Denoting by $\mathscr{T}_0 = \{<_0\}$ the topology of the space, clearly $< \subset <_0$, $<^c \subset <_0$ by (1.7), hence $<^s \subset <_0$, $\mathscr{T} < \mathscr{T}_0$ and f is $(\mathscr{T}_0, \mathscr{H}^{tp})$-continuous ([2] (10.10), (10.12)).

4. Proof of the sufficiency in (1.9)

If $\mathfrak{H}$ satisfies (1.10), (1.11), (1.12) in a space E with the topology $\mathscr{T}_0 = \{<_0\}$, we can again assume that $(0, \emptyset) \in \mathfrak{H}$, $(E, E) \in \mathfrak{H}$. Put $A < B$ if and only if there exists $(F, G) \in \mathfrak{H}$ with $A \subset F \subset G \subset B$. Then $<$ is a semi-topogenous order. Moreover, $<$ is symmetrical and satisfies $< \subset <^2$. In fact, $A < B$ implies

$$A \subset F \subset G \subset B,\ (F, G) \in \mathfrak{H},$$

hence by (1.11)

$$A \subset F \subset G_1 \subset E - G_2 \subset G \subset B, \ (F, G_1) \in \mathfrak{H}, \ (E - G, G_2) \in \mathfrak{H}. \tag{4.1}$$

Therefore

$$E - B \subset E - G \subset G_2 \subset E - G_1, \ (E - G, G_2) \in \mathfrak{H} \tag{4.2}$$

and $E - B \prec E - G_1 \subset E - A$, which proves the symmetry of $\prec$. From (4.1) we see that, if $A \prec B$, then $A \prec G_1$ and, by (4.2), $E - B \prec E - G_1$. Using the symmetry of $\prec$, we have $G_1 \prec B$. Therefore $\mathscr{T} = \{\prec^q\}$ is a symmetrical topogenous structure.

$\prec \subset \prec_0$ follows from (1.10), thus $\prec^{qp} \subset \prec_0$, $\mathscr{T}^p < \mathscr{T}_0$. On the other hand, by (1.12) $x \prec_0 V$ implies $x \prec V$, hence $A \prec_0 B$ implies $A \prec^{qp} B$ and $\mathscr{T}_0 < \mathscr{T}^p$. By [2] (12.61), the statement is proved.

5. Proof of (1.13)

By [2] (7.26), we may consider symmetrical topogenous structures instead of proximity relations.

Let $\mathscr{T}_0 = \{\prec_0\}$ be the topology of the given space. If $\mathscr{T} = \{\prec\}$ is a symmetrical topogenous structure such that $\mathscr{T}^p = \mathscr{T}_0$, let $\mathfrak{A}_C$ be the system of all closed sets and $\mathfrak{B}_C$ that of all pairs (F, G) with $F, E - G \in \mathfrak{A}_C$, $F \prec G$. Then (1.14), (1.15), (1.16), (1.17) clearly are satisfied (in (1.16), one chooses C with $F \prec C \prec G$ and then puts $G_1 = \operatorname{int} C$, $G_2 = \operatorname{int}(E - C)$).

Conversely, let $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ be given satisfying the conditions (1.14) to (1.17). Put $A \prec B$ if and only if there exists $(F, G) \in \mathfrak{B}$ with $A \subset F \subset G \subset B$. Then $\prec$ is a semi-topogenous order, and, as in the previous proof, (1.16) implies that $\prec$ is symmetrical and satisfies $\prec \subset \prec^2$. Hence $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} = \{\prec^q\}$ is a symmetrical topogenous structure. The sets of $\mathfrak{A}$ being closed, (1.15) implies $\mathscr{T} < \mathscr{T}_0$. On the other hand, (1.14) and (1.17) imply $\mathscr{T}_0 < \mathscr{T}^p$. Hence $\mathscr{T}^p = \mathscr{T}_0$.

Finally, if $\mathscr{T} = \{\prec\}$ is a symmetrical topogenous structure satisfying $\mathscr{T}^p = \mathscr{T}_0$, and $\mathfrak{A}_C$, $\mathfrak{B}_C$ are defined as above, then $\mathscr{T}_{\mathfrak{A}_C, \mathfrak{B}_C} < \mathscr{T}$ is obvious. Conversely, $A \prec B$ implies $\bar{A} \prec \operatorname{int} B$, so that $\mathscr{T} < \mathscr{T}_{\mathfrak{A}_C, \mathfrak{B}_C}$ also holds.

References

[1] (P. S. Aleksandrov – V. I. Ponomarev) П. С. Александров – В. И. Пономарев, О вполне регулярных пространствах и их бикомпактных расширениях, *Вестник Моск. Унив.* мат. мех., (1962) 37 – 42.

[2] Á. Császár, *Grundlagen der allgemeinen Topologie* (Budapest – Leipzig, 1963).

[3] O. Frink, Compactifications and semi-normal spaces, *Amer. Journ. of Math.*, **86** (1964), 602 – 607.

[4] (Yu. M. Smirnov) Ю. М. Смирнов, К теории вполне регулярных пространств, *Уч. зап. Моск. Унив.*, **5** (1952), 137 – 154.

[5] (Yu. M. Smirnov) Ю. М. Смирнов, О пространствах близости, *Мат. Сборник*, **31** (73) (1952), 543 – 574.

[6] (V. I. Zaicev) В. И. Зайцев, К теории тихоновских пространств, *Вестник Моск. Унив.*, мат. мех., (1967) 48 – 57.

ÜBER DIE DOPPELTE KOMPAKTIFIZIERUNG GEWISSER TOPOGENER RÄUME

Von

Á. CSÁSZÁR

I. Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 9. Dezember 1967)

1. In der Monographie [2] wurde die Theorie der doppelten Kompaktifizierung von topogenen Räumen ausgearbeitet und später in [3] auf beliebige syntopogene Räume verallgemeinert. Es wurde insbesondere gezeigt, daß diese Theorie im Falle eines symmetrischen topogenen Raumes mit derjenigen der Smirnovschen Kompaktifizierung (vgl. [8]) des assoziierten Nachbarschaftsraumes zusammenfällt.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun die doppelte Kompaktifizierung topogener Räume in gewissen speziellen Fällen näher zu untersuchen. Die in Frage kommenden topogenen Strukturen umfassen u. a. die Topologien, sowie einen wichtigen Typ der Nachbarschaftsstrukturen, der in engem Zusammenhang steht mit den in [6] untersuchten normalen Basen und z. B. die mit der Stone—Čechschen bzw. mit der Alexandroffschen Kompaktifizierung verbundenen Nachbarschaftsstrukturen enthält. Es wird sich herausstellen, daß die Konstruktion der doppelten Kompaktifizierung in den untersuchten speziellen Fällen sich im wesentlichen auf das Wallmansche Kompaktifizierungsverfahren (vgl. [10]) zurückführen lässt, und daß die Wallmansche Kompaktifizierung der topologischen Räume in einfacher Verbindung mit der doppelten Kompaktifizierung steht.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet eine Reihe von Tatsachen aus der Filtertheorie, die in speziellen Fällen allerdings und sehr wahrscheinlich auch in allgemeiner Form wohlbekannt sind, aber der Vollständigkeit halber hier zusammengestellt werden.

2. Es sei E eine nichtleere Grundmenge. Ist $\mathfrak{S}$ ein System aus Teilmengen von E, so wird ein (echter) Filter $\mathfrak{F}$ in E ein *$\mathfrak{S}$-Filter* genannt, wenn er eine aus lauter Mengen von $\mathfrak{S}$ bestehende Basis besitzt. Ein maximaler $\mathfrak{S}$-Filter, d. h. ein solcher $\mathfrak{S}$-Filter, der in keinem anderen $\mathfrak{S}$-Filter als echte Teilmenge enthalten ist, heiße ein *Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter*.

(2.1) *Ist $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}$ ein Raster, so bilden diejenigen Teilmengen von E, die eine Menge aus $\mathfrak{S}_1$ als Teilmenge enthalten, den kleinsten $\mathfrak{S}_1$ enthaltenden $\mathfrak{S}$-Filter.*

Da die Vereinigung einer nach der Inklusion linear geordneten Menge von $\mathfrak{S}$-Filtern offenbar ein $\mathfrak{S}$-Filter ist, erhält man aus dem Kuratowski–Zornschen Lemma:

(2.2) *Ein beliebiger $\mathfrak{S}$-Filter ist in mindestens einem Ultra- $\mathfrak{S}$-Filter enthalten.*

Besonders interessante Eigenschaften besitzen die $\mathfrak{S}$-Filter, wenn $\mathfrak{S}$ ein Halbverband, ein Verband oder ein Ring in E ist. Dabei verstehen wir unter einem *Halbverband in E* ein Mengensystem $\mathfrak{H}$ aus Teilmengen von E mit den folgenden Eigenschaften:

(2.3) $\emptyset, E \in \mathfrak{H}$,

(2.4) *Aus $H_1, H_2 \in \mathfrak{H}$ folgt $H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{H}$.*

Ein *Verband in E* ist ein solcher Halbverband $\mathfrak{V}$ in E, der noch der folgenden Bedingung genügt:

(2.5) *Aus $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ folgt $V_1 \cup V_2 \in \mathfrak{V}$.*

Ein *Ring in E* ist ein Verband $\mathfrak{R}$ in E mit folgender Eigenschaft:

(2.6) *Aus $R \in \mathfrak{R}$ folgt $E - R \in \mathfrak{R}$.*

Im folgenden wird der Ausdruck „in E" im allgemeinen weggelassen, also einfach Halbverband, Verband bzw. Ring geschrieben.

(2.7) *Ist $\mathfrak{H}$ ein Halbverband, so bilden die Mengen der Gestalt $\bigcup_1^n H_i$ ($H_i \in \mathfrak{H}$, $n = 1, 2, \ldots$) den kleinsten $\mathfrak{H}$ enthaltenden Verband $\mathfrak{V}$. $\mathfrak{V}$ heisst der von $\mathfrak{H}$ erzeugte Verband.*

(2.8) *Ist $\mathfrak{V}$ ein Verband, so bilden die Mengen der Gestalt $E - V$ ($V \in \mathfrak{V}$) einen Verband, der mit $\mathfrak{V}^*$ bezeichnet wird.*

(2.9) *Ist $\mathfrak{V}$ ein Verband, so bilden die Mengen der Gestalt $V_1 - V_2 = V_1 \cap (E - V_2)$ ($V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$) einen Halbverband $\mathfrak{H}$. Der kleinste $\mathfrak{H}$ enthaltende Verband ist ein Ring $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ ist der kleinste $\mathfrak{V}$ enthaltende Ring und heißt der von $\mathfrak{V}$ erzeugte Ring.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß der Verband $\mathfrak{R}$ tatsächlich ein Ring ist. Nun hat ein Element von $\mathfrak{R}$ nach (2.7) die Gestalt

$$R = \bigcup_1^n (V_i \cap (E - W_i)) \qquad (V_i, W_i \in \mathfrak{V}).$$

Daraus ergibt sich

$$E - R = \bigcap_1^n ((E - V_i) \cup W_i) = \bigcup_j \bigcap_{i=1}^n X_{ij},$$

wobei j eine endliche Indexmenge durchläuft und $X_{ij} = E - V_i$ oder $X_{ij} = W_i$ für jedes j und $i = 1, \ldots, n$ ist. Aus (2.8) sieht man, daß

$$\bigcap_{i=1}^n X_{ij} = U_j \cap (E - U_j')$$

ist mit $U_j, U_j' \in \mathfrak{V}$, also $E - R \in \mathfrak{R}$.

(2.10) *Dazu, daß ein $\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ ein Ultra-$\mathfrak{T}$-Filter sei, ist die folgende Bedingung hinreichend und, falls $\mathfrak{T}$ ein Halbverband ist, auch notwendig:*

(2.11) *aus $S \in \mathfrak{T}$ folgt entweder $S \in \mathfrak{s}$ oder $E - S \in \mathfrak{s}$.*

Beweis. Ist (2.11) erfüllt, so sei $\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{s}$ ein $\mathfrak{S}$-Filter. Aus $A \in \mathfrak{s}_1$ folgt die Existenz von $S \in \mathfrak{s}_1$ mit $S \in \mathfrak{S}$, $S \subset A$. Da $E - S \in \mathfrak{s}$ unmöglich ist, muß $S \in \mathfrak{s}$ und damit auch $A \in \mathfrak{s}$ bestehen, so daß $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$.

Ist $\mathfrak{S}$ ein Halbverband, so sei $\mathfrak{s}$ ein Ultra-$\mathfrak{T}$-Filter, $S \in \mathfrak{T}$. Falls $E - S \notin \mathfrak{s}$, so ist $S \cap A \neq \emptyset$ für $A \in \mathfrak{s}$, und die Mengen der Gestalt $S \cap S'$ $(S' \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{S})$ bilden einen Raster, der nach (2.1) einen $\mathfrak{T}$-Filter $\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{s}$ erzeugt. Aus $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$ und $S \in \mathfrak{s}_1$ folgt also $S \in \mathfrak{s}$.

(2.12) *$\mathfrak{H}$ sei ein Halbverband, der den Verband $\mathfrak{V}$ erzeugt. Dann sind die Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter mit den Ultra-$\mathfrak{V}$-Filtern identisch. Ist noch $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}$, wobei $\mathfrak{R}$ den von $\mathfrak{V}$ erzeugten Ring bezeichnet, so ist jeder Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter ein Ultra-$\mathfrak{T}$-Filter.*

Beweis. Nach (2.7) und (2.9) haben die Elemente $V \in \mathfrak{V}$ bzw. $R \in \mathfrak{R}$ die Gestalt

$$V = \bigcup_1^n H_i \quad (H_i \in \mathfrak{H}), \tag{2.13}$$

$$R = \bigcup_1^n (V_i \cap (E - W_i)) \quad (V_i, W_i \in \mathfrak{V}). \tag{2.14}$$

Ist $\mathfrak{h}$ ein Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter, so wird gezeigt, daß jede Menge $S \in \mathfrak{S}$ die Bedingung (2.11) erfüllt, falls $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}$ ist: da $\mathfrak{h}$ offenbar ein $\mathfrak{T}$-Filter ist, folgt daraus die zweite Behauptung.

Nun sei zuerst $S \in \mathfrak{V}$, $S = V$ mit dem unter (2.13) stehenden V. Aus $H_i \in \mathfrak{h}$ für mindestens ein i ergibt sich $V \in \mathfrak{h}$; trifft das nicht zu, so gilt nach (2.10) $E - H_i \in \mathfrak{h}$ für $1 \leqq i \leqq n$, also

$$E - V = \bigcap_1^n (E - H_i) \in \mathfrak{h}.$$

Dann sei $S = V_1 \cap (E - V_2)$ mit $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$. Aus $V_1 \in \mathfrak{h}$, $E - V_2 \in \mathfrak{h}$ folgt $S \in \mathfrak{h}$. Ist $E - V_1 \in \mathfrak{h}$, so ergibt sich $E - V_1 \subset E - S \in \mathfrak{h}$, ebenso hat $V_2 \in \mathfrak{h}$ die Beziehung $V_2 \subset E - S \in \mathfrak{h}$ zur Folge.

Endlich sei $S = \bigcup_1^n D_i$ mit $D_i = V_i \cap (E - W_i)$, $V_i, W_i \in \mathfrak{V}$. Da (2.11) für D_i statt S gültig ist, muß dieselbe Beziehung nach dem obigen Gedankengang auch für S bestehen.

Nach dem bisher bewiesenen ist jeder Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter ein Ultra-$\mathfrak{V}$-Filter. Es sei umgekehrt $\mathfrak{v}$ ein Ultra-$\mathfrak{V}$-Filter. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{v}$ ein $\mathfrak{H}$-Filter ist, denn er muß dann offenbar ein Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter sein. Nun folgt aus $A \in \mathfrak{v}$ die Existenz von $V \in \mathfrak{v} \cap \mathfrak{V}$ mit $V \subset A$, und V hat die Gestalt (2.13). Dann gilt $H_i \in \mathfrak{v}$ für mindestens ein i, sonst hätte man nämlich $E - H_i \in \mathfrak{v}$ für $1 \leqq i \leqq n$ und $E - V = \bigcap_1^n (E - H_i) \in \mathfrak{v}$. Somit ergibt sich $H_i \subset V \subset A$, $H_i \in \mathfrak{v} \cap \mathfrak{H}$, womit alles bewiesen ist.

Es seien nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei Systeme aus Teilmengen von E. Ein $\mathfrak{T}$-Filter $\mathfrak{t}$ heisse *$\mathfrak{S}$-fortsetzbar*, wenn es einen $\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ gibt mit $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{t}$.

(2.15) *Ist $\mathfrak{T}$ ein Halbverband, so gibt es zu jedem $\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ einen* (selbstverständlich $\mathfrak{S}$-fortsetzbaren) *größten $\mathfrak{T}$-Filter $\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{s}$, und zwar $\mathfrak{t} = \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ ist der vom Raster $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$ erzeugte Filter.*

$\mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$ ist tatsächlich ein Raster, da $E \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$ und aus $T_1, T_2 \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$ immer $T_1 \cap T_2 \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$ folgt. Der von $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$ erzeugte Filter ist offenbar der größte in $\mathfrak{s}$ enthaltene $\mathfrak{T}$-Filter.

(2.16) *Ist $\mathfrak{T}$ ein Halbverband, so läßt ein beliebiger maximaler $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter $\mathfrak{t}$ sich in der Gestalt $\mathfrak{t} = \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ darstellen mit einem Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$.*

Es sei $\mathfrak{s}_1$ ein $\mathfrak{S}$-Filter mit $\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{t}$. Nach (2.2) existiert ein Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{s}_1$. Aus (2.15) folgt, dass $\mathfrak{T}(\mathfrak{s}) \supset \mathfrak{t}$ ein $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter ist, und aus der Maximalität von $\mathfrak{t}$ ergibt sich $\mathfrak{T}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{t}$.

Als Umkehrung beweisen wir:

(2.17) *Es seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ Halbverbände mit der Eigenschaft*

(2.18) $$\text{aus } S \in \mathfrak{S} \text{ folgt } E - S \in \mathfrak{T}.$$

Dann ist der Filter $\mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ für einen Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ ein maximaler $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter.

Ist in der Tat $\mathfrak{t} \supset \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ ein $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter mit $\mathfrak{s}_1 \supset \mathfrak{t}$, wobei $\mathfrak{s}_1$ einen $\mathfrak{S}$-Filter bezeichnet, so folgt aus $A \in \mathfrak{t}$ die Existenz von $T \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{T}$ und $S \in \mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{S}$ mit $A \supset T \supset S$. Nach (2.10) besteht entweder $S \in \mathfrak{s}$ oder $E - S \in \mathfrak{s}$. Im ersten Falle gilt $T \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$, daher $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$. Im zweiten ergibt sich nach (2.18) $E - S \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{T}$, daher $E - S \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}_1$ im Widerspruch mit $S \in \mathfrak{s}_1$. Also $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ und $\mathfrak{t} = \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$.

(2.19) *Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ Halbverbände mit der Eigenschaft* (2.18), *so ergibt die Beziehung $\mathfrak{t} = \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ eine eineindeutige Abbildung der Menge aller Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter auf die Menge aller maximaler $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter.*

Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{T}(\mathfrak{s}_1) \neq \mathfrak{T}(\mathfrak{s}_2)$ für je zwei Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}_1 \neq \mathfrak{s}_2$. Es sei z.B. $A \in \mathfrak{s}_1$, $A \notin \mathfrak{s}_2$. Dann existiert $S \in \mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{S}$ mit $A \supset S$ und natürlich $S \notin \mathfrak{s}_2$. Aus (2.10) folgt $E - S \in \mathfrak{s}_2$, nach (2.18) ist auch $E - S \in \mathfrak{T}$, woraus $E - S \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s}_2)$ sich ergibt. $E - S \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s}_1) \subset \mathfrak{s}_1$ ist aber unmöglich, da $S \in \mathfrak{s}_1$ ist.

Ein Filter, der zugleich $\mathfrak{S}$-Filter und $\mathfrak{T}$-Filter ist, heisse ein *$\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter*. Ein solcher Filter ist natürlich ein $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter.

(2.20) *Es sei $\mathfrak{T}$ ein Halbverband mit der Eigenschaft*

(2.21) *aus $S \subset T$, $S \in \mathfrak{S}$, $T \in \mathfrak{T}$ folgt die Existenz von*

$$S_1 \in \mathfrak{S},\ T_1 \in \mathfrak{T} \quad \text{mit} \quad S \subset T_1 \subset S_1 \subset T.$$

Dann ist $\mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ für einen beliebigen $\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ ein $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter, und ein maximaler $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter ist ein maximaler $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter. Ist auch $\mathfrak{S}$ ein Halbverband und ist noch (2.18) *erfüllt, so fallen die maximalen $\mathfrak{S}$-fortsetzbaren $\mathfrak{T}$-Filter mit den maximalen $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filtern zusammen.*

BEWEIS. $\mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ ist ein $\mathfrak{T}$-Filter und auch ein $\mathfrak{S}$-Filter, aus $A \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ folgt nämlich die Existenz von $T \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ und $S \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{s}$ mit $A \supset T \supset S$, so daß es nach (2.21) zwei Mengen $S_1 \in \mathfrak{S}$ und $T_1 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $S \subset T_1 \subset S_1 \subset T$. Daraus ergibt sich $T_1 \in \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ und $S_1 \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$, $S_1 \subset A$.

Ein maximaler $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter besitzt nach (2.16) die Form $\mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ und ist daher ein $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter, und zwar natürlich ein maximaler $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter. Sind noch die weiteren Voraussetzungen erfüllt, so ist ein maximlaer $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter $\mathfrak{t}$ als $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter in einem Filter der Gestalt $\mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ mit einem Ultra-$\mathfrak{S}$-Filter $\mathfrak{s}$ enthalten, der als $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter mit $\mathfrak{t}$ identisch sein muß. Nach (2.17) ist also $\mathfrak{t}$ auch ein maximaler $\mathfrak{S}$-fortsetzbarer $\mathfrak{T}$-Filter.

(2.19) und (2.20) entnimmt man:

(2.22) *Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ Halbverbände mit den Eigenschaften* (2.18) *und* (2.21), *so stehen die maximalen $\mathfrak{S}$-$\mathfrak{T}$-Filter $\mathfrak{t}$ mittels $\mathfrak{t} = \mathfrak{T}(\mathfrak{s})$ mit den Ultra-$\mathfrak{S}$-Filtern $\mathfrak{s}$ in eineindeutiger Beziehung.*

3. Nach [2], (16.90) läßt eine doppelte Kompaktifizierung sich für einen topogenen Raum $[E, \mathfrak{O}]$ folgendermaßen konstruieren. Man wählt eine Menge $E' \supset E$ und ordnet den Elementen $x \in E' - E$ eineindeutigerweise die in bezug auf $\mathfrak{O}^s$ nichtkonvergenten, komprimierten, runden Filter $\mathfrak{s}(x)$ zu. Den Elementen $x \in E$ werden durch $\mathfrak{s}(x)$ die entsprechenden Fundamentalfilter zugeordnet. Nun setzt man für $X \subset E$

$$h(X) = \{x : X \in \mathfrak{s}(x)\}. \tag{3.1}$$

Mit der Bezeichnung $\{\prec\} = \mathfrak{O}$ sei

$$A' \prec^h B' \Leftrightarrow \text{es gibt } A, B \text{ mit } A \prec B,\ A' \subset h(A),\ h(B) \subset B' \tag{3.2}$$

und

$$\mathfrak{O}' = \{\prec^{hq}\}.$$

Dann ist $[E', \mathfrak{O}']$ eine doppelte Kompaktifizierung für $[E, \mathfrak{O}]$.

Was nun die in der obigen Konstruktion vorkommenden komprimierten runden Filter betrifft, kann man folgendes beweisen:

(3.3) *In einem beliebigen syntopogenen Raum fallen die komprimierten runden Filter mit den maximalen runden Filtern zusammen.* (Vgl. [9], 1.2.2.)

BEWEIS. Die komprimierten Filter des syntopogenen Raumes $[E, \mathcal{S}]$ sind mit den komprimierten Filtern des Raumes $[E, \mathcal{S}^l]$ identisch (s. [2], (15.47)), und die runden Filter von $[E, \mathcal{S}]$ stimmen mit denjenigen von $[E, \mathcal{S}^l]$ überein (s. [1], (16.42)). Es werde $\{\prec\} = \mathcal{S}^l$ gesetzt.

Sind nun $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}' \supset \mathfrak{s}$ runde Filter in bezug auf $\mathcal{S}^l$, und setzt man voraus, daß $\mathfrak{s}$ komprimiert ist und $B \in \mathfrak{s}' - \mathfrak{s}$, so sei $A \in \mathfrak{s}'$, $A \prec B$. Da $\mathfrak{s}$ komprimiert ist und $B \notin \mathfrak{s}$, muß $E - A \in \mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}'$ bestehen im Widerspruch mit $A \in \mathfrak{s}'$. Daher ist $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$, und $\mathfrak{s}$ ist ein maximaler runder Filter.

Umgekehrt sei jetzt $\mathfrak{s}$ ein maximaler runder Filter in bezug auf $\mathcal{S}^l$. Ist $A \prec B$ und setzt man voraus, daß $B \notin \mathfrak{s}$, $E - A \notin \mathfrak{s}$, so wähle man mit Hilfe von Axiom (S_2) eine Folge $\{B_i\}$ mit den Eigenschaften $B_0 = B$, $A \prec B_{i+1} \prec B_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Offenbar ist

$$\mathfrak{r} = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\}$$

ein runder Raster. Aus $A(\cap)\mathfrak{s} \neq \emptyset$ folgt $\mathfrak{r}(\cap)\mathfrak{s} \neq \emptyset$, und $\mathfrak{r}(\cap)\mathfrak{s}$ ist ebenfalls ein runder Raster, der einen runden Filter $\mathfrak{s}' \supset \mathfrak{s}$ erzeugt. Aus der Maximalität von $\mathfrak{s}$ folgt $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$, also $B_0 = B \in \mathfrak{s}'$ steht mit $B \in \mathfrak{s}$ im Widerspruch. Daher ist $\mathfrak{s}$ komprimiert.

Nun sind die runden und insbesondere die maximalen runden Filter in einem gewissen Typ der topogenen Räume leicht anzugeben. Um diesen Typ zu definieren, seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei Verbände in E. Das Paar $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ heiße *normal*, wenn folgende, der Bedingung (2.21) entsprechende Bedingung erfüllt ist: Aus $M \subset N$, $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{N}$ folgt die Existenz von $M_1 \in \mathfrak{M}$, $N_1 \in \mathfrak{N}$ mit $M \subset N_1 \subset M_1 \subset N$.

Man beweist nun leicht:

(3.4) *Ist $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ein normales Paar von Verbänden, so wird durch*

$$A <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} B \Leftrightarrow \text{ es gibt } M \in \mathfrak{M},\ N \in \mathfrak{N} \text{ mit } A \subset M \subset N \subset B, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} = \{<_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}\}$$

eine topogene Struktur auf E definiert. Die in bezug auf $\mathcal{T}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$ runden Filter fallen mit den $\mathfrak{M}$-$\mathfrak{N}$-Filtern zusammen.

Beweis. $<_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$ ist offenbar eine topogene Ordnung auf E. Aus $A <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} B$ folgt nun

$$A \subset M \subset N \subset B, \quad M \in \mathfrak{M}, \quad N \in \mathfrak{N},$$

und nach der Normalität von $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$

$$A \subset M \subset N_1 \subset M_1 \subset N \subset B, \quad M_1 \in \mathfrak{M}, \quad N_1 \in \mathfrak{N},$$

also

$$A <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} N_1 <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} B,$$

so daß $\mathcal{T}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$ eine topogene Struktur ist.

Ist $\mathfrak{s}$ ein runder Filter in bezug auf $\mathcal{T}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$, so folgt aus $S \in \mathfrak{s}$ die Existenz von $S_1 \in \mathfrak{s}$ mit $S_1 < S$, also mit

$$S_1 \subset M \subset N \subset S, \quad M \in \mathfrak{M}, \quad N \in \mathfrak{N}.$$

Da $M, N \in \mathfrak{s}$ ist, muß $\mathfrak{s}$ ein $\mathfrak{M}$-$\mathfrak{N}$-Filter sein.

Ist $\mathfrak{s}$ umgekehrt ein $\mathfrak{M}$-$\mathfrak{N}$-Filter, so ergibt sich aus $S \in \mathfrak{s}$ die Existenz von $N \in \mathfrak{N}$, $N \subset S$, dann von $M \in \mathfrak{M}$, $M \subset N$, also $M <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} S$, so daß $\mathfrak{s}$ rund ist.

Aus (2.22) und (3.4) ergibt sich nun:

(3.6) *$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sei ein normales Paar von Verbänden mit $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{N}$* (vgl. (2.8)). *Dann stehen die maximalen runden Filter $\mathfrak{s}$ von $\mathcal{T}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$ mittels $\mathfrak{s} = \mathfrak{N}(\mathfrak{m})$ mit den Ultra-$\mathfrak{M}$-Filtern $\mathfrak{m}$ in eineindeutiger Beziehung.*

Das Paar $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ von Verbänden sei *regulär* genannt, wenn aus $x \in N \in \mathfrak{N}$ die Existenz von $M \in \mathfrak{M}$ folgt mit $x \in M \subset N$.

(3.7) *Ist $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ein reguläres und normales Paar von Verbänden, so bildet $\mathfrak{N}$ eine Basis der zu $\mathcal{T}^p_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}$ assoziierten klassischen Topologie.*

Aus $x <^p_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} V$ folgt nämlich $x <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} V$, also $x \in M \subset N \subset V$, $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{N}$; aus $x \in N \subset V$, $N \in \mathfrak{N}$ ergibt sich umgekehrt $x \in M \subset N \subset V$, $M \in \mathfrak{M}$, also $x <_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} V$ und $x <^p_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}} V$.

(3.8) *Es sei* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *ein reguläres und normales Paar von Verbänden mit* $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{N}$. *Für* $x \in E$ *bezeichne* $\mathfrak{m}(x)$ *den von den* x *enthaltenden Mengen* $M \in \mathfrak{M}$ *erzeugten Filter. Dann ist* $\mathfrak{m}(x)$ *ein Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filter; solche Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filter seien triviale Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filter genannt. Ein maximaler runder Filter von* $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn der im Sinne von* (3.6) *zu ihm gehörende Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filter trivial ist, und zwar ist* $\mathfrak{N}(\mathfrak{m}) \to x$ *mit* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(x)$ *gleichwertig.*

Beweis. Die den Punkt x enthaltenden Mengen von $\mathfrak{M}$ bilden offenbar einen Raster, der nach (2.1) einen $\mathfrak{M}$-Filter $\mathfrak{m}(x)$ erzeugt. Ist $M \in \mathfrak{M}$, so folgt aus $x \in M$ offenbar $M \in \mathfrak{m}(x)$, aus $x \notin M$ ergibt sich aber $x \in E - M \in \mathfrak{N}$, also $x \in M_1 \subset E - M$, $M_1 \in \mathfrak{M}$ und $E - M \in \mathfrak{M}$. Nach (2.10) ist $\mathfrak{m}(x)$ ein Ultra-$\mathfrak{M}$-Filter.

Es sei nun $\mathfrak{m}$ ein Ultra-$\mathfrak{M}$-Filter, $\mathfrak{s} = \mathfrak{N}(\mathfrak{m})$. Aus $\mathfrak{s} \to x$ folgt $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{m} \to x$ und daher $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(x)$, denn sonst gäbe es eine Menge $M \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}(x)$, $x \in E - M \in \mathfrak{N}$, so daß $E - M$ nach (3.7) eine Umgebung von x wäre, die keine Menge von $\mathfrak{m}$ enthält. Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(x)$ und $x \in N \in \mathfrak{N}$ die Existenz von $M \in \mathfrak{M}$ mit $x \in M \subset N$, also mit $M \in \mathfrak{m}$ und $N \in \mathfrak{N}(\mathfrak{m})$, so daß $\mathfrak{s} \to x$.

Uns wird im folgenden besonders der Fall interessieren, wo $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}$ symmetrisch ist. Zu diesem Zweck sei bemerkt:

(3.9) *Ist* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *ein normales Paar von Verbänden, so ist* $(\mathfrak{N}^*, \mathfrak{M}^*)$ *ein ebensolches Paar, und*

$$\overset{c}{\prec}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}} = \prec_{\mathfrak{N}^*, \mathfrak{M}^*}.$$

Nun heisse der Verband $\mathfrak{M}$ in E *regulär* bzw. *normal*, wenn das Paar $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*)$ regulär bzw. normal ist. (Vgl. [1], Definition 2.3.) Aus dieser Definition folgt leicht:

(3.10) *Der Verband* $\mathfrak{M}$ *ist genau dann normal, wenn aus* $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ *die Existenz von* $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}^*$ *folgt mit*

$$M_1 \subset N_1, \quad M_2 \subset N_2, \quad N_1 \cap N_2 = \emptyset.$$

Aus (3.5) bis (3.9) erhält man nun:

(3.11) *Ist* $\mathfrak{M}$ *ein normaler Verband, so ist* $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$ *eine symmetrische topogene Struktur auf* E. *Die* $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$*-runden Filter fallen mit den* $\mathfrak{M}$-$\mathfrak{M}^*$*-Filtern zusammen. Die in bezug auf* $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$ *maximalen runden Filter* $\mathfrak{s}$ *stehen mittels* $\mathfrak{s} = \mathfrak{M}^*(\mathfrak{m})$ *mit den Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filtern* $\mathfrak{m}$ *in eineindeutiger Beziehung. Ist noch* $\mathfrak{M}$ *regulär, so bildet* $\mathfrak{M}^*$ *eine Basis der zu* $\mathcal{T}^p_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$ *assoziierten klassischen Topologie. Die Beziehung* $\mathfrak{M}^*(\mathfrak{m}) \to x$ $(\mathcal{T}^p_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*})$ *ist, für einen Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filter* $\mathfrak{m}$, *mit* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(x)$ *gleichbedeutend.*

Für einen symmetrischen topogenen Raum $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}]$, wobei $\mathfrak{M}$ ein regulärer und normaler Verband ist, läßt nun eine doppelte Kompaktifizierung sich folgendermaßen angeben:

(3.12) *Sei* $\mathfrak{M}$ *ein regulärer und normaler Verband in* E. *Für* $x \in E$ *sei* $\mathfrak{m}(x)$ *der zu* x *gehörende triviale Ultra-*$\mathfrak{M}$*-Filter, und eine Menge* $E' \supset E$ *sei so ausgewählt, daß zu den Elementen* $x \in E' - E$ *mittels* $\mathfrak{m}(x)$ *die nichttrivialen Ultra-M-Filter eineindeutig zugeordnet werden. Für* $X \subset E$ *sei*

$$m(X) = \{x : X \in \mathfrak{m}(x)\}, \tag{3.13}$$

ferner sei, mit der Bezeichnung $\prec = \prec_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$,

(3.14) $A' \prec^m B' \Leftrightarrow$ *es gibt* $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{M}^*$ *mit* $M \subset N$, $A' \subset m(M)$, $m(N) \subset B'$

gesetzt. Dann ist $\mathcal{O}^m = \{\prec^m\}$ *eine symmetrische topogene Struktur auf* E', *und* $[E', \mathcal{O}^m]$ *ist eine doppelte Kompaktifizierung von* $[E, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}]$.

Beweis. Wir setzen

$$\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{M}^*(\mathfrak{m}(x))$$

für $x \in E' - E$ und bezeichnen mit $\mathfrak{s}(x)$ den zu x gehörenden Fundamentalfilter für $x \in E$. Nach (3.3) und (3.11) hat man dann den Punkten $x \in E' - E$ die in bezug auf $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*} = \mathcal{O}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$ nichtkonvergenten, komprimierten, runden Filter $\mathfrak{s}(x)$ eineindeutig zugeordnet.

Wir zeigen nun, daß die durch (3.1) und (3.2) definierte Ordnung $\prec^h$ mit der durch (3.13) und (3.14) definierten Ordnung $\prec^m$ zusammenfällt. In der Tat gilt $A' \prec^h B'$ nach (3.2) genau dann, wenn es Mengen A und B gibt mit

$$A \prec_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*} B, \quad A' \subset h(A), \quad h(B) \subset B',$$

also nach (3.5) genau dann, wenn es Mengen $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{M}^*$ gibt mit

$$M \subset N, \quad A' \subset h(M), \quad h(N) \subset B' \tag{3.15}$$

(man beachte, daß $X \subset Y \subset E$ offenbar $h(X) \subset h(Y)$ zur Folge hat). Aus $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{M}^*$ folgt nun

$$h(M) \subset m(M), \quad h(N) = m(N), \quad (M \in \mathfrak{M}, \quad N \in \mathfrak{M}^*). \tag{3.16}$$

Für $x \in h(M)$, d.h. $M \in \mathfrak{s}(x)$ hat man nämlich entweder $x \in E$, also $x \in M$ und daher auch $M \in \mathfrak{m}(x)$, oder $x \in E' - E$, $M \in \mathfrak{M}^*(\mathfrak{m}(x))$ und erst recht $M \in \mathfrak{m}(x)$; in beiden Fällen ergibt sich also $x \in m(M)$. Aus $x \in h(N)$, d.h. $N \in \mathfrak{s}(x)$ folgt, für $x \in E$, offenbar $x \in N$ und wegen der Regularität von $\mathfrak{M}$ auch $N \in \mathfrak{m}(x)$, für $x \in E' - E$ aber $N \in \mathfrak{M}^*(\mathfrak{m}(x))$ und erst recht $N \in \mathfrak{m}(x)$. Schließlich ergibt sich aus $x \in m(N)$, d.h. $N \in \mathfrak{m}(x)$, für $x \in E$ offenbar auch $x \in N$, also $N \in \mathfrak{s}(x)$, für $x \in E' - E$ ebenfalls $N \in \mathfrak{M}^*(\mathfrak{m}(x)) = \mathfrak{s}(x)$. Besteht nun (3.15), so hat man nach (3.16)

$$h(M) \subset m(M), \quad m(N) = h(N),$$

also

$$A' \subset m(M), \quad m(N) \subset B', \quad M \in \mathfrak{M}, \quad N \in \mathfrak{M}^*; \tag{3.17}$$

umgekehrt folgt aus (3.17) und $M \subset N$ wegen der Normalität von $\mathfrak{M}$

$$M \subset N_1 \subset M_1 \subset N, \quad M_1 \in \mathfrak{M}, \quad N_1 \in \mathfrak{M}^*,$$

also nach (3.16) und der evidenten Beziehung

$$X \subset Y \subset E \Rightarrow m(X) \subset m(Y)$$

auch

$$m(M) \subset m(N_1) = h(N_1) \subset h(M_1), \quad h(N) = m(N),$$

also

$$A' \subset h(M_1), \quad h(N) \subset B', \quad M_1 \in \mathfrak{M}, \quad N \in \mathfrak{M}^*.$$

Daher ist $A' \prec^h B'$ tatsächlich mit $A' \prec^m B'$ gleichbedeutend.

Um den Beweis zu vollenden müssen wir noch zeigen, daß $<^m$ eine symmetrische topogene Ordnung auf E' ist. Das ist eine einfache Folge der Formeln

$$(3.18) \qquad m(X \cap Y) = m(X) \cap m(Y) \qquad (X, Y \subset E),$$

$$(3.19) \qquad m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) \cup m(M_2) \qquad (M_1, M_2 \in \mathfrak{M}),$$

$$(3.20) \qquad m(N_1 \cup N_2) = m(N_1) \cup m(N_2) \qquad (N_1, N_2 \in \mathfrak{M}^*),$$

$$(3.21) \qquad m(E - M) = E' - m(M) \qquad (M \in \mathfrak{M}),$$

$$(3.22) \qquad m(E - N) = E' - m(N) \qquad (N \in \mathfrak{M}^*).$$

Hier ist (3.18) eine unmittelbare Folge der Definition (3.13). (3.21) und (3.22) ergeben sich aus der Tatsache, daß die Filter $\mathfrak{m}(x)$ nach (2.12) Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter sind, wobei $\mathfrak{R}$ den von $\mathfrak{M}$ erzeugten Ring bezeichnet, der natürlich auch den Verband $\mathfrak{M}^*$ enthält; daraus folgt nach (2.10), daß ein Ultra-$\mathfrak{M}$-Filter $\mathfrak{m}(x)$ von den Mengen M und $E - M$ bzw. N und $E - N$ eine und nur eine enthält. Schließlich folgen (3.19) und (3.20) aus (3.18), (3.21) und (3.22):

$$\begin{aligned} m(M_1 \cup M_2) &= E' - m(E - (M_1 \cup M_2)) = E' - m((E - M_1) \cap (E - M_2)) = \\ &= E' - (m(E - M_1) \cap m(E - M_2)) = \\ &= (E' - m(E - M_1)) \cup (E' - m(E - M_2)) = \\ &= m(M_1) \cup m(M_2), \end{aligned}$$

und man kann M_1 durch N_1, M_2 durch N_2 ersetzen. Damit ist (3.12) bewiesen.

Es sei noch bemerkt:

(3.23) *Unter den Voraussetzungen von* (3.12) *ist* $m(\mathfrak{M})$ *ein regulärer und normaler Verband in* E',

$$m(\mathfrak{M})^* = \{E' - m(M) : M \in \mathfrak{M}\} = m(\mathfrak{M}^*)$$

und

$$(3.24) \qquad \mathcal{T}^m = \mathcal{T}_{m(\mathfrak{M}),\, m(\mathfrak{M}^*)}.$$

Beweis. Aus (3.18) und (3.19) folgt, daß $m(\mathfrak{M})$ ein Verband in E' ist (nämlich $m(E) = E'$), und die Gleichung $m(\mathfrak{M})^* = m(\mathfrak{M}^*)$ ergibt sich aus (3.21). Ist $x \in m(N)$, $N \in \mathfrak{M}^*$, so ist $N \in \mathfrak{m}(x)$, und es gibt $M \in \mathfrak{M}$ mit $M \in \mathfrak{m}(x)$, $M \subset N$, also mit $x \in m(M) \subset m(N)$. Somit ist $m(\mathfrak{M})$ ein regulärer Verband. Aus $m(M) \subset m(N)$, $M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{M}^*$ folgt nun $M \subset N$, da

$$(3.25) \qquad m(M) \cap E = M \quad (M \in \mathfrak{M}), \quad m(N) \cap E = N \quad (N \in \mathfrak{M}^*)$$

ist, woraus die Inklusionen $\subset$ trivial sind, im ersten Falle ferner auch das Zeichen $\supset$, im zweiten dagegen muß noch die Regularität von $\mathfrak{M}$ in Betracht genommen werden. Dann gibt es $M_1 \in \mathfrak{M}$ und $N_1 \in \mathfrak{M}^*$ mit $M \subset N_1 \subset M_1 \subset N$ und

$$m(M) \subset m(N_1) \subset m(M_1) \subset m(N),$$
$$m(M_1) \in m(\mathfrak{M}), \quad m(N_1) \in m(\mathfrak{M})^*.$$

Also $m(\mathfrak{M})$ ist ein normaler Verband. Schließlich ist (3.24) eine unmittelbare Folge von (3.14).

Die Voraussetzungen von (3.12) sind speziell erfüllt, wenn der Verband $\mathfrak{M}$ ein Ring in E ist. Dann ist nämlich $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$, woraus sich leicht ergibt, daß der Ring $\mathfrak{M}$ ein regulärer und normaler Verband ist. Die Ordnung $<_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}^*}$ kann man in diesem Fall so beschreiben:

$$A <_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}^*} B \Leftrightarrow \text{ es gibt } M \in \mathfrak{M} \text{ mit } A \subset M \subset B,$$

so daß $<_{\mathfrak{M},\mathfrak{M}^*}$ einfach mit der vom Mengensystem $\mathfrak{M}$ im Sinne von [2], (2.1) erzeugten Ordnung identisch ist. Ebenso wird $<^m$ nach (3.14) vom Mengensystem $m(\mathfrak{M})$ erzeugt:

$$A' <^m B' \Leftrightarrow \text{ es gibt } M \in \mathfrak{M} \text{ mit } A' \subset m(M) \subset B'.$$

Nach (3.18), (3.19) und (3.21) ist $m(\mathfrak{M})$ ebenfalls ein Ring in E'.

Im folgenden untersuchen wir allgemeiner den Fall einer von einem Verband erzeugten topogenen Ordnung.

4. Es sei nun $\mathfrak{P}$ ein Verband in E. Nach (3.4) ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ offenbar ein reguläres und normales Paar von Verbänden. Mit der Bezeichnung $<_{\mathfrak{P}} = <_{\mathfrak{P},\mathfrak{P}}$ entnimmt man (3.5):

(4.1) *Ist $\mathfrak{P}$ ein Verband in E, so wird durch*

$$A <_{\mathfrak{P}} B \Leftrightarrow \textit{es gibt } P \in \mathfrak{P} \textit{ mit } A \subset P \subset B \tag{4.2}$$

die von $\mathfrak{P}$ im Sinne von [2], (2.1) *erzeugte topogene Ordnung definiert.*

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{P}} = \{<_{\mathfrak{P}}\}$$

ist eine topogene Struktur auf E. Die in bezug auf $\mathcal{T}_{\mathfrak{P}}$ runden Filter fallen mit den $\mathfrak{P}$-Filtern zusammen.

Aus [2], (2.9) und [2], (3.52) ergibt sich nun leicht mit Hilfe von (2.8) und (2.9):

(4.3) *Ist $\mathfrak{P}$ ein Verband, so gelten die Formeln*

$$<^c_{\mathfrak{P}} = <_{\mathfrak{P}^*}, \quad <^s_{\mathfrak{P}} = <_{\mathfrak{R}},$$

wobei $\mathfrak{R}$ den von $\mathfrak{P}$ erzeugten Ring bezeichnet.

Aus (3.7) folgt leicht:

(4.4) *Der Verband $\mathfrak{P}$ ist eine Basis für die zur Topologie $\mathcal{T}^p_{\mathfrak{P}}$ assoziierte klassische Topologie.*

Die Konstruktion einer doppelten Kompaktifizierung von $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}]$ kann nun folgendermaßen geschehen:

(4.5) *$\mathfrak{P}$ sei ein Verband in E, $\mathfrak{R}$ bezeichne den von $\mathfrak{P}$ erzeugten Ring, und wir setzen $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}^*$. Für $x \in E$ sei $\mathfrak{r}(x)$ der zu x gehörende triviale Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter, und $E' \supset E$ sei eine solche Menge, daß $\mathfrak{r}(x)$ den Elementen von $x \in E' - E$ eineindeutig die nichttrivialen Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter zuordnet. Für $X \subset E$ sei*

$$r(X) = \{x : X \in \mathfrak{r}(x)\}. \tag{4.6}$$

und es werde für eine beliebige topogene Ordnung $<$ auf E

$$A' <^r B' \Leftrightarrow \textit{es gibt } A, B \textit{ mit } A < B,\ A' \subset r(A),\ r(B) \subset B' \tag{4.7}$$

gesetzt. Dann sind $\prec^r_{\mathfrak{P}}$, $\prec^r_{\mathfrak{Q}} = \prec^{cr}_{\mathfrak{P}}$, $\prec^r_{\mathfrak{R}} = \prec^{sr}_{\mathfrak{P}}$ *topogene Ordnungen auf* E', *die der Reihe nach von den Systemen* $r(\mathfrak{P}), r(\mathfrak{Q}), r(\mathfrak{R})$ *erzeugt werden, und* $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}]$, $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{Q})}]$, $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{R})}]$ *sind doppelte Kompaktifizierungen der Reihe nach von* $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}]$, $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}]$, $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{R}}]$.

Beweis. Wendet man (3.11) für $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ an, so sieht man, daß die in bezug auf $\mathcal{T}^s_{\mathfrak{P}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{R}}$ (s. (4.3)) nichtkonvergenten, komprimierten, runden Filter die Filter $\mathfrak{R}(\mathfrak{r}(x)) = \mathfrak{r}(x)$ mit $x \in E' - E$ sind (vgl. auch (3.3)). Setzt man daher $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{r}(x)$ für $x \in E' - E$, während $\mathfrak{s}(x)$ für $x \in E$ den zu x gehörenden Fundamentalfilter bezeichnet, so wird, mit den Bezeichnungen (3.1), (3.2), $\prec^h_{\mathfrak{P}} = \prec^r_{\mathfrak{P}}$. In der Tat, $A' \prec^h_{\mathfrak{P}} B'$ besteht genau dann, wenn es Mengen A, B gibt mit $A \prec_{\mathfrak{P}} B$, $A' \subset h(A)$, $h(B) \subset B'$, also genau dann, wenn es eine Menge P gibt mit

$$A' \subset h(P) \subset B', \quad P \in \mathfrak{P}. \tag{4.8}$$

Nun folgt aus (3.16), angewendet für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* = \mathfrak{R}$, die Gleichung

$$h(R) = r(R) \quad (R \in \mathfrak{R}), \tag{4.9}$$

insbesondere $h(P) = r(P)$ für $P \in \mathfrak{P}$. Somit ist $A' \prec^h_{\mathfrak{P}} B'$ mit der Existenz von P mit

$$A' \subset r(P) \subset B', \quad P \in \mathfrak{P} \tag{4.10}$$

gleichwertig, also mit der Existenz von A, B mit

$$A \prec_{\mathfrak{P}} B, \quad A' \subset r(A), \quad r(B) \subset B',$$

d.h. mit $A' \prec^r_{\mathfrak{P}} B'$ nach (4.7). Aus (4.10) sieht man, daß $\prec^r_{\mathfrak{P}}$ von $r(\mathfrak{P})$ erzeugt wird. (3.18) und (3.19) (ebenfalls für $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$ angewendet) entnimmt man, daß $r(\mathfrak{P})$ ein Verband in E' ist, so daß $\prec^r_{\mathfrak{P}}$ eine topogene Ordnung auf E' darstellt, und $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}]$ ist tatsächlich eine doppelte Kompaktifizierung für $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}]$, da $\prec^{hq}_{\mathfrak{P}} = \prec^r_{\mathfrak{P}}$ besteht.

Setzt man $\mathfrak{Q}$ an die Stelle von $\mathfrak{P}$, so geht $\mathfrak{P}$ offenbar in $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ in sich selbst über, so daß $\prec^r_{\mathfrak{Q}}$ von $r(\mathfrak{Q})$ erzeugt wird und $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{Q})}]$ eine doppelte Kompaktifizierung von $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}]$ ist, während die Gleichung $\prec_{\mathfrak{Q}} = \prec^c_{\mathfrak{P}}$ aus (4.3) folgt. Gibt man endlich die Rolle von $\mathfrak{P}$ dem Ring $\mathfrak{R}$, so gehen auch $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ über, und man erhält die übrigen Behauptungen.

Versteht man noch sinngemäß, für einen Verband $\mathfrak{V}$ in E', unter $\mathfrak{V}^*$ die Gesamtheit der Mengen $E' - V'$ $(V' \in \mathfrak{V})$, so kann man noch behaupten:

(4.11) *Unter den Voraussetzungen von* (4.5) *ist* $r(\mathfrak{P})^* = r(\mathfrak{P}^*) = r(\mathfrak{Q})$, *und* $r(\mathfrak{R})$ *ist der von* $r(\mathfrak{P})$ *erzeugte Ring.*

Das folgt aus (2.7) bis (2.9) mit Hilfe der Formeln

$$r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2), \tag{4.12}$$

$$r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2), \tag{4.13}$$

$$r(E - R) = E' - r(R) \tag{4.14}$$

$$(R, R_1, R_2 \in \mathfrak{R}),$$

die sich aus (3.18) bis (3.22) mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$ ergeben.

In (4.5) wurde die nach [2], (16.95) im wesentlichen eindeutig bestimmte doppeltkompakte Erweiterung von $[E, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}]$ angegeben. Kompakte Erweiterungen kann es aber noch andere geben. Mit diesen beschäftigt sich der folgende Satz:

(4.15) *Unter den Voraussetzungen von* (4.5) *sei E'' die Menge derjenigen $x \in E'$, für die $\mathfrak{r}(x)$ ein Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter ist. Dann ist jeder Unterraum $[K, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|K]$ mit $E'' \subset K \subset E'$ kompakt, und $[E^*, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E^*]$ ist, mit der Bezeichnung $E^* = E \cup E''$, der kleinste E enthaltende kompakte Unterraum von $[E', \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}]$. $E'' \supset E$ gilt genau dann, wenn $\mathfrak{Q}$ ein regulärer Verband ist; in diesem Fall ist also $[E'', \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E'']$ der kleinste E enthaltende kompakte Unterraum von $[E', \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}]$.*

Beweis. Nach (2.12) ist jeder Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter ein Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter, so daß alle Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter tatsächlich unter den Filtern $\mathfrak{r}(x)$ $(x \in E')$ vorkommen, und $\{\mathfrak{r}(x) : x \in E''\}$ stellt alle Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter dar.

Nach (4.4) und (4.5) bildet $r(P)$ eine Basis für die zu $\mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}$ assoziierte klassische Topologie. Daher folgt die Kompaktheit von $[K, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|K]$ für $E'' \subset K \subset E'$ aus der Tatsache, daß man aus jeder Überdeckung

$$E'' \subset \bigcup_{i \in I} r(P_i) \qquad (P_i \in \mathfrak{P}) \tag{4.16}$$

von E'' eine endliche Überdeckung sogar von E' auswählen kann. Wäre es nicht der Fall, so gälte, für jede endliche Teilmenge $I' \subset I$, die Ungleichung

$$\bigcup_{i \in I'} r(P_i) = E',$$

also nach (4.12)

$$\bigcup_{i \in I'} P_i \neq E \qquad (I' \subset I \text{ ist endlich}).$$

Die Mengen

$$E - \bigcup_{i \in I'} P_i \in \mathfrak{Q} \qquad (I' \subset I \text{ ist endlich})$$

bilden also einen Raster, und es gibt nach (2.1) und (2.2) einen Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter, der alle diese Mengen enthält. Nach dem oben gesagten ist dieser Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter von der Gestalt $\mathfrak{r}(x_0)$ mit einem passenden Punkt $x_0 \in E''$, so daß

$$E - \bigcup_{i \in I'} P_i \in \mathfrak{r}(x_0), \qquad \bigcup_{i \in I'} P_i \notin \mathfrak{r}(x_0), \qquad x_0 \notin r\Big(\bigcup_{i \in I'} P_i\Big) = \bigcup_{i \in I'} r(P_i)$$

für jede endliche Menge $I' \subset I$. Das steht mit (4.16) im Widerspruch.

Es sei nun E_1 eine Menge mit der Eigenschaft, daß $E \subset E_1 \subset E'$ und der Unterraum $[E_1, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_1]$ kompakt ist. Wir zeigen, daß E_1 die Menge E'' enthält. Aus $x \in E'' - E$ folgt nämlich, daß $\mathfrak{r}(x)$ ein Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter und daher in bezug auf $\mathcal{O}_{\mathfrak{Q}}$ komprimiert ist (vgl. (3.3) und (4.1)). Dann ist aber $\mathfrak{r}(x)$ auch in bezug auf $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}^c_{\mathfrak{Q}}$ komprimiert ((4.3) und [2], (15.47)), ferner auch in bezug auf $\mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_1$ ([2], (15.52)). Daher konvergiert $\mathfrak{r}(x)$ in bezug auf $\mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_1$ gegen einen Punkt $y \in E_1$. Aus $x \in E'' - E$, $y \neq x$ würde aber $\mathfrak{r}(y) \neq \mathfrak{r}(x)$ folgen, so daß es nach (2.10) zwei Mengen $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ geben müßte mit $R_1 \in \mathfrak{r}(y)$, $R_2 \in \mathfrak{r}(x)$, $R_1 \cap R_2 = 0$. Im Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter $\mathfrak{r}(x)$ gäbe es noch eine Menge $Q \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{r}(x)$

mit $Q \subset R_2$, also $R_1 \cap Q = 0$. Dann wäre aber $E - Q = P \in \mathfrak{P}$, $P \supset R_1 \in \mathfrak{r}(y)$, also $y \in r(P)$ wäre eine solche Umgebung von y in bezug auf die Topologie $\mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}$ (vgl. (4.4) und (4.5)), die die Menge $Q \in \mathfrak{r}(x)$ nicht trifft, im Widerspruch mit $\mathfrak{r}(x) \to \nu(\mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})} | E_1)$. Daher muß $y = x$ bestehen, und $x \in E_1$, $E'' - E \subset E_1$, $E'' \subset E_1$.

Die Bedingung $E'' \supset E$ besagt, daß alle triviale Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter auch Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter sind, was offenbar der Fall ist, sobald sie alle $\mathfrak{Q}$-Filter sind. Ist nun, für $x \in E$, der triviale Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter $\mathfrak{r}(x)$ ein $\mathfrak{Q}$-Filter, so gilt $P \in \mathfrak{r}(x)$ für jede Menge P mit $x \in P \in \mathfrak{P}$, so daß es eine Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ mit $x \in Q \subset P$ geben muß, und der Verband $\mathfrak{Q}$ ist regulär. Ist umgekehrt $\mathfrak{Q}$ regulär, so sei $x \in R \in \mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}$ nach (2.9) der vom Halbverband aller Mengen der Gestalt $P \cap Q$ ($P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$) erzeugte Verband ist, muß $R \in \mathfrak{r}(x)$ nach (2.12) eine solche Menge von $\mathfrak{r}(x)$ enthalten, also $x \in P \cap Q \subset R$, $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$. Aus der Regularität von $\mathfrak{Q}$ folgt die Existenz von $Q_1 \in \mathfrak{Q}$ mit $x \in Q_1 \subset P$, so daß $x \in Q_1 \cap Q \subset R$, $Q_1 \cap Q \in \mathfrak{Q}$, w.z.b.w.

Um die Punkte von E'' näher zu charakterisieren sei zuerst bemerkt:

(4.17) *Unter den Voraussetzungen von* (4.5) *ist, für* $Q \in \mathfrak{Q}$, $r(Q)$ *mit der abgeschlossenen Hülle von* Q *in bezug auf* $\mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}$ *identisch.*

Beweis. Da $r(\mathfrak{P})$ nach (4.4) eine Basis für $\mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}$ bildet und $r(Q)$ nach (4.11) in bezug auf diese Topologie abgeschlossen ist, gilt $\bar{Q} \subset r(Q)$, aus (2.10) folgt nämlich

$$r(R) \cap E = R \qquad (R \in \mathfrak{R}), \tag{4.18}$$

also speziell $Q \subset r(Q)$. Andererseits folgt aus $x \in r(Q)$ und $x \in r(P)$ mit $P \in \mathfrak{P}$ offenbar $Q \in \mathfrak{r}(x)$, $P \in \mathfrak{r}(x)$, also $P \cap Q = 0$ und nach (4.18) erst recht $r(P) \cap Q = 0$, so daß $x \in \bar{Q}$.

Es sei nun in einem topologischen Raum T ein Unterraum $U \subset T$ gegeben, und $\mathfrak{S}$ sei ein System von Teilmengen von U. Wir werden sagen, daß ein Punkt $x \in T$ *aus* U $\mathfrak{S}$*-erreichbar* ist, wenn es in jeder Umgebung V von x eine Menge $S \in \mathfrak{S}$ gibt mit $x \in \bar{S} \subset V$. Mit dieser Terminologie kann man nun behaupten:

(4.19) *Unter den Voraussetzungen von* (4.5) *besteht* E'' *genau aus den Punkten von* $[E', \mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}]$, *die aus* E $\mathfrak{Q}$*-erreichbar sind.*

Beweis. Aus $x \in E''$ folgt, daß $\mathfrak{r}(x)$ ein $\mathfrak{Q}$-Filter ist. Für $x \in r(P)$, $P \in \mathfrak{P}$, d.h. $P \in \mathfrak{r}(x)$ gibt es also eine Menge $Q \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{r}(x)$, $Q \subset P$, so daß $x \in r(Q) = Q$ (s. (4.17)), $Q \subset r(P)$ (s. (4.18)) ist.

Wenn $x \in E'$ aus E $\mathfrak{Q}$-erreichbar ist, so gibt es zu $P \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{r}(x)$ als Folge von $x \in r(P)$ eine Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ mit $Q \subset r(P)$, $x \in \bar{Q} = r(Q)$, also auch mit $Q \subset P = r(P) \cap E$ (vgl. (4.18)). Nun enthält eine beliebige Menge $S \in \mathfrak{r}(x)$ eine Menge $R \subset S$ mit $R \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{r}(x)$, also nach (2.7), (2.9) und (2.12) auch eine Menge $P \cap Q \subset R$ mit $P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$, $P \cap Q \in \mathfrak{r}(x)$. Nach dem oben gesagten gibt es eine Menge $Q_1 \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{r}(x)$ mit $Q_1 \subset P$, so daß man $Q_1 \cap Q \subset R \subset S$, $Q_1 \cap Q \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{r}(x)$ erhält. Das zeigt, daß $\mathfrak{r}(x)$ ein $\mathfrak{Q}$-Filter und erst recht ein Ultra-$\mathfrak{Q}$-Filter ist.

Eine Verbindung der Methoden von **3** und **4** wird durch folgenden Satz hergestellt:

(4.20) *Mit den Bezeichnungen von* (4.5), (4.15) *und* (3.12) *sei* $\mathfrak{Q}$ *ein regulärer und normaler Verband und* $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$. *Dann ist*

$$\mathcal{T}^p_{r(\mathfrak{P})}|E'' = \mathcal{T}^p_{m(\mathfrak{M}),\, m(\mathfrak{M}^*)}. \tag{4.21}$$

Beweis. Nach (4.15) ist $\mathfrak{r}(x)$ für $x \in E''$ ein Ultra-$\mathfrak{M}$-Filter, so daß die Menge E'' von (4.15) mit der Menge E' von (3.12) identifiziert werden kann. Dann wird auch $\mathfrak{r}(x) = \mathfrak{m}(x)$ für $x \in E''$, also $r(X) \cap E'' = m(X)$ für $X \subset E$. Nach (3.23) und (3.7), bzw. nach (4.4) bildet $m(\mathfrak{M}^*) = \{r(P) \cap E'' : P \in \mathfrak{P}\}$ eine Basis für die rechte bzw. linke Seite von (4.21).

Unsere Ergebnisse bieten auch die Möglichkeit die hier betrachteten Erweiterungen topogener Räume einfach zu charakterisieren.

(4.22) *Unter den Voraussetzungen von* (4.5) *sei* $E \subset E_0 \subset E'$. *Dann besitzt der topogene Raum* $[E_0, \mathcal{T}_0] = [E_0, \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}|E_0]$ *folgende Eigenschaften:*

(4.23) $[E, \mathcal{T}_{\mathfrak{P}}]$ *ist ein Unterraum von* $[E_0, \mathcal{T}_0]$,

(4.24) *Für* $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$ *ist* $\overline{Q_1 \cap Q_2} = \bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2$, *wobei* $\bar{X}$ *die abgeschlossene Hülle von* X *in bezug auf* $[E_0, \mathcal{T}^p_0]$ *bezeichnet,*

(4.25) $\mathcal{T}_0$ *wird vom System* $\{E_0 - Q : Q \in \mathfrak{Q}\}$ *erzeugt,*

(4.26) $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *ist bis auf* E *relativ separiert.*

Aus $E^* = E \cup E'' \subset E_0 \subset E'$ *folgt ferner*

(4.27) $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *ist kompakt.*

Für $E \subset E_0 \subset E^*$ *gilt noch*

(4.28) *Jeder Punkt von* $E_0 - E$ *ist aus* E $\mathfrak{Q}$*-erreichbar,*

und statt (4.26) *sogar*

(4.29) *Für* $x \in E_0 - E$, *ist* $\{x\}$ $\mathcal{T}^p_0$*-abgeschlossen.*

Setzt man dagegen $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}^p_{r(\mathfrak{P})}|E_0$, *so enthält der topologische Raum* $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *den Raum* $[E, \mathcal{T}^p_p]$ *als dichten Unterraum, erfüllt* (4.24), (4.26) *und statt* (4.25)

(4.30) $\{\bar{Q} : Q \in \mathfrak{Q}\}$ *ist eine Basis für die abgeschlossenen Mengen.*

Beweis. Für $E \subset E_0 \subset E'$ und $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}|E_0$ folgen (4.23) und (4.26) aus den allgemeinen Eigenschaften der doppelten Kompaktifizierung (s. [2], S. 265). (4.24) folgt aus (4.13) und (4.17), da

$$\bar{Q} = r(Q) \cap E_0 \quad (Q \in \mathfrak{Q}),$$

und (4.25) ist Folge von derselben Formel und (4.14), denn

$$E_0 - \bar{Q} = r(E - Q) \cap E_0 \quad (Q \in \mathfrak{Q}).$$

Das Bestehen von (4.27) bzw. (4.28) ergibt sich aus (4.15) bzw. (4.19). Um (4.29) einzusehen, sei $x \in E_0 - E$, $y \in E_0$, $x \neq y$. Wir zeigen, daß y eine x nicht enthaltende Umgebung besitzt. Nach (4.26) besitzt x im entgegengesetzten Falle eine y nicht enthaltende Umgebung, die natürlich in der Form $r(P) \cap E_0$ mit $P \in \mathfrak{P}$

gewählt werden darf. Nun enthält aber $r(P)\cap E_0$ nach (4.28) eine Menge $r(Q)\cap E_0$ mit $Q\in\mathfrak{Q}$, $x\in r(Q)\cap E_0$, und $r(E-Q)\cap E_0$ ist die gesuchte Umgebung von y. Schließlich folgt (4.30) aus der Tatsache, daß die Mengen $r(P)\cap E_0 = E_0-\overline{E-P}$ $(P\in\mathfrak{P})$ eine Basis für die Topologie $\mathcal{T}^{\mathfrak{P}}_{r(\mathfrak{P})}|E_0$ bilden.

Umgekehrt kann man behaupten:

(4.31) *Genügt ein topogener Raum* $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *den Bedingungen* (4.23) *bis* (4.26) *unter den Vorasussetzungen von* (4.5), *so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus* f *von* $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *auf* $[E_1, \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}|E_1]$ *mit einer passend gewählten Menge* $E\subset E_1\subset E'$, *der die Punkte von* E *festhält. Erfüllt noch* $[E_0, \mathcal{T}_0]$ (4.27) *bzw.* (4.28) *bzw.* (4.27) *und* (4.29), *so ist* $E^*\subset E_1\subset E'$ *bzw.* $E\subset E_1\subset E^*$ *bzw.* $E_1 = E^*$.

Ist $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *ein topologischer Raum, der* $[E, \mathcal{T}^{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{P}}]$ *als dichten Unterraum enthält und dabei* (4.24), (4.26) *und* (4.30) *erfüllt, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homöomorphismus* f *von* $[E_0, \mathcal{T}_0]$ *auf* $[E_1, \mathcal{T}^{\mathfrak{P}}_{r(\mathfrak{P})}|E_1]$ *mit* $E\subset E_1\subset E'$ *und* $f(x) = x$ *für* $x\in E$. *Aus* (4.27) *bzw.* (4.28) *bzw.* (4.27) *und* (4.29) *folgt auch jetzt* $E^*\subset E_1\subset E'$ *bzw.* $E\subset E_1\subset E^*$ *bzw.* $E_1 = E^*$.

Beweis. $[E_0, \mathcal{T}_0]$ sei ein beliebiger topogener Raum mit den Eigenschaften (4.23) bis (4.26). Setzt man

$$h(P) = E_0-\overline{E-P} \qquad (P\in\mathfrak{P}), \tag{4.32}$$

$$k(Q) = \bar{Q} \qquad (Q\in\mathfrak{Q}), \tag{4.33}$$

so gilt offenbar

$$k(Q_1\cup Q_2) = k(Q_1)\cup k(Q_2) \qquad (Q_1, Q_2\in\mathfrak{Q}), \tag{4.34}$$

und aus (4.24) erhält man

$$k(Q_1\cap Q_2) = k(Q_1)\cap k(Q_2) \qquad (Q_1, Q_2\in\mathfrak{Q}), \tag{4.35}$$

schließlich

$$k(\emptyset) = \emptyset,\ k(E) = E_0. \tag{4.36}$$

Die letzte Beziehung folgt aus der Tatsache, daß $\emptyset\prec_0\emptyset$ mit der Bezeichnung $\mathcal{T}_0 = \{\prec_0\}$, woraus nach (4.25) die Existenz von $Q\in\mathfrak{Q}$ mit $E_0 = \bar{Q}$ folgt, so daß auch $k(E) = \bar{E} = E_0$. Somit ist $\mathfrak{Q}' = \{k(Q) : Q\in\mathfrak{Q}\}$ ein Verband in E_0, ferner gilt

$$E_0-k(Q) = h(E-Q) \qquad (Q\in\mathfrak{Q})$$

nach (4.32) und (4.33), so daß $\mathfrak{Q}'^* = \{h(P) : P\in\mathfrak{P}\}$ ist; den letzten Verband bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}'$. Nach (4.25) wird $\mathcal{T}_0$ vom Verband $\mathfrak{P}'$ erzeugt. Aus (2.7) bis (2.9) sieht man, daß der von $\mathfrak{P}'$ erzeugte Ring $\mathfrak{R}'$ aus den endlichen Vereinigungen von Mengen der Gestalt $h(P)\cap k(Q)$ $(P\in\mathfrak{P}, Q\in\mathfrak{Q})$ besteht, und wir wissen aus (4.3), daß $\mathfrak{R}'$ die topogene Struktur $\mathcal{T}^s_0$ erzeugt.

Nun ist E in $[E_0, \mathcal{T}^s_0]$ dicht. Dazu braucht man nur zu zeigen, daß jede nichtleere Menge $h(P)\cap k(Q)$ mit $P\in\mathfrak{P}$, $Q\in\mathfrak{Q}$ die Menge E trifft, denn diese Mengen bilden nach den oben gesagten eine Basis für die Topologie $\mathcal{T}^{sp}_0$. Aus

$P \in \mathfrak{P}$, $Q \in \mathfrak{Q}$, $h(P) \cap k(Q) \cap E = \emptyset$ folgt aber $P \cap Q = \emptyset$, denn $k(Q) \cap E = \bar{Q} \cap E = Q$ nach (4.33) und $h(P) \cap E = E - \overline{E-P} = E - (E-P) = P$ mit Rücksicht darauf, daß P offen, Q abgeschlossen in bezug auf $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ ist. Daraus ergibt sich $Q \subset E-P$, $\bar{Q} \subset \overline{E-P}$, $h(P) \cap k(Q) = \emptyset$.

Mit Hilfe von [2], (16.91) überzeugt man sich leicht davon, daß es eine einzige $(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})})$-stetige (oder sogar nur $(\mathcal{O}_0^{stp}, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}^{stp})$-stetige) Abbildung f von E_0 in E' gibt, die die Punkte von E festhält, und diese Abbildung ist sogar ein Isomorphismus von $[E_0, \mathcal{O}_0]$ auf $[E_1, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_1]$, wobei $E_1 = f(E_0)$ gesetzt wurde.

Besteht (4.27), so ist $[E_1, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_1]$ kompakt, also $E^* \subset E_1 \subset E'$ nach (4.15). Aus (4.28) folgt $E \subset E_1 \subset E^*$ gemäß (4.19), da jeder Punkt von $E_1 - E$ in diesem Fall aus E $\mathfrak{Q}$-erreichbar sein muß.

Seien nun (4.27) und (4.29) erfüllt. Es genügt zu zeigen, daß $[E_0, \mathcal{O}_0]$ jetzt auch die Eigenschaft (4.28) besitzt. Ist aber V eine offene Umgebung von $x \in E_0 - E$, so besitzt nach (4.25) und (4.29) jeder Punkt $y \in E_0 - V$ eine Umgebung der Form $h(P_y)$ mit $P_y \in \mathfrak{P}$, $x \notin h(P_y)$. Wegen der Kompaktheit der Menge $E_0 - V$ wird $E_0 - V \subset \bigcup_1^n h(P_{y_i})$ mit geeigneten y_i. Für $P = \bigcup_1^n P_{y_i} \in \mathfrak{P}$ gilt nun

$$k(E-P) = \bigcap_1^n k(E-P_{y_i}) = E_0 - \bigcup_1^n h(P_{y_i}) \subset V$$

und $x \in k(E-P)$, $E-P \in \mathfrak{Q}$.

Endlich sei $[E_0, \mathcal{O}_0]$ ein topologischer Raum mit den Eigenschaften (4.24), (4.26) und (4.30), der $[E, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}^p]$ als dichten Unterraum enthält. Dann bestehen wiederum die Formeln (4.34) bis (4.36) mit den Bezeichnungen (4.32) und (4.33). Somit sind $\mathfrak{Q}' = \{k(Q) : Q \in \mathfrak{Q}\}$ und $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}'^* = \{h(P) : P \in \mathfrak{P}\}$ wiederum Verbände in E_0, und es gilt für die von $\mathfrak{P}'$ erzeugte topogene Struktur $\mathcal{O}_1$ nach (4.30) die Beziehung $\mathcal{O}_1^p = \mathcal{O}_0$. Aus

$$(E_0 - \overline{E-P}) \cap E = E - \overline{E-P} = E - (E-P) = P \quad (P \in \mathfrak{P})$$

folgt, daß (4.23) für $\mathcal{O}_1$ statt $\mathcal{O}_0$ erfüllt ist, und dasselbe gilt auch für (4.24) bis (4.26). Nach dem schon bewiesenen Teil der Behauptung gibt es also einen einzigen, die Punkte von E festhaltenden Isomorphismus f von $[E_0, \mathcal{O}_1]$ auf $[E_1, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_1]$ mit $E \subset E_1 \subset E'$. f ist natürlich auch ein Homöomorphismus von $[E_0, \mathcal{O}_0]$ auf $[E_1, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}^p|E_1]$.

Ist umgekehrt g ein Homöomorphismus von $[E_0, \mathcal{O}_0]$ auf $[E_2, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}^p|E_2]$ mit $E \subset E_2 \subset E'$ und $g(x) = x$ für $x \in E$, so muß natürlich

$$g(k(Q)) = g(\bar{Q}) = r(Q) \cap E_2 \quad (Q \in \mathfrak{Q}),$$

$$g(h(P)) = g(E_0 - k(E-P)) = E_2 - r(E-P) = r(P) \cap E_2 \quad (P \in \mathfrak{P})$$

bestehen, so daß g auch ein Isomorphismus von $[E_0, \mathcal{O}_1]$ auf $[E_2, \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}|E_2]$ ist. Daraus folgen $E_2 = E_1$ und $g = f$. Der Rest ist evident, w.z.b.w.

Es ist noch zu bemerken, daß (4.28) und (4.29) im Falle, wenn $\mathfrak{Q}$ ein regulärer Verband ist, durch schärfere Aussagen ersetzt werden können:

(4.37) *Jeder Punkt von E_0 ist aus E $\mathfrak{Q}$-erreichbar,*

bzw.

(4.38) *Aus $x, y \in E_0$, $x \neq y$ folgt, daß y eine x nicht enthaltende Umgebung besitzt, sobald x und y nicht beide zu E gehören.*

In der Tat folgt die Behauptung von (4.37) für $x \in E$, $y \in E_0 - E$ aus der Tatsache, daß jede Umgebung von x nach (4.29) eine y nicht enthaltende Umgebung der Form $r(P) \cap E_0$ mit $P \in \mathfrak{P}$ enthält, und $x \in P$ hat wegen der Regularität von $\mathfrak{L}$ die Existenz von $Q \in \mathfrak{L}$ mit $x \in Q \subset P$ zur Folge, so daß $x \in Q = r(Q) \cap E_0 \subset r(P) \cap E_0$. Aus (4.37) ergibt sich (4.38) durch denselben Gedankengang, durch welchen (4.29) oben aus (4.28) abgeleitet wurde.

Die Bedingung (4.38) entspricht, für den Fall eines topologischen Raumes, derjenigen, daß $[E_0, \mathcal{O}_0]$ bis auf E ein T_1-Raum ist (vgl. [4]).

5. Um nun Anwendungen der obigen Ergebnisse zu erzielen, sei zuerst ein regulärer und normaler Verband $\mathfrak{M}$ in E betrachtet. Setzt man $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$, so sieht man aus (3.10) und (3.11), daß $\mathfrak{M}^*$ eine Basis für die Topologie $\mathcal{O}^p$, also $\mathfrak{M}$ selbst eine Basis für die abgeschlossenen Mengen derselben Topologie darstellt, und zwar eine *normale Basis* im Sinne der Arbeit [6]. Umgekehrt ist jede normale Basis $\mathfrak{M}$ für eine Topologie $\mathcal{O}_0$ offenbar ein regulärer und normaler Verband mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}^p_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$. Die zur symmetrischen topogenen Struktur $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$ assoziierte Nachbarschaftsrelation $\delta_{\mathfrak{M}}$ wird offenbar folgendermaßen definiert (vgl. [2], (7.26)):

(5.1) $A \bar{\delta}_{\mathfrak{M}} B \Leftrightarrow$ *es gibt* $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ *mit* $A \subset M_1$, $B \subset M_2$, $M_1 \cap M_2 = 0$.

Die in (3.12) beschriebene Konstruktion einer doppelten Kompaktifizierung des Raumes $[E, \mathcal{O}_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}]$ ergibt also im wesentlichen die Smirnovsche Kompaktifizierung des Nachbarschaftsraumes $[E, \delta_{\mathfrak{M}}]$ (vgl. [2], (16.108)). Nach (3.23) und (3.11) ist $m(\mathfrak{M}^*)$ eine Basis für die zu $\mathcal{O}^{mp}$ assoziierte klassische Topologie, d. h. für die zur Nachbarschaftsrelation $\delta_{\mathfrak{M}}$ im Sinne des Smirnovschen Satzes ([8], Sätze 10 und 11) gehörende Kompaktifizierung von $\mathcal{O}^p_{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*}$. Diese Konstruktion der Kompaktifizierung mit Hilfe einer normalen Basis ist genau diejenige, die in [6] beschrieben wurde.

Nach der Arbeit [6] kann man zwei wichtige Beispiele solcher Nachbarschaftsrelationen erwähnen, die mit Hilfe eines regulären und normalen Verbandes $\mathfrak{M}$ in der Gestalt (5.1) angegeben werden können. In einem vollständig regulären topologischen Raum bilden nämlich die Nullstellenmengen der stetigen reellen Funktionen einen solchen Verband $\mathfrak{Z}$, und die Relation $\delta_{\mathfrak{Z}}$ ist mit der Stone-Čechschen Nachbarschaftsrelation identisch: $A \bar{\delta}_{\mathfrak{Z}} B$ gilt genau dann, wenn A und B durch eine stetige Funktion getrennt werden können. Die entsprechende Kompaktifizierung ist die Stone-Čechsche, deren wohlbekannte, mittels Ultra-$\mathfrak{Z}$-Filter vorgenommene Konstruktion sich aus (3.12) als Spezialfall ergibt.

Dem anderen Beispiel liegt ein lokalkompakter topologischer Raum E zugrunde, der dem folgenden Trennungsaxiom genügt (vgl. z. B. [5]):

(5.2) *x und y haben fremde Umgebungen, sobald sie verschiedene Umgebungsfilter besitzen.*

Der Verband $\mathfrak{K}$ bestehe aus allen abgeschlossenen Mengen K, die entweder selbst kompakt sind, oder deren Komplementärmenge eine kompakte abge-

schlossene Hülle $\overline{E-K}$ besitzt. Daß $\mathfrak{K}$ tatsächlich ein Verband ist, kann man leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{K}^*$ aus allen offenen Mengen besteht, derer abgeschlossene Hülle oder Komplementärmenge kompakt ist, und daher $\mathfrak{K}^*$ offenbar ein Verband ist. Weiterhin ist $\mathfrak{K}$ nach [4], Satz 24 regulär und auch normal, da mindestens eine von zwei disjunkten Mengen $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$, z. B. K_1, notwendigerweise kompakt ist, so daß eine offene Menge H existiert mit $K_1 \subset H \subset \overline{H} \subset E - K_2$ und mit kompaktem $\overline{H}$ (vgl. die Bemerkung nach [4], Satz 24), woraus $H \in \mathfrak{K}^*$, $E - \overline{H} \in \mathfrak{K}^*$ folgt.

Nun erzeugt der Verband $\mathfrak{K}$ im Sinne von (5.1) die folgende, mit der Topologie von E offenbar verträgliche Nachbarschaftsrelation:

$$A \bar{\delta}_{\mathfrak{K}} B \Leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = 0 \text{ und mindestens eine der Mengen } \bar{A} \text{ und } \bar{B} \text{ is kompakt.}$$

Diese Relation $\delta_{\mathfrak{K}}$ ist bekanntlich die gröbste Nachbarschaftsrelation des lokalkompakten Raumes E, ihr entspricht die einpunktige Alexandroffsche Kompaktifizierung (im Falle eines nichtkompakten Raumes E). Wenn nämlich ein $\mathfrak{K}$-Filter $\mathfrak{f}$ eine kompakte Menge $K \in \mathfrak{K}$ enthält, so ist der Durchschnitt aller Mengen von $\mathfrak{f}$ nichtleer, so daß nur ein trivialer Ultra-$\mathfrak{K}$-Filter eine kompakte Menge $K \in \mathfrak{K}$ enthalten kann. Der einzige nichttriviale Ultra-$\mathfrak{K}$-Filter ist derjenige, der aus allen nichtkompakten Mengen $K \in \mathfrak{K}$ und der Obermengen derselben besteht.

Die Ergebnisse von **4** ermöglichen die Konstruktion von Kompaktifizierungen für topologische Räume. $[E, \mathcal{O}]$ sei ein topologischer Raum, $\mathfrak{B}$ eine Basis für die Topologie $\mathcal{O}$, $\mathfrak{P}$ bezeichne den kleinsten $\mathfrak{B}$ enthaltenden Verband, der aus den endlichen Vereinigungen der endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{B}$ besteht, also ebenfalls eine Basis für $\mathcal{O}$ ist. Mit den Bezeichnungen von (4.5) erhält man eine doppelte Kompaktifizierung von $[E, \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}]$, indem man eine geeignete Menge $E' \supset E$ wählt und den Punkten $x \in E$ die trivialen Ultra-$\mathfrak{K}$-Filter, den Punkten $x \in E' - E$ eineindeutig die nichttrivialen Ultra-$\mathfrak{K}$-Filter mittels $\mathfrak{r}(x)$ zuordnet, in der Form $[E', \mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}]$ (s. (4.5) und (4.11)). Dann ist $[E', \mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}]$ eine kompakte Erweiterung von $[E, \mathcal{O}^p_{\mathfrak{P}}] = [E, \mathcal{O}]$ (vgl. (4.4)), und $r(\mathfrak{P})$ bildet (ebenfalls nach (4.4)) eine Basis für $\mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}$. Mittels dieser Methode gehört also jeder Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{O}$ eine Kompaktifizierung $[E', \mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}]$ von $[E, \mathcal{O}]$.

Es ist zu beachten, daß $\mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}$ im allgemeinen von $\mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}$ verschieden ist, daß also $\mathcal{O}_{r(\mathfrak{P})}$ im allgemeinen keine Topologie, $r(\mathfrak{P})$ keine klassische Topologie ist. Das kann auch dann vorkommen, wenn man für $\mathfrak{P}$ den Verband aller offenen Mengen von $[E, \mathcal{O}]$ wählt, wenn also $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}$ ist. Dieser Sachverhalt wird durch folgendes Beispiel illustriert:

(5.3) *E sei die Menge der reellen Zahlen, $\mathcal{O}$ bezeichne die Topologie $\mathcal{J}^{lp}$, d.h. die offenen Mengen seien mit den Intervallen $(-\infty, a)$ $(-\infty \leqq a \leqq +\infty)$ identisch. Wird mit $\mathfrak{P}$ die Gesamtheit dieser Intervalle bezeichnet, so erhält man eine doppelte Kompaktifizierung von $[E, \mathcal{O}]$ folgendermaßen. E' bestehe aus den Elementen von E, ferner aus den Symbolen $-\infty$ und $+\infty$, weiterhin aus Symbolen $x-$ für jedes Element $x \in E$. In E' sei eine* (lineare) *Ordnung durch folgende Vorschrift eingeführt:*

$$-\infty \prec a- \prec a \prec b- \prec b \prec +\infty \quad (a \prec b,\ a,\ b \in E).$$

Für $P = (-\infty, a) \in \mathfrak{P}$ *sei*

$$r(P) = [-\infty, a-] \subset E' \quad (a \in E),$$

ferner $r(\emptyset) = \emptyset$, $r(E) = E'$. *Dann ist* $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}]$ *eine doppelte Kompaktifizierung für* $[E, \mathcal{T}]$, $r(\mathfrak{P})$ *ist aber keine klassische Topologie, in* $[E', \mathcal{T}^p_{r(\mathfrak{P})}]$ *sind nämlich, außer den Mengen von* $r(\mathfrak{P})$, *noch die Mengen* $[-\infty, a-)$ $(a \in E)$ *(und nur diese Mengen) offen.*

Beweis. $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{Q}$ besteht, außer $\emptyset$ und E, aus den Intervallen $[a, +\infty)$ $(a \in E)$, und der Ring $\mathfrak{R}$ ist nach (2.9) mit dem vom Halbverband $\mathfrak{H}$ aller Mengen

$$\emptyset, (-\infty, a), [a, b) [b, +\infty), E \quad (a, b \in E, a < b)$$

identisch. Daher sind die Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter nach (2.12) mit den Ultra-$\mathfrak{H}$-Filtern identisch.

Mit Hilfe von (2.10) sieht man leicht, daß alle Mengen der Gestalt $(-\infty, a)$ $(a \in E)$, diejenigen der Gestalt $[a, +\infty)$ $(a \in E)$, diejenigen der Gestalt $[a-\varepsilon, a)$ für festes $a \in E$ und $\varepsilon > 0$, endlich diejenigen der Gestalt $[a, a+\varepsilon)$ mit festem $a \in E$ und $\varepsilon > 0$ je einen Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter

$$\mathfrak{r}(-\infty), \ \mathfrak{r}(+\infty), \ \mathfrak{r}(a-), \ \mathfrak{r}(a)$$

erzeugen. Es gibt keinen weiteren Ultra-$\mathfrak{H}$-Filter. Wenn nämlich ein $\mathfrak{H}$-Filter $\mathfrak{h}$ kein endliches Intervall $[a, b)$ enthält, so kann er entweder nur Mengen aus $\mathfrak{H}$ vom Typ $(-\infty, a)$ oder nur solche vom Typ $[a, +\infty)$ enthalten, und $\mathfrak{h}$ ist entweder in $\mathfrak{r}(-\infty)$ oder in $\mathfrak{r}(+\infty)$ enthalten. Gehört aber zu $\mathfrak{h}$ ein endliches Intervall $[a, b)$, so müssen die entsprechenden Intervalle $[a, b]$ einen gemeinsamen Punkt c besitzen, und $\mathfrak{h}$ ist entweder in $\mathfrak{r}(c)$ oder in $\mathfrak{r}(c-)$ enthalten.

Damit wird die in der Behauptung angegebene Wahl der Menge E' mit der hier beschriebenen Definition von $\mathfrak{r}(x)$ für $x \in E'$ rechtfertigt. Die übrigen Behauptungen des Satzes ergeben sich leicht daraus.

Das folgende Beispiel zeigt, daß $r(\mathfrak{P})$ eventuell doch eine klassische Topologie bilden kann:

(5.4) *E sei eine unendliche Menge,* $\mathfrak{P}$ *bezeichne die Gesamtheit der leeren Menge und der Teilmengen von E mit endlichem Komplement. Dann ist* $\mathfrak{P}$ *eine klassische Topologie mit der doppelten Kompaktifizierung* $[E', \mathcal{T}_{r(\mathfrak{P})}] = [E', \mathcal{T}^p_{r(\mathfrak{P})}]$, *wobei* E' *außer den Elementen von E ein einziges Element* ω *enthält und* $\mathfrak{r}(x)$ *für* $x \in E$ *den entsprechenden Fundamentalfilter, für* $x = \omega$ *den Filter bezeichnet, den die nichtleeren Mengen von* $\mathfrak{P}$ *erzeugen.*

Beweis. Jetzt besteht $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{Q}$ aus E und aus den endlichen Mengen, und $\mathfrak{R} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{Q}$. Die oben angegebenen Filter $\mathfrak{r}(x)$ sind die einzigen Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter. Wenn nämlich ein $\mathfrak{R}$-Filter $\mathfrak{r}$ keine endliche Menge enthält, so ist er in $\mathfrak{r}(\omega)$ enthalten. Wenn aber $\mathfrak{r}$ eine endliche Menge enthält, so gibt es unter diesen Mengen eine einzige mit minimaler Elementenzahl, so daß $\mathfrak{r}$ der zu dieser Menge entsprechende Hauptfilter sein muß, und er ist dann in einem Fundamentalfilter $\mathfrak{r}(x)$ enthalten. Für $\emptyset \neq P \in \mathfrak{P}$ ist $r(P) = P \cup \{\omega\}$, so daß jede Vereinigung von Mengen aus $r(\mathfrak{P})$ selbst zu $r(\mathfrak{P})$ gehört.

Nach Satz (4.15) kann man aber für jede Basis $\mathfrak{B}$ noch weitere Kompaktifizierungen für $[E, \mathcal{T}]$ bilden, nämlich die Unterräume $[K, \mathcal{T}^p_{r(\mathfrak{B})}|K]$ mit

$E^* = E \cup E'' \subset K \subset E'$, die alle E enthaltende kompakte Unterräume von $[E', \mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}]$ umfassen. Unter ihnen gibt es einen kleinsten, nämlich $[E^*, \mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}|E^*]$. Ist die Basis $\mathfrak{P}$ so beschaffen, daß $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{L}$ ein regulärer Verband ist, dann enthält E'' die Menge E, und dieser kleinste kompakte Unterraum wird einfach von der Menge E'' getragen. Da den Punkten von E'' mittels $\mathfrak{r}(x)$ die Ultra-$\mathfrak{L}$-Filter entsprechen, überzeugt man sich leicht, daß es dann im wesentlichen um den im Sinne von [10] zum Verband $\mathfrak{L}$ konstruierten kompakten Raum handelt. Wichtige Anwendungen dieser Methode findet man in den Arbeiten [1] und [7].

Besonders wichtig ist auch hier der Fall, wenn $\mathfrak{P}$ aus allen $\mathcal{O}$-offenen Mengen besteht. In diesem Fall kann man die Kompaktifizierung $[E^*, \mathcal{O}^p_{r(\mathfrak{P})}|E^*]$ folgendermaßen beschreiben. Man betrachtet die ultraabgeschlossenen Filter, d. h. die Ultra-$\mathfrak{L}$-Filter, und unter ihnen die nichttrivialen, d. h. diejenigen, die nicht von allen, einen gewissen Punkt $x \in E$ enthaltenden abgeschlossenen Mengen erzeugt werden. Man ordnet diese nichttrivialen ultraabgeschlossenen Filter mittels $\mathfrak{r}(x)$ eineindeutig den Elementen $E^* - E$ zu, mit einer passend gewählten Menge E^*, ferner setzt man, für $x \in E$, $\mathfrak{r}(x)$ gleich dem Filter, den die Mengen $\overline{\{x\}} \cap V$ erzeugen, wobei V die Umgebungen von x durchläuft (denn die Ultra-$\mathfrak{R}$-Filter sind nach (2.12) mit den Ultra-$\mathfrak{H}$-Filtern identisch, wobei $\mathfrak{H}$ den Halbverband der Mengen $F \cap G$ mit abgeschlossenem F und offenem G bezeichnet, und aus $x \in F \cap G$, $F \in \mathfrak{L}$, $G \in \mathfrak{P}$ folgt $x \in \overline{\{x\}} \cap G$, so daß die obigen Filter $\mathfrak{r}(x)$ tatsächlich mit den trivialen Ultra-$\mathfrak{R}$-Filtern identisch sind.) Dann setzt man, wie üblich, $r^*(X) = \{x : x \in E^*, X \in \mathfrak{r}(x)\}$, und man bildet auf E^* die Topologie $\mathcal{O}^*$ mit der Basis $r^*(\mathfrak{P})$.

Der Sachverhalt vereinfacht sich, wenn der Verband $\mathfrak{L}$ regulär ist und demnach die Filter $\mathfrak{r}(x)$ auch für $x \in E$ abgeschlossen und folglich ultraabgeschlossen sind. Offenbar bedeutet die Regularität von $\mathfrak{L}$ das Bestehen folgenden Trennungsaxioms (s. z. B. [5]):

(5.5) *Jede Umgebung von x enthält die abgeschlossene Hülle $\overline{\{x\}}$.*

Das ist z. B. in einem T_1-Raum erfüllt, in welchem Fall $[E^*, \mathcal{O}^*]$ die klassische Wallmansche Kompaktifizierung von $[E, \mathcal{O}]$ darstellt (vgl. [4] für die Bemerkung, daß das Wallmansche Verfahren bereits bei Bestehen von (5.5) anwendbar ist). Die Wallmansche Kompaktifizierung eines Raumes $[E, \mathcal{O}]$, der Axiom (5.5) genügt, erhält man also, wenn man die doppelte Kompaktifizierung $[E', \mathcal{O}']$ von $[E, \mathcal{O}]$ bildet und dann den kleinsten E enthaltenden kompakten Unterraum $[E^*, \mathcal{O}'^p|E^*]$ von $[E', \mathcal{O}'^p]$ nimmt.

Kurz gesagt definiert man also eine Verallgemeinerung der Wallmanschen Kompaktifizierung, für einen beliebigen topologischen Raum $[E, \mathcal{O}]$, indem man zuerst die doppelte Kompaktifizierung $[E', \mathcal{O}']$ von $[E, \mathcal{O}]$ bildet und dann den kleinsten E enthaltenden kompakten Unterraum $[E^*, \mathcal{O}'^p|E^*]$ nimmt.

Im allgemeinen ist $E^* \neq E'$. Das ist z. B. der Fall, wenn $[E, \mathcal{O}]$ kompakt, aber nicht doppeltkompakt ist. Ein solches Beispiel bietet z. B. der T_1-Raum $[E, \mathcal{O}]$ in (5.4), wobei $E^* = E \neq E' = E \cup \{\omega\}$ ist.

Ist der Verband $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}^*$, wobei $\mathfrak{P}$ wiederum einen Basisverband für den topologischen Raum $[E, \mathcal{O}]$ bezeichnet, nicht nur regulär, sondern auch normal, so ist die Topologie der Smirnovschen Kompaktifizierung des Nachbar-

schaftsraumes $[E, \delta_{\mathfrak{Q}}]$ nach (4.20) mit der Topologie $\mathcal{T}^{\mathfrak{P}}_{\Gamma(\mathfrak{P})}|E''$ identisch. Bezeichnet $\mathfrak{P}$ die Gesamtheit aller $\mathcal{T}$-offenen Mengen, so geht die Bedingung der Regularität von $\mathfrak{Q}$ in (5.5), die Normalität von $\mathfrak{Q}$ offenbar in die gewöhnliche Normalität der klassischen Topologie $\mathfrak{P}$ über. Da der Verband $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{Q}$ der abgeschlossenen Mengen in einem normalen und Axiom (5.5) erfüllenden Raum und der Verband $\mathfrak{Z}$ der Nullstellenmengen nach dem Urysohnschen Lemma dieselbe Nachbarschaftsrelation $\delta_{\mathfrak{Q}} = \delta_{\mathfrak{Z}}$ erzeugen, ergibt sich daraus als Sonderfall die wohlbekannte Tatsache, daß die Stone-Čechsche und die Wallmansche Kompaktifizierungen in normalen T_1-Räumen zusammenfallen.

Den Sätzen (4.22) und (4.31) entnimmt man eine Charakterisierung der auf die oben betrachtete Weise erhaltenen Erweiterungen von topologischen Räumen. Genauer gesagt geht eine Erweiterung $[E_0, \mathcal{T}_0]$ des topologischen Raumes $[E, \mathcal{T}]$ genau dann in einen Unterraum von $[E', \mathcal{T}^{\mathfrak{P}}_{\Gamma(\mathfrak{P})}]$ durch einen, die Punkte von E festhaltenden Homöomorphismus über, wenn die Mengen $\overline{E-P}$ $(P \in \mathfrak{P})$ eine Basis für die abgeschlossenen Mengen von $[E_0, \mathcal{T}_0]$ bilden, für dieselben Mengen

$$\overline{(E-P_1)} \cap \overline{(E-P_2)} = \overline{E-P_1} \cap \overline{E-P_2} \quad (P_1, P_2 \in \mathfrak{P})$$

gilt und $[E_0, \mathcal{T}_0]$ bis auf E relativ separiert ist; dabei bezeichnet $\mathfrak{P}$ wiederum einen Basisverband in $[E, \mathcal{T}]$. Unter diesen Voraussetzungen enthält das Bild von E_0 genau dann die Menge $E^* = E \cup E''$, wenn $[E_0, \mathcal{T}_0]$ kompakt ist, dieses Bild ist genau dann in E^* enthalten, wenn die Punkte von $E_0 - E$ aus E $\mathfrak{Q}$-erreichbar sind, und dasselbe Bild fällt genau dann mit E^* zusammen, wenn $[E_0, \mathcal{T}_0]$ kompakt ist und außerdem für $x \in E_0 - E$ $\{x\}$ $\mathcal{T}_0$-abgeschlossen ist. Im Falle, wenn $\mathfrak{P}$ das System aller $\mathcal{T}$-offenen Mengen bedeutet und $[E, \mathcal{T}]$ dem Axiom (5.5) genügt, ergibt sich daraus eine bekannte Charakterisierung der Wallmanschen Kompaktifizierung.

Literatur

[1] R. M. Brooks, On Wallman compactifications, *Fund. Math.*, **60** (1966—1967), 157—173.
[2] Á. Császár, Grundlagen der allgemeinen Topologie (Budapest – Leipzig, 1963).
[3] Á. Császár, Double compactification d'espaces syntopogènes, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math., **7** (1964), 3—11.
[4] K. Császár, Untersuchungen über Trennungsaxiome, *Publ. Math.*, **14** (1967), 353—364.
[5] A. S. Davis, Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces, *Amer. Math., Monthly*, **68** (1961), 886—893.
[6] O. Frink, Compactifications and semi-normal spaces, *Amer. Journ. of Math.*, **86** (1964), 602—607.
[7] O. Njástad, On Wallman-type compactifications, *Math. Zeitschrift*, **91** (1966), 267—276.
[8] Ю. М. Смирнов, О пространствах близости, *Мат. Сборник*, **31** (**73**) (1952), 543—574.
[9] H. de Vries, Compact spaces and compactifications (Amsterdam, 1962).
[10] H. Wallman, Lattices and topological spaces, *Ann. of Math.*, **39** (1938), 112—126.

RATIONAL APPROXIMATION IN THE COMPLEX UNIT CIRCLE

By

J. SZABADOS

Department of Geometry of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received November 13, 1967)

In the last three years for a lot of classes of functions it was proved that the rational approximation is better than the polynomial one. In these results functions of one real variable were considered. Prof. PAUL TURÁN raised the following problem: what can we state on the rational approximability of a function which is analytic in the interior of the complex unit circle and it belongs to a prescribed continuity class on the periphery of this circle? When is it better than the polynomial approximation?

I think the following result to be the first step in the direction of solving this problem. We reach our result — as in the case of real variables — choosing such poles of the approximating rational functions which accumulate to the point of singularity of the function.

THEOREM. *Let the module of continuity of a continuous function $f(z)$ on $|z| \leq 1$ be $\omega(h)$, and assume that $f(z)$ is analytic in $\left|z+\frac{r}{2}z_0\right| \leq 1+\frac{r}{2}$ $(0<r<1/10,$ $|z_0| = 1)$ except the point z_0. Then*

$$R_n(f) = O\left(\omega\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right) \tag{1}$$

where $R_n(f)$ is the best approximation of $f(z)$ by rational functions of degree at most n in $|z| \leq 1$.

REMARKS. Compare the result with the order of polynomial approximation $E_n(f)$. According to the CURTISS' theorem (see e.g. [2], p. 90) if $f(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha\leq 1)$ then $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ and at the same time our theorem gives $R_n(f) = O(n^{-2\alpha}\log^{2\alpha} n)$.

If $\omega(h)$ is "bad" (e.g. $\omega(h) = \log^{-1} h^{-1}$) then (1) is not better than $E_n(f)$. But at any rate, we give a simple construction for the rational function realizing (1) in all cases, and this can be useful for practical purposes.

PROOF. In the proof we use the idea of [1]. Evidently, we may assume that the point of singularity of $f(z)$ is 1. Then $f(z)$ is analytic in the circle (see Fig. 1)

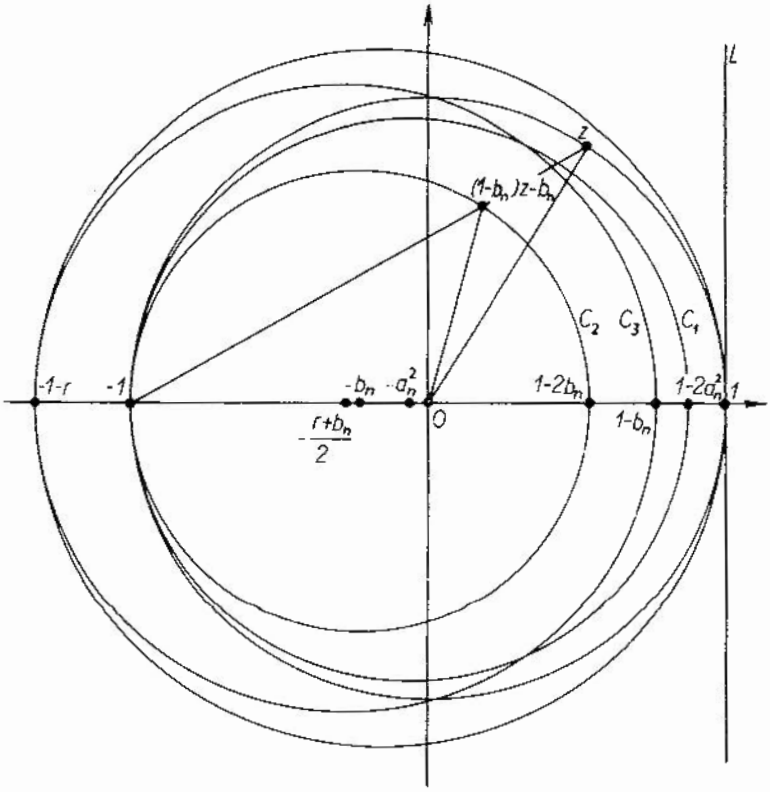

Fig. 1

$$C = \left\{ z : \left| z + \frac{r}{2} \right| \leq 1 + \frac{r}{2} \right\}$$

except the point 1. Let

$$a_n = \frac{4 \log n}{n} \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

and define $1 > b_n > 0$ by

$$\frac{2rb_n}{(2-b_n)(2+r-2b_n)} = 2a_n^2. \tag{3}$$

Then

$$a_n^2 < b_n < \frac{2(r+2)}{r} a_n^2. \tag{4}$$

Consider the rational function

$$s_n(z) = \left|\frac{z-1+2a_n}{z-1-2a_n}\right|^n \tag{5}$$

of degree n and let

$$C_1 = \{z : |z+a_n^2| = 1-a_n^2\}.$$

For

$$z \in C_1, \quad z = -a_n^2 + (1-a_n^2)e^{it} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

we obtain

$$|s_n(z)| = \left|\frac{-a_n^2+(1-a_n^2)e^{it}-1+2a_n}{-a_n^2+(1-a_n^2)e^{it}-1-2a_n}\right|^n = \tag{6}$$

$$= \left|\frac{1-a_n}{1+a_n}\right|^n \left|\frac{(1+a_n)e^{it}-(1-a_n)}{(1-a_n)e^{it}-(1+a_n)}\right|^n = \left|\frac{1-a_n}{1+a_n}\right|^n \leq e^{-na_n} = \frac{1}{n^4} \quad (z \in C_1),$$

by (2). On the other hand, for

$$z \in L = \{z : \operatorname{Re} z = 1\}$$

we get

$$|s_n(z)| = 1 \quad (z \in L). \tag{7}$$

Now let

$$C_2 = \{z : |z+b_n| = 1-b_n\},$$

$$C_3 = \left\{z : \left|z+\frac{r+b_n}{2}\right| = 1+\frac{r-b_n}{2}\right\},$$

and consider the rational function

$$w(z) = \frac{(2+2r-b_n)z+2-b_n+rb_n}{(2-b_n)(z+1+r)}. \tag{8}$$

Then, by (3)

$$w(-1-r) = \infty, \; w(-1) = -1, \; w(1-b_n) = 1, \tag{9}$$

$$w(1-2b_n) = 1-\frac{2rb_n}{(2-b_n)(2+r-2b_n)} = 1-2a_n^2,$$

and hence

$$w(C_2) = C_1, \; w(C_3) = L.$$

Thus, if

$$g_n(z) \overset{\text{def}}{=} s_n(w(z)) \tag{10}$$

then by (6) and (7)

$$|g_n(z)| \asymp \frac{1}{n^4} \qquad (z \in C_2) \tag{11}$$

and

$$|g_n(z)| = 1 \qquad (z \in C_3). \tag{12}$$

By (10), (8) and (5), $g_n(z)$ is a rational function of degree n and it has a root α in the interior of C_2, and a pole β which is outside of C_3 (both α and β are of multiplicity n). Thus, by a theorem of J. L. WALSH ([3], p. 186), for the rational function $r_n(z)$ of degree n which interpolates $f(z)$ in α (with multiplicity n) and in 0, and which has the pole β (with multiplicity n) we have

$$f(z) - r_n(z) = \frac{z g_n(z)}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z) g_n(\zeta)} d\zeta.$$

Using (2), (4), (11) and (12), we get (by $|\zeta - z| \geq b_n$ ($\zeta \in C_3$, $z \in C_2$))

$$|f(z) - r_n(z)| = O\left|\frac{1}{n^4}\right| \int_{C_3} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} = O\left(\frac{1}{b_n n^4}\right) = O\left(\frac{1}{n^2 \log^2 n}\right) \qquad (z \in C_2).$$

Write this in the form

$$|f((1-b_n)z - b_n) - r_n((1-b_n)z - b_n)| = O\left(\frac{1}{n^2 \log^2 n}\right) \qquad (|z| = 1). \tag{13}$$

Evidently

$$|f(z) - f((1-b_n)z - b_n)| \leq \omega(b_n|z+1|) \leq \omega(2b_n) = \tag{14}$$

$$= O(\omega(a^2)) = O\left(\omega\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right)\right) \qquad (|z| = 1).$$

From (13) and (14) we have (1), qu.e.d.

References

[1] A. A. GONČAR, On the degree of rational approximation of continuous functions with characeristic singularity (Russian), *Mat. Sbornik*, **37(115)** (1967), 630–638.

[2] W. E. SEWELL, *Degree of approximation by polynomials in the complex domain* (Princeton, 1942).

[3] J. L. WALSH, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain* (American Math. Soc., Colloquium Publ., 1960).

BEMERKUNGEN ZU DEN G. RÉVÉSZ-SCHEN TERMINALEN GRAMMATIKEN

Von

RÓZSA PÉTER

I. Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 28. September 1967)

1. G. RÉVÉSZ hat in seiner Kandidaten-Dissertation[1] eine neuartige mathematische Grammatik, die sogenannte **„Operator-Operandus Grammatik"** zum Konstruieren eines universellen interpretierenden Programmes angewandt. Diese ist ein Spezialfall der von ihm eingeführten **„terminalen Grammatiken"**, die auch abgesehen von den genannten Anwendungszwecken nicht ohne Interesse sind, da sie gegenüber den üblichen Satzstruktur-Grammatiken gewisse Vereinfachungsmöglichkeiten enthalten.

Bekanntlich wird eine Satzstruktur-Grammatik durch ein geordnetes Quadrupel

$$(T, H, s, P)$$

angegeben, wo T das Terminale Vokabular, H das Hilfsvokabular (bestehend aus den Kategorienamen), s ein ausgezeichnetes Element des letzteren bezeichnet, und P die Menge der Regeln („Produktionen") ist, die im Fall einer „kontextunabhängigen" Grammatik der Form

$$w ::= v_1 v_2 \ldots v_n$$

sind, wobei

$$w \in H \text{ und } v_1, v_2, \ldots, v_n \in T \cup H.$$

Die Verwendung einer solchen Regel auf eine auch w enthaltende Kette von Elementen aus $T \cup H$ bedeutet das Ersetzen darin eines Vorkommens von w durch die rechte Seite der betreffenden Regel. Durch Anwendungen der Regeln kommt man zu den „Entwicklungen" der Kategorienamen; die bereits nur Elemente aus T enthaltenden Entwicklungen sind ihre „terminalen" Entwicklungen. Die durch diese Grammatik generierte Sprache besteht aus den terminalen Entwicklungen des ausgezeichneten s (dieses kann in einer natürlichen Sprache die Kategorie „Satz", in einer Formelsprache „Ausdruck" oder „Formel", in einer Maschinensprache „Programm" bezeichnen, usw.).

[1] Egy univerzális értelmező programról (Über ein universelles interpretierendes Programm), 1967.

Das wesentlich Neue in den G. RÉVÉSZ-schen „terminalen Grammatiken" ist nun, daß *dabei als linke Seiten von Regeln beliebige Elemente von $T \cup H$, also auch terminale Elemente auftreten können.* (Dies erfordert natürlich auch eine neue Deutung der Regeln: eine Regel bedeutet hier nicht, daß unter die linksseitig bezeichnete Kategorie auch jene Dinge gehören, die auf der rechtsseitig angegebenen Art zustande kommen, sondern nur soviel, daß bei der Generierung der Elemente der Sprache die rechtsseitige Zeichenkette *dieselbe Rolle* spielt, als die linke Seite der Regel.) Dadurch werden verschiedene Vereinfachungen ermöglicht.

RÉVÉSZ trachtet besonders nach **Ausschaltung von hilfselementen** (H-Elementen); außerdem auch nach **„Abkürzung" der rechten Seiten der Regeln** (unter der „Länge" einer Zeichenkette die Anzahl ihrer Zeichen verstanden, jedes sovielmal gerechnet, wievielmal es in der Zeichenkette auftritt).

2. Zum Beispiel werden von RÉVÉSZ bei der Generierung der zum Begriff s = „Block" gehörigen Entwicklungen die Hilfsbegriffe „Blockkopf" und „Verbandschluß" (etwas vereinfacht, da ich die Möglichkeit verschiedener Anweisungen hier nicht beachte) durch Anwendung folgender Regeln vermieden (A = Anweisung, D = Deklaration):

Block :: = **begin** A **end**

begin :: = **begin** D.

end :: = ; A **end**.

Hier treten auch die terminalen Begriffe **„begin"** und **„end"** als linke Seiten auf.

Dabei mußte aber das auch zwischen den einzelnen Deklarationen üblich mit „;" bezeichnete Trennzeichen anders (durch einen Punkt) bezeichnet werden, da es hier „eine andere Rolle" hat, als die Trennzeichen zwischen den einzelnen Anweisungen. Dies bedeutet natürlich eine Erweiterung der Menge T.

Allgemein gefaßt wurde in der betrachteten Vereinfachung der folgende Gedankengang verwendet:

Seien l_1, l_2, l_3 Zeichenketten von Elementen aus $T \cup H$, wobei l_1 und l_2 (welche auch leer sein können) das Zeichen $h_i \in H$ nicht enthalten, und l_3, das h_i auch an mehreren Stellen enthalten kann, als Funktion von h_i durch $l_3(h_i)$ bezeichnet wird. Falls die Regeln von linker Seite h_i insgesamt die folgenden sind:

$$h_i :: = l_1 v l_2 \text{ und } h_i :: = l_1 l_3(h_i) l_2$$

mit einem von h_i verschiedenen $v \in T \cup H$, das in den zu P gehörigen Regeln nirgends vorkommt außer der explizite angegebenen einzigen Stelle, dann kann h_i vollkommen ausgeschaltet (und dabei auch die Anzahl der Regeln um 1 vermindert) werden, derart, daß die beiden obigen Regeln durch die folgende einzige vertreten werden:

$$v :: = l_3(l_1 v l_2)$$

(als ob der durch die erste Regel gelieferte „explizite Wert" von h_i in die zweite Regel eingesetzt, und die so entstehende Regel

$$l_1 v l_2 :: = l_1 l_3(l_1 v l_2) l_2$$

dann durch l_1 und l_2 „gekürzt" geworden wäre), ferner h_i in allen anderen Regeln durch $l_1 v l_2$ vertreten wird, (Im Révész-schen Spezialfall ist $v \in T$, so zeigt sich schon hier die Nützlichkeit des Zulassens terminaler Elemente als linke Seiten von Regeln.)

Der betrachtete Fall kann folgenderweise gedeutet werden: v tritt eigentlich in der kontextabhängigen Regel

$$l_1 v l_2 :: = l_1 l_3 (l_1 v l_2) l_2$$

auf, jedoch, da v in keiner anderen Umgebung auftritt, kann diese Regel auch kontextunabhängig gestaltet werden.

Eine solche Lage ist natürlich zu speziell um daraus eine allgemeine Methode der Vereinfachung gewinnen zu können.

3. *Durch eine terminale Grammatik lassen sich* aber nicht nur die bei Révész behandelten Ausdrücke, sondern auch *die Ausdrücke (und nachher ähnlich auch die Formeln) einer* **beliebigen mathematischen Formelsprache** *ohne weitere Hilfsbegriffe generieren.*

Seien die Bezeichnungen der Konstanten bzw. der Variablen einer solchen Sprache

$$c, \quad c*, \quad c**, \ldots$$

bzw.

$$x, \quad x*, \quad x**, \ldots$$

und der zur Sprache gehörigen (festen) mathematischen Funktionen, mit Angabe ihrer Variablenanzahl als obere Indizes:

$$\varphi_1^{(n_1)}, \varphi_2^{(n_2)}, \ldots, \varphi_r^{(n_r)}.$$

Dann genügen (bei a = Ausdruck) die folgenden Regeln, für $i = 1, 2, \ldots, r$:

$$a ::= c \quad c :: = c* \quad a ::= x \quad x ::= x* \quad a ::= \varphi_i^{(n_i)} \underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{n_i\text{-mal}}$$

wobei die maximale Länge der rechten Seiten

$$2 \cdot \max(n_1, n_2, \ldots, n_r) + 2$$

ist. Das läßt sich durch Zulassung neuer Hilfsbegriffe kürzen (worauf ich noch zurückkommen werde). Die Anfangsklammern können jedenfalls in den Zeichen $\varphi_i^{(n_i)}$ inbegriffen betrachtet, und so weggelassen werden.

Es bedeutet auch die Zulassung von Funktionenvariablen keine neue Schwierigkeit, falls ihre Variablenanzahl beschränkt ist. Werden jene mit der Variablenanzahl n durch

$$f^{(n)}, \quad f^{(n)}*, \quad f^{(n)}**, \ldots$$

bezeichnet, so genügt die Hinzunahme der Regeln

$$a :: = f^{(n)} \underbrace{(a, a, \ldots, a)}_{n\text{-mal}} \qquad f^{(n)} ::= f^{(n)}*$$

für jedes in Betracht kommende n.

Wird die LUKASIEWICZsche (bekanntlich[2] ebenfalls eindeutige, klammernfreie Form benutzt, so können ohne weiteres auch die Endklammern weggelassen werden.

Mit Benutzung des RÉVÉSZ-schen Kunstgriffs, nach welchem ein terminales Zeichen „in verschiedenen Rollen" verschieden bezeichnet werden soll, können auch alle solche Ausdrücke leicht generiert werden, die Funktionenvariablen beliebiger Variablenanzahl enthalten. Hier bedarf man bei jeder Variablenanzahl je eine Folge von Funktionenvariablen. Diese können durch einem einzigen Funktionszeichen f bezeichnet werden, das mit doppeltem Index versehen ist (der zweite Index gibt die Variablenanzahl an), wobei die beiden Indexzahlen — wegen ihrer verschiedenen Rolle — z. B. durch Sterne bzw. durch Kreise bezeichnet werden. Hierbei ist die Anfangsklammer (als Trennzeichen gegenüber den Indizes) unentbehrlich, wird aber — falls die gewöhnliche Anfangsklammer nicht ausgeschaltet wurde — in dieser Rolle anders, z. B. durch eine eckige Klammer bezeichnet.

So hat man nur folgende Regeln zuzulassen:

$$a ::= f\circ|a) \qquad f ::= f\star \qquad |::= \circ|a,$$

und dadurch werden auch die Regeln der Form

$$a ::= \varphi_i^{(n_i)}\underbrace{a, a, \ldots, a)}_{n_i\text{-mal}}$$

entbehrlich. Man kann ja annehmen, daß falls im System für ein n konkrete mathematische Funktionen von n Variablen der Anzahl m vorkommen, dann diese der Reihe nach durch

$$\underbrace{f\circ\circ\ldots\circ}_{n\text{-mal}} \quad \underbrace{f\star\circ\circ\ldots\circ}_{n\text{-mal}} \quad \underbrace{f\star\star\ldots\star}_{m\text{-mal}}\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{n\text{-mal}}$$

bezeichnet werden, und nur die Zeichen

$$\underbrace{f\star\star\ldots\star\circ\circ\ldots\circ}_{n\text{-mal}}$$

mit erstem Index wenigstens der Länge m Funktionsvariablen der Variablenanzahl n bezeichnen.

So kann man sich auf Regeln von maximaler Rechtsseitenlänge 5 beschränken: und diese Zahl kann auf 4 vermindert werden, wenn man die LUKASIEWICZsche Form benützend die Endklammer wegläßt.

4. In der RÉVÉSZ-schen **Operator-Operandus** Grammatik ist von Wichtigkeit (wenn auch nicht hinreichend), daß die in den Regeln auftretenden Zeichenketten *Operatorzeichen und Operanduszeichen abwechselnd* enthalten. Dies besteht auch hier, da die Zeichen

$$c;\ x;\ f;\ |;\ ,$$

[2] Siehe z. B. L. KALMÁR, Another proof of the Markov-Post theorem, *Acta Math. Acad Sci. Hung.*, 3 (1952), 1 – 27.

(eventuell noch runde Klammern, $\varphi_1^{(n_1)}, \ldots, \varphi_r^{(n_r)}$) als Operatorzeichen, und die Zeichen

$$*;\ \circ;\ a$$

als Operanduszeichen betrachtet werden können.

5. Eine **Verkürzung der rechten Seite** einer Regel geschieht bei RÉVÉSZ folgenderweise: z. B. kommt als eine rechte Seite im „Algol" (mit den Operandus-Hilfsbegriffen b = Boolescher Ausdruck, u = unbedingte Anweisung, w = = Anweisung, und mir den terminalen Operatoren **if**, **then** und **else**)

if b **then** u **else** w

vor. Hier wird für die beiden ersten Operatoren ein einziger, etwa **„ifthen"** eingeführt, und die betrachtete Zeichenkette durch

ifthen u **else** w

ersetzt, wobei aber die neue Regel

ifthen $::=$ **if** b **then**

aufzunehmen ist. Das geschieht jedenfalls auf Kosten der Vermehrung der Anzahl der Operatoren und der Regeln.

Auf diese Weise kann auch, wie bekanntlich, *die maximale Länge der rechten Seiten der Regeln immer auf 2 vermindert werden:* Lautet eine beliebige Regel für $n > 2$

$$w ::= v_1 v_2 \ldots v_n$$

so kann diese nach Einführung der Hilfs-Operatoren

$$V_1, V_2, \ldots, V_{n-2}$$

durch die Produktionen

$$w ::= v_1 V_1 \quad V_1 ::= v_2 V_2 \quad \ldots \quad V_{n-3} ::= v_{n-2} V_{n-2}$$
$$V_{n-2} ::= v_{n-1} v_n$$

ersetzt werden, in welchen die Länge der rechten Seiten gleich 2 ist.

Dadurch wird übrigens die auf der rechten Seite der ursprünglichen Regel eventuell bestehende *Operator-Operandus-Abwechselung* nicht zerstört.

ON HEREDITARILY α-LINDELÖF AND HEREDITARILY α-SEPARABLE SPACES

By

A. HAJNAL and I. JUHÁSZ

I. Department of Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received November 16, 1967)

The subject of this paper is the investigation of certain interconnections between the two properties mentioned in the title. We will show that — at least within the class of Hausdorff spaces — neither of the above two properties implies the other. It is interesting to note that the proofs both of these two statements run on very similar lines.

We think that the most important result of this paper is the Corollary of Theorem 5, that gives a negative solution of a problem due to the second author on the Darboux property of the weight function on the class $\mathcal{T}_2$ of Hausdorff spaces [1].

At the end of the paper we mention two unsolved problems in their simplest forms. We mention here one more unsolved problem that is not closely connected with the subject of the present paper, but it seems to be very intrigueing.

PROBLEM 0. Does there exist a hereditarily separable Hausdorff space of cardinality greater than that of the continuum?

§ 1. Notations and definitions. Preliminaries

The cardinality of a set M will be denoted by $|M|$. Throughout this paper the ordinal numbers will be identified by the set of all smaller ordinals and cardinals are the same as initial ordinals. By ξ, η, ζ, μ, ν, ϱ or by α, β, γ we always denote ordinals or infinite cardinals, respectively. If M is any set well-ordered by a relation $-\!\!<$, $\mathrm{tp}(M, -\!\!<)$ or simply $\mathrm{tp}(M)$ denotes its order-type.

If η is a limit ordinal, as it is usual, $\mathrm{cf}(\eta)$ is the smallest ordinal (that is actually a cardinal) being cofinal with η. The cardinal α is called regular iff $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$ and singular otherwise. For every α we denote by α^+ the smallest cardinal greater than α.

The generalised continuum hypothesis (*G.C.H.* in what follows) is sometimes assumed in our paper. It can be formulated as $2^\alpha = \alpha^+$ for every α.

$R, S, T, \ldots$ will denote topological spaces; for this we will also use the notation (R, τ) if the distinction between different topologies on the same set R is important. Here τ denotes the set of all τ-open sets in R.

A topological space R is called *left* (or right) *separated* if there exists a well-ordering $\prec$ of R such that every point $x \in R$ has a neighbourhood not containing any smaller (or greater) element of R in the above well-ordering $\prec$.

The supremum of the cardinalities of all left separated (or right separated) subspaces of R is called the *width* (or *height*) of R and they are denoted by $z(R)$ (or $h(R)$), respectively.

The space R is called α-Lindelöf if every open covering of R has a subcovering of power not greater than α. R is called α-separable if it contains a dense subset of power not greater than α. We will say that R is hereditarily α-Lindelöf (or α-separable) iff every subspace of R is α-Lindelöf (or α-separable), respectively.

One can show easily that $h(R)$ (or $z(R)$) is also the supremum of cardinalities of well-ordered sequences of open subsets in R that are strictly increasing (or strictly decreasing) ordered by the inclusion, respectively.

These observations, together with other well-known facts (see e.g. [2] and [3]), yield us the following results.

LEMMA 1. For every α R is hereditarily α-Lindelöf iff $h(R) \leq \alpha$.

LEMMA 2. For every α R is hereditarily α-separable iff $z(R) \leq \alpha$.

As a third easily provable result on hereditarily α-Lindelöf spaces the following lemma can be mentioned.

LEMMA 3. (R, τ) is hereditarily α-Lindelöf iff there exists a base $\mathfrak{B}$ for τ such that the union of every subsystem $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B}$ can be obtained as the union of at most α elements of $\mathfrak{S}$. Then every other base for τ possesses this property, too.

As an easy consequence of Lemma 3 mention

LEMMA 4. If (R, τ) is hereditarily α-Lindelöf then

$$|\tau| \leq w(R)^\alpha.$$

(Here $w(R)$ denotes the weight of R its definition follows below.)

If φ is a cardinal valued function defined on a class of topological spaces φ is briefly called a *cardinal function*.

Thus the height-function h and the width-function z are cardinal functions. Other well-known cardinal functions we are going to investigate are the weight and density functions w and s, respectively. $w(R)$ is defined as the smallest cardinality of bases for the space R and $s(R)$ is the smallest cardinality of dense subspaces of R.

It is easy to show (see e.g. [4], 3.5, p. 345) that if R is left or right separated, then $w(R) = |R|$, and $s(R) = |R|$ if R is left separated and $|R|$ is regular.

If φ is a cardinal function defined on $\mathcal{C}$, the symbol

$$(\varphi, \mathcal{C}) \to \alpha$$

means that $R \in \mathcal{C}$ and $\varphi(R) > \alpha$ imply the existence of a subspace $S \subset R$, for which $\varphi(S) = \alpha$ (see [5]).

The cardinal function is said to possess the (regular) Darboux property on $\mathcal{C}$ iff

$$(\varphi, \mathcal{C}) \to \alpha$$

holds for every (regular) α.

§ 2

The main aim of this § is to show that neither of the properties of being hereditarily α-Lindelöf or being hereditarily α-separable implies the other one at least among the Hausdorff spaces.

THEOREM 1. *If (R, τ) is a hereditarily α-Lindelöf space, then there exists a topology $\bar{\tau}$ on R, such that*

(i) *$\bar{\tau}$ is finer than τ,*
(ii) *$(R, \bar{\tau})$ is hereditarily α-Lindelöf,*
(iii) *If $M \subset R$ and $|M| \leq \alpha$, then M is closed in $\bar{\tau}$.*

PROOF. Let a base $\mathfrak{B}$ for $\bar{\tau}$ consist of all sets G' having the form

$$G' = G \setminus M$$

where $G \in \tau$, and $M \subset R$, $|M| \leq \alpha$. It is easy to see that $\mathfrak{B}$ determines a topology $\bar{\tau}$ on R, indeed. It is also obvious that (i) and (iii) are true for $\bar{\tau}$.

In order to show (ii), it is sufficient to prove that for every $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{B}$ there exists a subsystem $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Z}$ such that $|\mathfrak{P}| \leq \alpha$ and $\bigcup \mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{Z}$ (see Lemma 3). Let $\mathfrak{Z} = \{G'_i = G_i \setminus M_i : i \in I\}$ be an arbitrary subsystem of $\mathfrak{B}$; since (R, τ) is hereditarily α-Lindelöf, there is a subset $I_0 \subset I$ of indices such that $|I_0| \leq \alpha$ and

$$\bigcup_{i \in I_0} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

It follows that

$$\bigcup \mathfrak{Z} - \Big(\bigcup_{i \in I_0} (G_i \setminus M_i)\Big) \subset \bigcup_{i \in I_0} M_i$$

i.e.

$$\Big|\bigcup \mathfrak{Z} \setminus \Big(\bigcup_{i \in I_0} (G_i \setminus M_i)\Big)\Big| \leq \alpha.$$

Let now $\mathfrak{P}$ consist of the sets G'_i for $i \in I_0$ and of the sets G'_x where G'_x is an arbitrary element of $\mathfrak{Z}$ containing x, and $x \in \bigcup \mathfrak{Z} - (\bigcup_{i \in I_0} G'_i)$.

It is now obvious that $|\mathfrak{P}| \leq \alpha$ and $\bigcup \mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{Z}$ what completes the proof.

If now we take a Hausdorff space (R, τ) such that $|R| = 2^\alpha$ and $w(R, \tau) = \alpha$ (the existence of such a space is well-known for every $\alpha \geq \omega$, e.g. D^α, where D is the two-point discrete space), then (R, τ) is obviously hereditarily α-Lindelöf,

and applying Theorem 1 to (R, τ) we get a Hausdorff-space again, because of (i). On the other hand, $|R| > \alpha$ and (iii) yield $s(R) > \alpha$ immediately. Thus we obtain the following

COROLLARY. For every $\alpha \geq \omega$ there exists a Hausdorff space which is hereditarily α-Lindelöf but not α-separable.

Now we are going to prove the converse to the above Corollary, by means of a very similar process.

THEOREM 2. *If (R, τ) is a hereditarily α-separable space, then there exists a topology τ^* on R, such that*

(i) *τ^* is finer than τ,*
(ii) *(R, τ^*) is hereditarily α-separable,*
(iii) *(R, τ^*) is right-separated.*

PROOF. Let $\prec$ be an arbitrary well-ordering on R. If $M \subset R$ is an arbitrary subset of R, we will denote by M_x the section of M by x:

$$M_x = \{y : y \in M \text{ and } y \prec x\}.$$

Let τ^* be the topology on R for which the sets of form G_x with $x \in G \in \tau$ constitute a base:

$$\mathfrak{B} = \{G_x : x \in G \in \tau\}.$$

It is a base for a topology, indeed, because

$$z \in G_x \cap H_y \Rightarrow z \in (G \cap H)_z \subset G_x \cap H_y.$$

τ^* is finer than τ because

$$G = \bigcup_{x \in G} G_x$$

holds for every $G \in \tau$.

(R, τ^*) is also right separated, since R_x is a neighbourhood of x that does not contain any $y > x$.

Finally, we have to prove that every subspace $M \subset R$ is α-separable. This will be done by transfinite induction on the order-type tp (M) of the subspaces taken in the ordering induced by $\prec$.

Assume we have already proved that $H \subset R$ is α-separable if tp $(H) < \xi$ for some fixed ordinal $\xi \leq$ tp (R) and let M be a subspace with tp $(M) = \xi$. If ξ has the form $\xi = \eta + 1$, M can be obtained by adding a single point to a space that, having a smaller order-type, is α-separable. Thus M is α-separable, too.

If ξ is a limit ordinal, we have to distinguish two cases a) and b).

a) cf $(\xi) \leq \alpha$. In this case M is the union of not more than α subsets all having an order type less than ξ:

$$M = \bigcup_{\eta < \zeta} M_\eta$$

where $\zeta \leq \alpha$ and tp $(M_\eta) < \xi$ for each $\eta < \zeta$. But then $s(M_\eta) \leq \alpha$ for each $\eta < \alpha$, what obviously implies

$$s(M) \leq \alpha.$$

b) $\mathrm{cf}(\xi) > \alpha$. Now we first choose a subset $S \subset M$ such that $|S| \leq \alpha$ and S is dense in M *in the subspace topology derived from the original topology* τ. Since $\mathrm{tp}(S) < \mathrm{cf}(\xi) = \mathrm{cf}[\mathrm{tp}(M)]$, we can find a point $x_0 \in M$ such that $S \subset M_{x_0}$. Since ξ is now a limit ordinal, $\mathrm{tp}(M_{x_0}) < \mathrm{tp}(M)$, i.e. $s(M_{x_0}) \leq \alpha$. Let S_0 be now a τ^*/M-dense subset of M_{x_0} with $|S_0| \leq \alpha$. We shall show that $D = S \cup S_0$ is a dense subset of M in τ^*/M, and that will complete the proof. Let, indeed, $x \in M$ and $G_x \in \mathfrak{B}$ an arbitrary base neighbourdhood of x. It is sufficient to show that

$$G_x \cap M \cap D \neq \emptyset.$$

If $x \leq x_0$, this follows from the facts that $G_x \cap M = G_x \cap M_{x_0}$ and $S_0 \subset D$ is dense in M_{x_0}.

If $x > x_0$, we can choose from the set $G \cap M$ a point y of S, according to the definition of S. But then $y \leq x_0 < x$ implies $y \in G_x \cap M$, too, i.e.

$$y \in G_x \cap M \cap D \neq \emptyset.$$

COROLLARY. For every α there exists a hereditarily α-separable Hausdorff space R which is not α-Lindelöf.

In order to prove this we can start again with a Hausdorff space R of cardinality 2^α and of weight α and so Theorem 2 can be applied to it. Then we get a hereditarily α-separable Hausdorff space R of cardinality 2^α which is right separated. But then $h(R) = |R| > \alpha$ implies — according to Lemma 1 — that R is not hereditarily α-Lindelöf. One can also show that R itself is not α-Lindelöf, since it contains a strictly increasing well-ordered sequence of open sets of type 2^α, and König's inequality obviously implies $\mathrm{cf}(2^\alpha) > \alpha$.

§ 3

(G.C. H. is assumed throughout this §)

In the present chapter we are going to investigate the Darboux property of the weight function on the class $\overline{C}_2$ of Hausdorff spaces. As it has been shown in [5], we can get positive results in this direction only having assumed $G.C.H$. That is why we have to assume $G.C.H$ throughout this §.

THEOREM 3. *Let R be a T_0-space right separated by the well-ordering $\prec$ and assume* $\mathrm{tp}(R) = \alpha$ *with respect to $\prec$. Then*

$$w(R) = \alpha.$$

PROOF. According to **§1** $w(R) \geq |R| = \alpha$. On the other hand, let $R_x = \{y : y \preceq x\}$. Then $|R_x| < \alpha$ and so $w(R_x) \leq 2^{|R_x|} = |R_x|^+ \leq \alpha$. But R_x is open in R since $\prec$ right separates R, and so $R = \bigcup_{x \in R} R_x$ obviously implies

$$w(R) \leq \sum_{x \in R} w(R_x) = \alpha,$$

i.e.

$$w(R) = \alpha.$$

COROLLARY. If $R \in T_0$ contains a right separated subspace $S \subset R$ such that $|S| \geq \alpha$, then there exists a subspace $T \subset R$ with

$$w(T) = \alpha.$$

The proof is obvious.

THEOREM 4. *Let $\mathcal{T}_2^*$ be the class of Hausdorff spaces R such that*

$$w(R) \leq |R|.$$

w possesses the Darboux property on $\mathcal{T}_2^*$.

PROOF. In order to prove this we are using a result from [7]. This says that every $R \in \mathcal{T}_2$ with, $|R| \geq \alpha^+$ contains a right separated subspace, $S \subset R$ with $|S| = \alpha$.

Now if $R \in \mathcal{T}_2^*$ and $\beta < w(R)$, then $|R| \geq w(R) \geq \beta^+$, consequently there exists a right separated subspace $S \subset R$ with $|S| = \beta$, hence — according to the Corollary of Theorem 3 — R contains a subspace $T \subset R$ with

$$w(T) = \beta$$

and this completes the proof.

Note that both the classes of locally compact and metric spaces (and more generally the class of p-spaces introduced by A. ARCHANGELSKII [6]) are contained in $\mathcal{T}_2^*$.

Assume now that $R \in \mathcal{T}_2$ is a space for which

$$(w, \{R\}) \to \alpha$$

holds. Then, of course, $\alpha > \omega$. According to the Theorems 3 and 4 this implies $w(R) > |R|$ — i.e. $w(R) = |R|^+$ — and $h(R) \leq \alpha$ and even $h(R) < \alpha$, if α has the form $\alpha = \beta^+$. Note that if $\alpha = \beta^+$ the latter just means that R is hereditarily β-Lindelöf.

On the other hand, as we have already recalled it , $|R| < \alpha^+$ must hold, what, together with $\alpha < w(R) = |R|^+$ gives us

$$\alpha = |R|.$$

Assume now $\alpha > \omega$ is of the form $\alpha = \beta^+$. If now we want to find an $R \in \mathcal{T}_2$ such that $(w, \{R\}) \to \alpha$ then first of all we have to find a hereditarily β-Lindelöf space R with $|R| = \alpha$ and $w(R) = \alpha^+$.

Note that, if R is regular, the latter property must also be hereditary on the large subspaces of a certain $S \subset R$ with $|S| = |R|$, or more exactly S has to satisfy the following property $N(\alpha)$: $T \subset S$ and $|T| = |S| = \alpha$ imply $w(T) = w(S) = \alpha^+$. Indeed, as it is well-known (see e.g. [7]) $R \in \mathcal{T}_3$ implies $w(R) \leq s(R)^+$, i.e. $s(R) = \alpha$ in this case. But then, as it has been shown in [4], p. 345, R has to contain a left-separated subspace S with tp $|S| = \alpha$ and, α being regular, every $T \subset S$ with $|T| = |S| = \alpha$ also has the density α, hence

$$w(T) \geq s(T) \geq \alpha$$

i.e.

$$w(T) = \alpha^+,$$

according to our assumption $w(T) \neq \alpha$ for each $T \subset R$.

The main result of this paper is the construction of a Hausdorff space R_α for each α having the form β^+ such that R_α has all the properties depicted above, and from this we will easily get counterexamples of the desired type.

THEOREM 5. *If α has the form $\alpha=\beta^+$, then there exists an $R_\alpha \in \mathcal{T}_2$ satisfying the following conditions* (i)...(iii).

(i) $|R_\alpha| = \alpha$,
(ii) *R_α is hereditarily β-Lindelöf,*
(iii) *R_α possesses the property $N(\alpha)$.*

PROOF. Let us choose $R_\alpha = \alpha$, i.e. the set of all ordinals less than α. First we take a topology τ_0 on R_α such that $(R_\alpha, \tau_0) \in \tau_2$ and $w(R_\alpha, \tau_0) = \beta$.

Then we are going to use a purely set theoretic result from [8], Th. 43. (1), p. 179, that assures us the existence of a system $\mathfrak{L}$ of subsets of R_α with the following properties a), b) and c):

a) $|\mathfrak{L}| = \alpha^+$, consequently $\mathfrak{L}$'s elements can be indexed by the ordinals less than α^+ : $\mathfrak{L} = \{C_\xi, \xi < \alpha^+\}$.

b) If $A \subset R_\alpha$ and $|A| = \alpha$, then there exists an ordinal $\xi(A) < \alpha^+$ such that $\xi > \xi(A)$ implies

$$A \cap C_\xi \neq 0.$$

c) Since $C_\xi \subset \alpha$, it is a set of ordinals, that can be ordered in an increasing sequence as follows:

$$C_\xi = \{\eta_\nu^{(\xi)} : \nu < \alpha\}.$$

(Consequently we also assume $|C_\xi| = \alpha$ for each $\xi < \alpha^+$.)
Now if $\xi_1 < \xi_2$, then there exists an ordinal $\nu(\xi_1, \xi_2) < \alpha$ such that $\nu > \nu(\xi_1, \xi_2)$ implies

$$\eta_\nu^{(\xi_1)} < \eta_\nu^{(\xi_2)}.$$

We are going to denote by B_ξ the complement of C_ξ in

$$R_\alpha (= \alpha) \text{ and } \mathfrak{B}_1 = \{B_\xi : \xi < \alpha^+\}.$$

Let us choose now a base $\mathfrak{B}_0$ for the space (R_α, τ_0) such that $|\mathfrak{B}_0| = \beta$ and $\mathfrak{B}_0$ is closed under finite intersections.

Let now $\mathfrak{B}$ be the system of all sets having the form

$$B_{\xi_1} \cap \ldots \cap B_{\xi_n} \cap G$$

where $\xi_1 < \ldots < \xi_n < \alpha^+$, $n < \omega$ and $G \in \mathfrak{B}_0$. According to the choice of $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}$ is also closed under finite intersections and consequently it is a base for a topology τ on R_α. τ is finer than τ_0, and so it is Hausdorff, too. Now we are going to show that (R_α, τ) possesses the properties (ii) and (iii).

In order to show (ii), according to Lemma 3, it is sufficient to prove that from every subfamily $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{B}$ we can choose at most β elements such that their union is equal to that of $\mathfrak{E}$.

Let us denote by $\mathfrak{S}(G,n)$ that subsystem of $\mathfrak{S}$ the elements of which have the form

$$B_{\xi_1}\cap\ldots\cap B_{\xi_n}\cap G$$

for every $G\in\mathfrak{B}_0$ and $1\leq n<\omega$ while $\mathfrak{S}(G,0)=\{G\}$.

Since the number of all such subsystems $\mathfrak{S}(G,n)$ is not more than $|\mathfrak{B}_0|\omega=\beta$ and

$$\bigcup\mathfrak{S}=\bigcup_{\substack{G\in\mathfrak{B}_0\\ n<\omega}}\mathfrak{S}(G,n),$$

it is enough to prove that for every $G\in\mathfrak{B}_0$ and $n<\omega$ we can get $\bigcup\mathfrak{S}(G,n)$ as the union of at most β elements.

This we are going to prove by induction on n.

For $n=0$ this is trivial. Assume now it is true for $n-1$ and for all $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{B}$, where $n\geq 1$. If there exist finitely many indices

$$\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(s)}<\alpha^+$$

such that in each member $B_{\xi_1}\cap\ldots\cap B_{\xi_n}\cap G\in\mathfrak{S}(G,n)$ at least one of the sets $B_{\xi^{(i)}}$, occurs let us denote by $\mathfrak{S}_i$ the system of those elements of $\mathfrak{S}(G,n)$, which $B_{\xi^{(i)}}$ occurs in. Then we can use the induction hypothesis for each of the systems obtained by the removal of $B_{\xi^{(i)}}$ from every member of $\mathfrak{S}_i$. Having intersected these reduced systems by $B_{\xi^{(i)}}$ again, their union yields us the required system of at most β sets.

If such a sequence of indices does not exist, then, for every finite sequence of indices $\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(s)}<\alpha^+$, we can find an element $B_{\xi_1}\cap\ldots\cap B_{\xi_n}\cap G$ of $\mathfrak{S}(G,n)$ such that

$$\xi^{(i)}\neq\xi_j \text{ for } 1\leq i\leq s \text{ and } 1\leq j\leq n.$$

But then we can obviously define an infinite sequence

$$B_{\xi_1^{(1)}}\cap\ldots\cap B_{\xi_n^{(1)}}\cap G,$$
$$\ldots$$
$$B_{\xi_1^{(k)}}\cap\ldots\cap B_{\xi_n^{(k)}}\cap G,$$
$$\ldots$$

of elements belonging to $\mathfrak{S}(G,n)$ such that all the occurring indices $\xi_i^{(k)}$ are different. We claim that in this case

$$R_\alpha-\bigcup_{k<\omega}(B_{\xi_1^{(k)}}\cap\ldots\cap B_{\xi_n^{(k)}})\Big|\leq\beta.$$

This inequality is obviously equivalent to

$$\Big|\bigcap_{k<\omega}(C_{\xi_n^{(k)}}\cup\ldots\cup C_{\xi_n^{(k)}})\Big|\leq\beta.$$

In order to show this we will prove the existence of an $\eta_0\in\alpha=R_\alpha$ such that $\eta_0<\eta<\alpha$ implies

$$\eta\notin\bigcap_{k<\omega}(C_{\xi_1^{(k)}}\cup\ldots\cup C_{\xi_n^{(k)}}).$$

Let us define η_0 as the first ordinal greater than all the countably many ordinals

$$\eta^{(\xi_{j_1}^{(k_1)})}_{\nu^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}} \quad \text{and} \quad \eta^{(\xi_{j_2}^{(k_2)})}_{\nu^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2}}$$

where $\nu^{(k_1,k_2)}_{j_1,j_2} = \nu(\xi^{(k_1)}_{j_1}, \xi^{(k_2)}_{j_2})$, $k_1, k_2 < \omega$ and $j_1, j_2 \leq n$. Then $\eta_0 < \alpha$ really, since $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha > \omega$. Assume now $\eta_0 < \eta < \alpha$ and $\eta \in \bigcap_{k<\omega} (C_{\xi_1^{(k)}} \cup \ldots \cup C_{\xi_n^{(k)}})$. Then for each $k < \omega$ there exists a j_k, $1 \leq j_k \leq n$ with $\eta \in C_{\xi_{j_k}^{(k)}}$. Since the sequence of ordinals $(\xi_{j_k}^{(k)} : k < \omega)$ consists of different elements, it has an *increasing* infinite subsequence $(\xi_{j_{kl}}^{(k_l)} : l < \omega)$. For brevity let us denote $\xi_{j_{kl}}^{(k_l)}$ by ξ_l. η belonging to each C_{ξ_l}, it can be written in the form $\eta = \eta_{\nu_l}^{(\xi_l)}$. We shall prove now $\nu_k > \nu_l$ if $k < l$. Assume on the contrary that $\nu_k \leq \nu_l$, then we would get

$$\eta = \eta_{\nu_l}^{(\xi_l)} \geq \eta_{\nu_k}^{(\xi_l)} > \eta_{\nu_k}^{(\xi_k)} = \eta$$

according to our definition of $\eta_0 < \eta$. This is, however, a contradiction, because $\{\nu_k : k < \omega\}$ would be a strictly decreasing sequence of ordinals, which obviously does not exist, and this contradiction shows that

$$|(\bigcup \mathfrak{S}(G,n) \setminus \bigcup_{k<\omega} (B_{\xi_1^{(k)}} \cap \ldots \cap B_{\xi_n^{(k)}})| \leq \beta$$

from what obviously follows that $\bigcup \mathfrak{S}(G,n)$ is the union of at most β members of $\mathfrak{S}(G,n)$. This completes the proof of (ii). Note that as a partial result of the proof we obtained that the intersection of infinitely many (different) members of $\mathfrak{L}$ is always of a cardinality less than or equal to β.

In order to prove (iii), in view of Lemma 4, it is enough to show that, if $S \subset R_\alpha$ and $|S| = \alpha$, then there are α^+ different open subsets of the subspace S. Indeed, because of (ii), S is hereditarily β-Lindelöf, hence $w(S, \tau_S) \leq \alpha = 2^\beta$ would imply $|\tau_S| \leq w(S, \tau_S) \leq (2^\beta)^\beta = \alpha$. Here, of course, τ_S denotes the subspace topology on S determined by τ. In order to show $|\tau_S| = \alpha^+$ it is sufficient to prove that there are α^+ different sets having the form $S \cap C_\xi$ for some $C_\xi \in \mathfrak{L}$, because the complements of these sets in S yield α^+ open subsets of (S, τ_S).

Let us denote by $\mathfrak{L}_S$ the system of all elements of $\mathfrak{L}$ having non-empty intersection with S. Then $\xi > \xi(S)$ implies

$$C_\xi \in \mathfrak{L}_S.$$

Note first that, if $\{C_{\xi_\varrho} : \varrho < \alpha^+\}$ is a subsystem of $\mathfrak{L}_S$ with indices cofinal with α^+, then the sets of form $C_{\xi_\varrho} \cap S$ cannot all coincide. Since if this was the case, according to our above remerk, $C_{\xi_\varrho} \cap S$ would have a cardinality not greater than β, being contained in the intersection of the C_{ξ_ϱ}'s. But then $|S - (C_{\xi_\varrho} \cap S)| = \alpha$, which is impossible because of the property b) of $\mathfrak{L}$, since if $\xi_\varrho > \xi(S(C_{\xi_\varrho} \cap S))$ we would get $C_{\xi_\varrho} \cap [S - (C_\xi \cap S)] \neq 0$.

Thus for every set of the form $S \cap C_\xi$ there exist at most α members of $\mathfrak{L}_S$ having the same intersection with S. Now we can define the required α^+ different sets of form $S \cap C_\xi$ by transfinite induction. If for some $\varrho_0 < \alpha^+$ the pairwise different intersections $C_{\xi_\varrho} \cap S$ have been already defined for each $\varrho < \varrho_0$, according to our above considerations, there are only at most $|\varrho_0 \cdot \alpha| = \alpha$

elements of $\mathfrak{L}_S$, whose intersections with S coincide with some of the sets $C_{\xi_0} \cap \varrho$ already defined. Hence we can find an element $C_{\xi_{\varrho_0}} \in \mathfrak{L}_S$ whose intersection with S is different from all the intersections having been defined already. Thus we really get α^+ sets of the required form, what completes the proof of (iii).

COROLLARY. If α has the form $\alpha = \beta^+$, then

$$(w, \overline{\mathcal{O}}_2) \to \alpha.$$

PROOF. Let us take the space (R_α, τ) given by Theorem 5 and apply Theorem 1 to it. Then we get a Hausdorff space $(R_\alpha, \bar{\tau})$ that is hereditarily β-Lindelöf, and $S \subset R$ and $|S| \leq \beta < \alpha$ imply that S is discrete, hence $w(S) \leq \beta$.

We will also show that $(R_\alpha, \bar{\tau})$ satisfies the property $N(\alpha)$ as well. Indeed, if $S \subset R_\alpha$ and $|S| = \alpha$, then for the subspace (S, τ_S) $|\bar{\tau}_S| = \alpha^+$, because $\bar{\tau}$ is finer than τ, i.e. $\bar{\tau}_S \supset \tau_S$. $(S, \bar{\tau}_S)$ is, however, hereditarily β-Lindelöf, hence by Lemma 4 $w(S, \bar{\tau}_S) = \alpha^+$.

These results obviously imply

$$(w, \overline{\mathcal{O}}_2) \to \alpha.$$

Finally we mention that for regular spaces we cannot even solve the following problems:

PROBLEM 1. Does there exist a regular space which possesses the property $N(\omega_1)$?

PROBLEM 2. Does there exist a hereditarily ω-Lindelöf space which has the weight ω_2?

References

[1] I. JUHÁSZ, Über ein Mächtigkeitsproblem für topologische Räume, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **8** (1965), 75–83.

[2] Ю. М. СМИРНОВ, К теории финально-компактных пространств, *Украин. Мат. Журн.*, **3** (1951), 52–60.

[3] W. SIERPIŃSKI, Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits, *Fund. Math.*, **2** (1951), 52–60.

[4] A. HAJNAL – I. JUHÁSZ, On discrete subspaces of topological spaces, *Indag. Math.*, **29** (1967), 343–356.

[5] A. HAJNAL – I. JUHÁSZ, Some remarks on a property of topological cardinal functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, (in press).

[6] А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Об одном классе пространств, *Мат. Сборник*.

[7] J. DE GROOT, Discrete subspaces of Hausdorff spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **13** (1965), 537–544.

[8] P. ERDÖS, A. HAJNAL and R. RADO, Partition relations for cardinal numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 93–196.

A REMARK ON FINITE GROUPS

By

K. A. CORRÁDI

Department of Algebra and Number Theory of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received 15 November, 1967)

Let G be a finite group. Denote by $|G|$ its order. For an arbitrary but fixed natural number n denote by $A(n; G)$ the number of elements x in G satisfying

$$x^n = e, \tag{1}$$

where e stands for the unity element of G.

We prove the following

THEOREM. *Let G be a finite group. Suppose that H is a Hall-group of odd order in G. Suppose further that for a square-free divisor n of $|G|$ the relation $A(n; G) = n$ holds. In the case*

$$n_0 = (n, |H|) > 1 \tag{2}$$

define k as the uniquelly determined greatest divisor of $|H|$ containing prim-factors dividing n_0 only. Then for every but fixed decomposition $k = ab$ with the property that for any pair p, q of primes with $p|a$ and $q|b$ the relation $q > p$ holds, there are subgroups of order b in G, and all these subgroups are super-solvable.

To prove this Theorem we need some resultes partly well-known, partly new. From these the following well-known theorem of Frobenius is of great importance.

LEMMA 1. Let G be a finite group, n a fixed divisor of $|G|$. For an element a in G denote by $K(a)$ the class of elements in G, which are conjugate to a. Then the number of elements x in G with

$$x^n \in K(a)$$

is divisible by $(n|H|, |G|)$. Especially in the case $a = e$ the number of elements x in G satisfying (1) is different from zero and is divisible by n.

For the Lemma 1 see [1]. The proof of this lemma may be found in [2] too. See p. 255., Theorem 11.6.2.

The main tool of our investigations is the following result which we deduce from Lemma 1.

LEMMA 2. Let G be a finite group. Suppose that for square-free divisor n of $|G|$ the relation $A(n; G) = n$ holds. Then the elements x in G satisfying (1) form a characteristic subgroup in G.

PROOF OF LEMMA 2. For a natural number n denote by $U(n)$ the number of different prime-divisors of n. We prove Lemma 2. by induction on $U(n)$. If $U(n) = 1$ i.e. n is a prime-power, the statement of Lemma 2. is obvious. Suppose therefore that for the square-free number n $U(n) > 1$ holds. and that Lemma 2 applies for m if $U(m) < U(n)$ holds. Take G as the group for which $|G|$ is minimal and for which the assertion of the lemma is not yet proved.

Denote by p the least prime-divisor of n. Let n' be defined by $n = pn'$. We begin by showing that $A(n'; G) = n'$ holds, or G has a non-trivial centre, whose order is divisible by p.

We have by Lemma 1 the inequality

$$n' \leq A(n'; G) \leq n. \tag{3}$$

Using that n is square-free, and noting that there are elements of order p in G it now follows, that on the right-hand side of (3) the sign of equality can not occur.

Suppose that $n' < A(n'; G)$ holds. By $A(n; G) = n$ and by $A(n'; G) < n$ it now follows, that there is at least one element y of order p in G, for which there are elements x in G with

$$x^{n'} = y \in K(y). \tag{4}$$

If $|K(y)| = 1$ holds, G has the centre with the required property.

In the sequel from the assumptions $n' < A(n'; G)$ and $|K(y)| > 1$ we deduce a contradiction. By (4) it follows, that for every l with $1 \leq l \leq p-1$ the equation

$$x^{n'} = y^l \tag{5}$$

has at least one solution x in G. If for every l mentioned before except $l = 1$, $y^l \notin K(y)$ holds, the contradiction quoted formerly follows at once using Lemma 1 with y^l $(1 \leq l \leq p-1)$ instead of a.

In the opposite case there is a number s with $s/p-1$ greater than one so that there are $\frac{1}{s}(p-1)$ classes of conjugate elements in G each of them containing exactly s from the elements y^l. By $s \leq p$ using the definition of p and Lemma 1 again we have the contradiction required.

So either $A(n'; G) = n'$, or there is a non-trivial centre in G, whose order is divisible by p. In the first case the elements for which

$$x^{n'} = e$$

holds form a characteristic subgroup of order n' in G by $U(n') < U(n)$. In the second one the centre of G has subgroup of order p, which is a normal subgroup in G. In both cases there is also a normal subgroup in G, whose order m is a divisor of n. Denote this subgroup by D.

Consider now the group G/D. Take the elements z in G/D for which

$$z^{\frac{n}{m}} = e'$$

holds, where e' stands for the unity element of G/D. If z is such an element, consider the elements x in G, whose image by the natural homomorphism generated by D is the element z. They lay in a residue-class of D in G. For these elements

$$x^{\frac{n}{m}} \in D \tag{6}$$

holds.

By $|D| = m$ and by (6) now we have that $x^n = e$ holds.

The number of the z-s in G/D is $t\,\frac{n}{m}$ by Lemma 1. So on the one hand using $A(n; G) = n$, we have that the number of the elements x in G is at most n. On the otherhand using that there are $t\,\frac{n}{m}$ z-s in G/D, by the definition of the elements x it follows that their number is at least $m \cdot t \cdot \frac{n}{m} = tn$. So we have that $t = 1$ had to hold. This means that the elements z in G/D form a normal subgroup. Note $U\left(\frac{n}{m}\right) = U(n)$ and that the number of the z-s is equal to $\frac{n}{m}$.

So the elements x form a group of order n in G, and are the only elements satisfying (1) in G. So the assertion of Lemma 2 is proved.

For the proof of the Theorem we need the following well-known facts too, which we state as lemmas.

LEMMA 3. Let G be a finite group, H a subgroup of G.

Two different Sylow-groups of H of the same order can not be contained in the same Sylow-group of G.

For this lemma see [2] p. 70, Theorem 3.3.4.

LEMMA 4. Let G be a finite group with $|G| = p^m$, where p stands for an odd prime. Suppose that G has a single subgroup of order p. Then G is zyclic.

See [2] pp. 216–220, Theorem 10.2.1 and Theorem 10.2.3.

LEMMA 5. Let G be a finite group, whose Sylow-groups are all zyclic. Then G is super-solvable and for every decomposition of $|G|$ in the form

$$|G| = ab$$

where the prime-factors of b are all greater or equal than that of a, $A(b; G) = b$ holds and the elements x with

$$x^b = e$$

in G form a characteristic subgroup of G.

Lemma 5 is a well-known result of O. Iu. SCHMIDT [3]. See [2] p. 259., Theorem 11.7.2. too.

LEMMA 6. Let G be a finite solvable group. Let $|G| = m \cdot n$, $(m, n) = 1$.

a) There is a subgroup of order m in G.

b) The subgroups of order m are all conjugate to each other.

c) Any subgroup of G, whose order is a divisor of m, lays in one of the subgroups of order m.

This lemma is a result of P. HALL [4]. See [2] p. 288, Theorem 11.1.1 too. The groups in Lemma 6 are the Hall-groups of G.

We are now in a position to prove our Theorem.

Let p be any prime divisor of n_0. By the definition of k, p/n holds. By Lemma 2 the elements x in G satisfying (1) form a characteristic subgroup in G. By the assumption of the Theorem the elements of order p lay all in this subgroup mentioned. By Lemma 3 and by Lemma 4 it now follows that the p-Sylow-group of G is zyclic.

We make now use of the celebrated result of FEIT and THOMPSON, which asserts that all groups of odd order are solvable. See [5]. This remark applies to H. So by Lemma 6 H has a Hall-group K of order $k \cdot K$ is supersolvable. Note that the Sylow-groups of K are all zyclic and apply Lemma 5. So by Lemma 5 the existence of the subgroups of order b-in the notation of the theorem-now follows. These subgroups are super-solvable. Note that K is super solvable and the obvious fact that the subgroups of a super-solvable group are all super-solvable.

To finish the proof of the Theorem it remains to show that any subgroup of G of order b is super-solvable. This follows noting that the Sylow-groups of these subgroups are all zyclic and appealing on Lemma 5 again.

This completes the proof of the Theorem.

The Theorem has the following

COROLLARY. If the Hall-group H of the Theorem is nilpotent, so in the notation of the Theorem any subgroup of order b in G is zyclic, and the subgroups of order b in G are all conjugate to each-other.

To prove the Corollary it is enough to observe that a nilpotente group is the direct-product of its Sylow-groups, and that by a known result of Wielandt [6], if there is a nilpotent Hall-group H in the finite group G, so the subgroups of G, whose order is a divisor of $|H|$ lay in a suitable conjugate of H.

This proves the Corollary.

References

[1] FROBENIUS, G., Über auflösbaren Gruppen, IV. *S.-B. Preuß. Akad. Wiss. Berlin*, 1901, 1916 – 1230.

[2] KOCHENDÖRFER, R., *Gruppentheorie*, Leipzig, 1966, Akad. Verlagsgesellschaft.

[3] SCHMIDT, O. J., Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, *Math. Zeitschrift*, 29 (1928), 34 – 41.

[4] HALL, P., A characteristic property of soluble groups, *J. London Math. Soc.*, 12 (1937) 198 – 200.

[5] FEIT, W. and THOMPSON, J. G., Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.*, 13, (1963), 775 – 1029.

[6] WIELANDT, H., Zum Satz von Sylow, II., *Math. Zeitschrift*, 71 (1959), 461 – 462.

ON A FUNCTIONAL CONNECTED WITH THE ZEROS OF THE SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $y''+q(t)y=0$, WHERE $q(t)$ IS A NONNEGATIVE, MONOTONIC, CONCAVE FUNCTION

By

Á. ELBERT

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest

(Received January 3, 1968)

D. BANKS [1] proved that if $y=y(t)$ is the solution of the differential equation

$$y''+q(t)y=0 \qquad \left|' = \frac{d}{dt}\right| \tag{1}$$

where $q(t)$ is a non-negative, concave function, the solution $y(t)$ satisfies the initial conditions $y(0)=0$, $y'(0)\neq 0$ and T is the first positive root of the equation $y(t)=0$, then

$$T\int_0^T q(t)\,dt \geqq 6{,}9536\ldots.$$

If $q(t)$ is monotonic but not necessarily concave, then

$$T\int_0^T q(t)\,dt \geqq 7{,}88\ldots.$$

Following Banks' method we shall prove

THEOREM 1. *Let T be the first positive root of the solution $y=y(t)$ of* (1) *with the initial conditions $y(0)=0$, $y'(0)\neq 0$ and suppose that $q(t)$ is non-negative, monotonic and concave in the closed interval $[0, T]$. Then the inequality*

$$T\int_0^T q(t)\,dt \geqq 8{,}550\ldots \tag{2}$$

holds. The constant is the best one.

DEFINITION. We will call the functional of $q(t)$ in (2) with T defined in Theorem 1 simply the functional of $q(t)$ corresponding to the equation (1) or the functional of $q(t)$.

PROOF. The functional of $q(t)$ is invariant with respect to any linear transformation of x, thereby we can take $T = 1$.

On account of the symmetry of the conditions $y(0) = y(1) = 0$ in 0 and 1 we can assume $q(t)$ to be increasing. In case of a decreasing $q(t)$ we can consider the new function $q^*(t) = q(1-t)$ obtained by a linear transformation from $q(t)$. First we restrict ourselves to the class of function $q(x)$ having continuous first and second derivatives in $[0, 1]$.

Let $q_\mu(t)$ be defined as follows:

$$q_0(t) \equiv 1 \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

(3)

$$q_\mu(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\mu(2-\mu)}\, t & 0 \leqq t \leqq \mu \\ \dfrac{2}{2-\mu} & \mu \leqq t \leqq 1, \ 0 \leqq \mu \leqq 1, \end{cases}$$

then

$$\int_0^1 q_\mu(t)\, dt = 1 \qquad 0 \leqq \mu \leqq 1, \tag{4}$$

and

$$q(t) = q(0)q_0(t) + \frac{1}{2} q'(1) q_1(t) - \int_0^1 \frac{\mu(2-\mu)}{2} q''(\mu) q_\mu(t)\, d\mu. \tag{5}$$

One can prove the validity of (5) by a partial integration using definition (3).

Integrating $q(t)$ over $[0, 1]$ we have by (4) and (5)

$$\int_0^1 q(t)\, dt = q(0) + \frac{1}{2} q'(1) - \int_0^1 \frac{\mu(2-\mu)}{2} q''(\mu)\, d\mu. \tag{6}$$

In the following we shall denote by $\lambda(p)$ the smallest eigenvalue of the boundary value problem of the differential equation

$$y'' + \lambda p(t) y = 0 \tag{7}$$

with the conditions $y(0) = y(1) = 0$. We shall use the fact that $\lambda(p)$ is the minimum of the Rayleigh quotient [2], i.e.

$$\lambda(p) = \min_u \frac{\int_0^1 [u'(t)]^2\, dt}{\int_0^1 p(t) u^2(t)\, dt}, \tag{8}$$

where $u(x)$ ranges over all functions having piecewise continuous first derivatives in $[0, 1]$ which satisfy the conditions $u(0) = u(1) = 0$.

Applying (8), (5), (6) and taking into account the fact that under our assumption the factor $\frac{-\mu(2-\mu)}{2} q''(\mu)$ of $q_\mu(t)$ in (5) is non-negative, we obtain

$$1 = \frac{1}{\lambda(q)} = \max_u \frac{\int_0^1 q(t)u^2(t)\,d(t)}{\int_0^1 u'^2(t)\,dt} \leqq q(0) \max_u \frac{\int_0^1 q_0(t)u^2(t)\,dt}{\int_0^1 u'^2(t)\,dt} +$$

$$+ \frac{1}{2} q'(1) \max_u \frac{\int_0^1 q_1(t)u^2(t)\,dt}{\int_0^1 u'^2(t)\,dt} - \int_0^1 \frac{\mu(2-\mu)}{2} q''(\mu) \max_u \frac{\int_0^1 q_\mu(t)u^2(t)\,dt}{\int_0^1 u'^2(t)\,dt}\,d\mu \leqq$$

$$\leqq \max_{0\leqq\mu\leqq 1} \frac{1}{\lambda(q_\mu)} \int_0^1 q(t)\,dt,$$

hence

$$\int_0^1 q(t)\,dt \geqq \min_{0\leqq\mu\leqq 1} \lambda(q_\mu). \tag{9}$$

Now we are interested in finding the minimum of the function $\lambda(q_\mu)$. From (7) we have the equation

$$y'' + \lambda(q_\mu)q_\mu(t)y = 0 \tag{10}$$

which has a solution with $y_\mu(0) = y_\mu(1) = 0$ and $y'_\mu(0) \neq 0$. By the linear transformation $t = cx$ where $c = c(\mu) = \left[\lambda(q_\mu)\frac{2}{\mu(2-\mu)}\right]^{-\frac{1}{3}}$ we get from (10) the differential equation

$$u'' + Q_\nu(x)u = 0 \tag{11}$$

for $0 < \mu \leqq 1$, where

$$Q_\nu(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqq x \leqq \nu^{\frac{2}{3}}, \\ \nu^{\frac{2}{3}}, & x \geqq \nu^{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad \left(\nu^{\frac{2}{3}} = |\nu(\mu)|^{\frac{2}{3}} = \frac{\mu}{c(\mu)}\right). \tag{12}$$

Let $U_\nu(x)$ be the solution of the differential equation (11) with the initial conditions $U_\nu(0) = 0$, $U'_\nu(0) \neq 0$ and let $\psi_\nu(x)$ be the continuous function defined by

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tg} \psi_\nu = \frac{\sqrt{Q_\nu(x)}\, U_\nu(x)}{U'_\nu(x)}, \quad \psi_\nu(0) = 0.$$

Similarly we define the continuous function $\psi(x)$ by

$$\operatorname{tg} \psi(x) = \frac{\sqrt{x}\, U(x)}{U'(x)}, \quad \psi(0) = 0,$$

where $U(x)$ is the solution of the differential equation

$$u'' + xu = 0$$

with the initial conditions $U(0) = 0$, $U'(x) \neq 0$. The function $\psi(x)$ is increasing [3] and satisfies the differential equation

$$\text{(14)} \qquad \psi' = \sqrt{x} + \frac{\sin 2\psi}{4x}.$$

It is obvious by (12) that

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} \psi_\nu(x) &= \psi(x), \qquad 0 \leqq x \leqq \nu^{\frac{2}{3}}, \\ \psi'_\nu(x) &= \nu^{\frac{1}{3}}, \qquad x \geqq \nu^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

By (13) $\operatorname{tg} \psi_\nu(x)$ vanishes if and only if $U_\nu(x) = 0$. 0 is a root of $\operatorname{tg} \psi_\nu(x)$ and its first positive root be, say, at $x = x_\nu$ where $\psi_\nu(x_\nu) = \pi$. Therefore by (15) we have

$$\text{(16)} \qquad x_\nu = \nu^{\frac{2}{3}} + [\pi - \psi(\nu^{\frac{2}{3}})] \cdot \nu^{-\frac{1}{3}}.$$

For the sake of simplicity we write $\varphi(\nu) = \psi(\nu^{2/3})$ and by (14) we have

$$\text{(17)} \qquad \varphi'(\nu) = \psi'(\nu^{\frac{2}{3}}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \nu^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{\sin 2\varphi}{6\nu}.$$

The functional of $q_\mu(t)$ remains unchanged by a linear transformation, therefore by (16) we obtain

$$\text{(18)} \quad \lambda(q_\mu) = \int_0^1 \lambda(q_\mu) q_\mu(t)\, dt = x_\nu \int_0^{x_\nu} Q_\nu(x)\, dx = (\nu + \pi - \varphi) \left| \frac{1}{2} \nu + \pi - \varphi \right| =$$

$$\overset{\text{def}}{=} J(\nu), \quad 0 < \mu \leqq 1.$$

Equality (18) holds for $\mu = 0$, too, because $\lambda(q_0) = \pi^2$. By taking $\nu(0) = 0$ we have $\varphi(0) = 0$ and by the definition of $J(\nu)$ in (18) we obtain $J(0) = \pi^2$. By (17) we have

$$J'(\nu) = \frac{1}{6}(\pi-\varphi) - \frac{\sin 2\varphi}{6\nu}\left[\frac{3}{2}\nu + 2(\pi-\varphi)\right]. \tag{19}$$

The function $\varphi(\nu)$ is increasing from 0 till π when ν varies from 0 till $\nu_0 = \max_{0\leq\mu\leq 1} \nu(\mu)$, hence one can consider the expression $J'(\nu)$ in (19) as a function of φ, meanwhile it is $\nu = \nu(\varphi)$. We want to show that the equation $J'(\nu) = 0$ has only one root. The proof goes in 3 steps.

1. If $0<\varphi(\nu)\leqq\frac{\pi}{3}$ then $J'(\nu)<0$. From (14) it follows

$$\psi'(x) > \sqrt{x} \quad \text{for} \quad 0<\psi(x)<\frac{\pi}{2},$$

hence

$$q(\nu) = \psi(\nu^{\frac{2}{3}}) = \int_0^{\nu^{\frac{2}{3}}} \psi'(x)\,dx > \int_0^{\nu^{\frac{2}{3}}} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\nu. \tag{20}$$

The concavity of $\sin x$ on the interval $[0, \pi]$ implies the validity of the inequality

$$\sin x \geqq \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x \quad \text{for} \quad 0\leqq x\leqq\frac{2\pi}{3}, \tag{21}$$

hence by (20) and (21)

$$6J'(\nu) = -\frac{3}{2}\sin 2\varphi - (\pi-\varphi)\left[2\frac{\sin 2\varphi}{\nu} - 1\right] < -(\pi-\varphi)\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1\right) < 0.$$

2. If $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ then $J''(\nu)>0$. From (19) it follows by differentiation

$$6J''(\nu) = \varphi'(-1-3\cos 2\varphi) - \frac{4}{\nu}\cos 2\varphi\cdot\varphi'\cdot(\pi-\varphi) + \frac{2\sin 2\varphi}{\nu^2}(\pi-\varphi) +$$

$$+\frac{2}{\nu}\sin 2\varphi\cdot\varphi' > 0,$$

because all terms are non-negative in the interval $\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

3. If $\frac{\pi}{2}\leqq\varphi<\pi$, then $J'(\nu)>0$. This follows immediately from (19) because $\sin 2\varphi\leqq 0$ for these values of φ.

Statements 1, 2 and 3 above show that the function $J'(\nu)$ vanishes at one and only one place and here $J(\nu)$ attains its minimum. This minimum can be determined numerically for example by a computer and this gives by (18)

$$\min J(\nu) = \min_{0 \leqq \nu \leqq 1} \lambda(q_\nu) = 8{,}550\ldots, \tag{22}$$

hence by (9) the inequality (2) holds for all $q(t)$ satisfying the conditions of Theorem 1 and having continuous first and second derivatives.

If $q(t)$ is increasing but has no continuous first and second derivatives in $[0, T]$ then we extend the domain of definition of $q(t)$ from $[0, T]$ to $[0, \infty)$ by taking $q(t) = q(T)$ for $t \geqq T$ and define the functions $q_\varepsilon(t)$ by

$$q_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^{t+\varepsilon} \left[\int_\tau^{\tau+\varepsilon} q(\sigma)\, d\sigma \right] d\tau \quad (\varepsilon > 0).$$

The function $q_\varepsilon(t)$ fulfils the conditions of Theorem 1 and has continuous first and second derivatives on $[0, \infty)$, therefore its functional satisfies the inequality

$$T_\varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} q_\varepsilon(t)\, dt \geqq 8{,}550 \quad (\varepsilon > 0). \tag{23}$$

But $\lim_{\varepsilon \to +0} q_\varepsilon(t) = q(t)$ and $\lim_{\varepsilon \to +0} T_\varepsilon = T$, thereby the left-hand side of (22) tends to that of (2), hence the inequality of (2) holds for this $q(t)$, too. This proves Theorem 1.

For the sake of completeness we mention that GALBRAITH [4] proved the inequality

$$T \int_0^T q(t)\, dt \leqq \pi^2 \tag{24}$$

under the restrictions of Theorem 1 but dropping the condition of monotonity.

At last we consider the case when $q(t)$ is a non-negative linear function, i.e. $q(t) = a + mt$. FINK [5] proved for fixed T that if a increases from 0 till π^2/T^2 then $m = m(a)$ decreases and the functional of $q(t)$ increases from $\lambda_1 = 9{,}4781\ldots$ to π^2. We shall prove an inequality about this functional in

THEOREM 2. *If $q(t) = a + mt$ is a linear non-negative increasing function then the inequalities*

$$\pi^2 \geqq T \int_0^T q(t)\, dt \geqq \frac{\pi^2}{\dfrac{\pi^2}{\lambda_1} - aT^2 \left[\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\pi^2} \right]} \quad (\lambda_1 = 9.4781\ldots) \tag{25}$$

and

$$0 \leqq aT^2 \leqq \pi^2 \tag{26}$$

hold.

REMARK. It is obvious that for a linear non-negative decreasing $q(t)$ inequality (25) holds with $a+mT$ instead of a.

PROOF. We transform the differential equation (1) by the substitution $t = Tx$ into

$$Y''+T^2q(Tx)Y = 0,$$

which has a solution with $Y(0) = Y(1) = 0$, $Y'(0) \neq 0$. Now we have

$$T^2q(Tx) = aT^2+mT^3x,$$

where $a \geqq 0$, $m \geqq 0$, hence by (8) and (3)

$$(27)\quad 1 = \frac{1}{\lambda(T^2q(Tx))} = \max_u \frac{\int_0^1 \left[aT^2q_0(x)+\frac{1}{2}mT^3q_1(x)\right]u^2(x)\,dx}{\int_0^1 u'^2(x)\,dx} \leqq \frac{aT^2}{\lambda(q_0)}+\frac{mT^3}{2\lambda(q_1)}.$$

But $\lambda(q_0) = \pi^2$ and for determining the quantity $\lambda(q_1)$ we must solve the equation

$$Y''+2\lambda(q_1)xY = 0$$

with the boundary conditions $Y(0) = Y(1) = 0$. Its solutions with the initial condition $Y(0) = 0$ are

$$Y(x) = C\sqrt{x}\,J_{1/3}\left(\sqrt[2/3]{2\lambda(q_1)}\,x^{3/2}\right) \quad (C = \text{constant}).$$

From the boundary condition at $x=1$ we have

$$(28)\qquad \lambda(q_1) = \frac{9}{8}j_1^2 \overset{\text{def}}{=} \lambda_1,$$

where $j_1 = 2{,}902568\ldots$ is the first positive root of the Bessel function $J_{1/3}(x)$ and $\lambda_1 = 9{,}4781\ldots$.

The inequality (24) implies

$$(29)\qquad T\int_0^T q(t)\,dt = aT^2+\frac{1}{2}mT^3 \leqq \pi^2,$$

and from this inequality (26) follows at once. By (27) and (28) we have

$$T\int_0^T q(t)\,dt \geqq \frac{aT^2+\frac{1}{2}mT^3}{\frac{aT^2}{\pi^2}+\frac{mT^3}{2\lambda_1}},$$

where the right-hand side is — by $\lambda_1 < \pi^2$ — an increasing function of $\frac{1}{2}mT^3$.

Therefore by (29)

$$T\int_0^T q(t)\,dt \geqq \frac{aT^2+(\pi^2-aT^2)}{\dfrac{aT^2}{\pi^2}+\dfrac{\pi^2-aT^2}{\lambda_1}},$$

which is the right inequality of (25). The left inequality is the same as in (24) and this completes the proof of Theorem 2.

Finally I want to express my gratitude to Mr. St. Tomaszewski (Wrocław) for having computed on ODRA 1013 the numerical value in (22).

References

[1] D. Banks, Bounds for the eigenvalues of some vibrating systems, *Pac. J. Math.*, **10** (1960), 439–474.
[2] L. Collatz, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung*, Chelsea Publ. Co., 1948.
[3] Á. Elbert, On the zeros of the solutions of the ordinary differential equation of second order, *Publicationes Math.*, (1968), (in the press).
[4] A. S. Galbraith, On the zeros of solutions of ordinary differential equation of the second order, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 333–337.
[5] A. M. Fink, On the zeros of $y''+py=0$ with linear, convex and concave p, *J. Math. Pures et Appl.*, **46** (1967), 1–10.

ÜBER DEN DURCHSCHNITT EINES KREISES UND EINES POLYGONS

Von

G. HAJÓS

Lehrstuhl für Geometrie der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 5. Jänner 1968)

1. L. FEJES TÓTH [1] hat für die euklidische und nicht-euklidische Ebene das Moment

$$M(D)=\int_D f(OP)\,dP$$

eines Bereiches D bezüglich des Punktes O eingeführt, wobei f eine streng abnehmende Funktion und dP das Inhaltselement bei dem Punkt P bezeichnet. Er hat diesbezüglich folgende, *Momentenlemma* genannte Behauptung bewiesen:

Unter allen konvexen n-Ecken von gleichem Inhalt hat das regelmässige n-Eck mit dem Zentrum O ein größtmögliches Moment M.

Dies kann leicht mit Hilfe des folgenden Satzes bewiesen werden, der zugleich eine leichte Folgerung des Momentenlemmas darstellt:

SATZ. *Unter den konvexen Polygonen mit höchstens n Ecken und von gleichem Inhalt weist das mit einem gegebenen Kreis konzentrische regelmäßige n-Eck einen maximalen Durchschnittsinhalt mit diesem Kreis auf.*

Unizität wird dabei nicht behauptet: es gibt Fälle, wo auch andere der betrachteten Polygone einen Durchschnitt von ebenfalls maximalem Inhalt aufweisen. Es ist offenbar, daß dies der Fall ist, wenn der Inhalt der betrachteten Polygone kleiner als der Inhalt eines in den gegebenen Kreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist, und ebenso, wenn dieser Inhalt den Inhalt des umschriebenen regelmäßigen n-Ecks übertrifft. In diesen Fällen bedarf es keines Beweises, daß der Durchschnittsinhalt bei konzentrischen regelmäßigen n-Ecken maximal ist, da dann der Durchschnitt dieses n-Eck bzw. Kreis ist. In allen übrigen Fällen gilt die Unizität: das Maximum wird nur durch die konzentrischen regelmäßigen n-Ecke erreicht.

In der hyperbolischen Ebene gibt es nicht immer ein umschriebenes regelmäßiges n-Eck, also dann auch keine dadurch gelieferte Schranke. Der Inhalt der betrachteten Polygone kann aber natürlich den Inhalt der Grenz-n-ecke nicht übertreffen (bei denen je zwei Nachbarseiten zueinander parallel sind). Für einen solchen Inhalt gilt unser Satz auch dann, wenn uneigentliche Eckpunkte zugelassen werden, wenn also Nachbarseiten auch parallel sein können.

Anstatt der elliptischen Ebene soll etwas allgemeiner die Kugel als sphärische Ebene betrachtet werden. Man ist hierbei berechtigt sich auf Kreise und Polygone zu beschränken, die innerhalb je einer Halbkugel liegen. Dann bleibt alles ungeändert gültig, was über die eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen n-Ecke als Inhaltsschranken gesagt wurde. Der ausgeartete Fall, daß der Kreis eine Halbkugel ist, kann dementsprechend außer Acht gelassen werden. Würde der Kreis eine Halbkugel in seinem Inneren enthalten, so genügte es anstatt des Kreises und des Polygons die Ergänzungsbereiche ins Auge zu fassen, da die für diese und für die ursprünglichen Bereiche ausgesprochenen Behauptungen äquivalent sind. Ist die Konvexität in allgemeinerem Sinne derart verstanden, daß je zwei Punkte des Bereiches durch wenigstens eine Strecke innerhalb des Bereiches verbunden werden können, so ist der konvexe Bereich bekanntlich entweder in einer Halbkugel enthalten oder enthält er eine Halbkugel. Dieser letzte Fall darf aber in unserer Untersuchung außer Acht gelassen werden, da bei in einer Halbkugel enthaltenen Kreisen auch das umschriebene regelmäßige n-Eck in einer Halbkugel enthalten ist, und wir uns nur mit einem solchen Inhalt beschäftigen, der die angegebene obere Schranke nicht übertrifft.

Im Folgenden beweisen wir den ausgesprochenen Satz mit elementargeometrischer Methode. Der Beweis ist dem Grundgedanke nach derselbe, den der Verfasser 1964 in Charkow anläßlich des II. Gesamtsowjetischen Geometrischen Kongresses vorgetragen hat. Beim Beweis verzichten wir auf die als belanglos gekennzeichneten Fälle, beweisen aber auch das, was ergänzend über die Unizität und im hyperbolischen Fall über uneigentliche Eckpunkte ausgesprochen worden ist.

2. Wir betrachten eine Kreisscheibe K mit dem Mittelpunkt O in der euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Ebene. Im lezten Fall soll sein Halbmesser $\leq 90°$ sein. Bereiche und ihre Inhalte werden durchwegs gleicherweise bezeichnet.

Es sei $n \geqq 3$ eine natürliche Zahl. Wir wählen einen Inhalt I, der nicht kleiner als der Inhalt des in K geschriebenen und nicht größer als der Inhalt des um K geschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist (wenn es ein solches gibt). Im hyperbolischen Fall soll I den Inhalt der Grenz-n-ecke nicht übertreffen.

Wir betrachten alle konvexen Polygone Π mit höchstens n Ecken und vom Inhalt I. Im hyperbolischen Fall wird es zugelassen, daß unter den Eckpunkten von Π auch uneigentliche vorkommen. Im sphärischen Fall folgt aus der Voraussetzung bezüglich der oberen Schranke für I, daß Π innerhalb einer Halbkugel liegt.

Bei unserer Untersuchung dürfen wir voraussetzen, daß O nicht außerhalb Π liegt, da sonst Π derart verschoben werden kann, daß der Rand von Π den Punkt O enthalte, und dabei ein jeder innerhalb K liegender Punkt von Π näher nach O rückt, folglich der Inhalt $K \cap \Pi$ zunimmt. Durch die Strecken, die O mit den Ecken von Π verbinden, wird Π in Dreiecke zerspaltet. Ihre Anzahl kann auch kleiner als die Eckenzahl von Π sein, wenn nämlich O am Rand von Π liegt. Wir fassen es jedoch so auf, daß diese Anzahl immer n ist, unter den Dreiecken aber auch entartete leere Dreiecke vorkommen können, deren bei O liegender Winkel auch ein Nullwinkel oder ein gestreckter Winkel sein kann.

Wir lassen nun die Bedingung fallen, daß je zwei Nachbardreiecke außer O noch einen weiteren gemeinsamen Eckpunkt haben, und betrachten um O gelegene n Dreiecke, deren bei O liegende Winkel den Vollwinkel schlicht bedecken. Wir lassen es auch weiter zu, daß unter diesen Dreiecken auch entartete leere Dreiecke vorkommen. Im hyperbolischen Fall werden uneigentliche Eckpunkte auch weiter zugelassen. Im sphärischen Fall fordern wir es nicht mehr, daß alle Dreiecke in einer Halbkugel enthalten sein sollen, und es stört nichts, wenn wir als entartete Dreiecke auch sphärische Zweiecke zulassen. Wir behaupten, daß unser Satz auch für solche aus n Dreiecken bestehenden Figuren Σ ungeändert gültig ist.

3. Wir ersetzen jedes der n Dreiecke durch ein gleichschenkliges Dreieck mit gleichem Inhalt und gleichem Winkel bei seiner Spitze O. Wir zeigen, daß dadurch der mit K gebildete Durchschnittsinhalt zunimmt oder ungeändert bleibt.

Bei leeren Dreiecken ist die Behauptung nichtssagend. Sie ist auch dann belanglos, wenn das ersetzende gleichschenklige Dreieck in K enthalten ist oder den zu seinem Winkel an der Spitze gehörenden Kreissektor S von K enthält, da sich dann als Durchschnitt das Dreieck selbst bzw. S ergibt. Wir beschränken uns also auf den Fall, daß das Dreieck AOB durch das gleichschenklige Dreieck A_1OB_1 ersetzt wird, dessen Basis den Randkreis K in zwei Punkten schneidet (Fig. 1). Es sei $OA > OB$. Wir zeigen zuerst, daß der Schnittpunkt P der Strecken AB, A_1B_1 durch die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle AOB$ vom Schenkel OB getrennt wird.

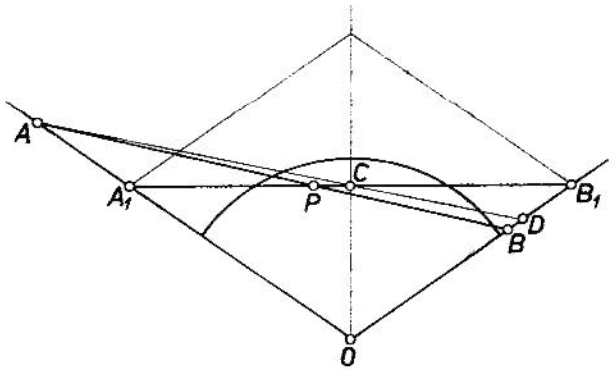

Fig. 1

Wir verbinden dazu den Punkt A mit dem Mittelpunkt C der Strecke A_1B_1. Die Verbindungsgerade schneide den Schenkel OB in D. Der Winkelbereich $\sphericalangle AOB$ enthält das Spiegelbild des Dreiecks A_1OB_1 an der Geraden A_1B_1 (auch im sphärischen Fall, da dort $OC < 90°$ ist). Hieraus folgt, daß das Spiegelbild des Dreiecks CDB_1 bezüglich des Punktes C als echter Teil im Dreieck CAA_1 enthalten ist, daß also für die Dreiecksinhalte $CAA_1 > CDB_1$ gilt. Da aber die Dreiecke PAA_1, PBB_1 inhaltsgleich sind, muß die Halbgerade AP innerhalb des Winkelbereiches $\sphericalangle A_1AC$ laufen, also P tatsächlich durch OC vom Schenkel OB getrennt sein.

Liegt nun B nicht innerhalb K, so folgt aus der Lage von P, daß $K \cap PAA_1$ um P gespiegelt zu einem echten Teil von $K \cap PBB_1$ wird, weil der Mittelpunkt einer jeden durch diese Bereiche enthaltenen, durch P hindurchlaufenden Sehne (d.h. der Fußpunkt des von O aus auf sie gefällten Lotes) im Winkelbereich $\sphericalangle COB$ liegt. Das bedeutet aber, daß durch das Ersetzen der untersuchte Durchschnittsinhalt zunimmt.

Liegt B innerhalb K, so ersetzen wir das Dreieck AOB zuerst durch das Dreieck $A'OB'$ mit gleichem Inhalt, gleichem Winkel bei O und mit der Ecke B' am Randkreis K (Fig. 2). Der untersuchte Durchschnittsinhalt nimmt dabei

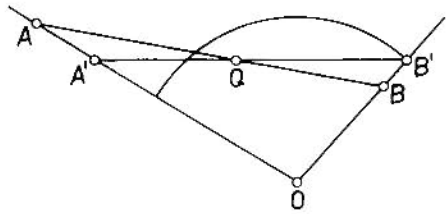

Fig. 2

zu, da je nach der Lage des Schnittpunktes Q der Strecken AB, $A'B'$ entweder das Dreieck QBB' völlig innerhalb K oder das Dreieck QAA' völlig außerhalb K liegt. Anschließend kann dann das Dreieck $A'OB'$ mit obiger Methode, den Durchschnittsinhalt weiter vergrößernd durch ein gleichschenkliges Dreieck $A'OB'$ ersetzt werden.

Wir haben damit unsere Behauptung bewiesen. Wir können auch feststellen, daß wenn nach der Symmetrisierung eine Basis auftritt, die den Randkreis K schneidet, dann $K \cap \Sigma$ zugenommen hat.

4. Wir zeigen nun, daß es uns genügt nur Dreiecksmengen Σ zu betrachten, die aus solchen gleichschenkligen Dreiecken bestehen, deren Basen alle den Randkreis K treffen, d.h. ihn berühren, schneiden oder Kreissehnen sind. Leere Dreiecke mit bei O liegendem Nullwinkel oder gestrecktem Winkel werden auch weiter zugelassen.

Aus den Schranken für I folgt, daß nicht alle Dreiecke innerhalb K liegen und nicht alle den entsprechenden Kreissektor enthalten können. Kommt aber ein Dreieck mit samt ihren Endpunkten im Inneren von K liegender Basis (bzw. mit samt ihrem Mittelpunkt im Äußerem von K liegender Basis) und ein anderes, das nicht dieser Art ist, in Σ vor, so läßt sich die Basis des ersten nach außen und die des zweiten nach innen (bzw. die des ersten nach innen und die des zweiten nach außen) derart verschieben, daß die Inhaltssumme dieser Dreiecke gleich bleibt. Wir verschieben die Basen derart so weit, bis die sie betreffenden Anfangsbedingungen nicht mehr erfüllt sind. Es ist dann offensichtlich, daß die Summe der Durchschnittsinhalte zugenommen hat. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangen wir zu lauter den Randkreis K treffenden Basen.

Dieses Verfahren kann nur dann scheitern, wenn ein leeres Dreieck mit gestrecktem Winkel bei O vorkommt, dessen Basis nämlich nicht nach außen

verschoben werden kann. Leere Dreiecke mit Nullwinkel bei O können ja beibehalten werden und können auch die erzielte Endlage nicht stören. Auf leere Dreiecke mit bei O liegendem Winkel $\in (0, \pi)$ kann dagegen unser Verfahren ohne Hindernis angewendet werden.

Kommt aber ein gestreckter Winkel vor und entspricht Σ unserer Forderung nicht, so gibt es in Σ ein Dreieck Δ, dessen Basis samt ihrem Mittelpunkt im Äußeren von K liegt. Dann vergrößern wir etwas den bei O liegenden Winkel von Δ und vermindern mit ebensoviel den gestreckten Winkel, legen dann in diese Winkel gleichschenklige Dreiecke von der Inhaltssumme Δ derart ein, daß das Δ ersetzende Dreieck den entsprechenden Kreissektor enthalte. Wir erhalten so eine Dreiecksmenge mit einem größeren Durchschnittsinhalt, auf welche unser ursprüngliches Verfahren schon angewendet werden kann.

Dieser letzte Schritt ist auch im hyperbolischen Fall anwendbar, wo in einen größeren Winkel eventuell nur ein Dreieck kleineren Inhalts und in den verminderten gestreckten Winkel kein Dreieck von beliebig vorgeschriebenem Inhalt hereingelegt werden kann. Das ist nämlich der Fall, wenn Δ zwei uneigentliche Eckpunkte hat. In diesem Fall bleibt aber die Inhaltssumme konstant, wenn in beide Winkel Dreiecke mit je zwei uneigentlichen Eckpunkten hereingelegt werden, so daß der obige Schritt auch in diesem Fall auf kein Hindernis stößt.

5. Aus was für Dreiecksmenge wir auch ursprünglich ausgegangen sind, gelangten wir in allen untersuchten Fällen in endlich vielen Schritten zu einer Dreiecksmenge, die aus gleichschenkligen Dreiecken besteht, deren Basen alle den Randkreis K treffen. Der mit K gebildeter Durchschnittsinhalt hat dabei zugenommen, wenn die ursprüngliche Dreiecksmenge nicht selbst der Forderung entsprochen hat.

Die erhaltenen Dreiecksmengen können durch $2n$ Parameterwerte gekennzeichnet werden, nämlich durch die Winkel $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bei O und durch die n Höhen der gleichschenkligen Dreiecke. Diese Parameterwerte liegen in den abgeschlossenen Intervallen $[0, \pi]$ bzw. $[0, r]$, wo r den Radius von K bezeichnet. Im hyperbolischen und sphärischen Fall bilden jene Stellen des so gekennzeichneten $2n$-dimensionalen Parametergebietes, denen eine Dreiecksmenge von vorgeschriebenem Inhalt I zugehört, offensichtlich eine abgeschlossene Menge. Dasselbe gilt auch im euklidischen Fall, wenn nur solche Dreiecksmengen zugelassen werden, die in einem festen Kreis liegen. Wir können uns in diesem Fall tatsächlich auf solche Dreiecksmengen beschränken, da das im Abschnitt **6** zu erörternde Verfahren zwei beliebige der Winkel $\omega_1, \ldots, \omega_n$ durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt, folglich nach höchstens zweimaliger Anwendung es erzielt werden kann, daß $\omega_i < \pi - 2\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt, wo ε einen genügend kleinen Winkel bedeutet. Das hat zur Folge, daß die zu betrachtenden Dreiecksmengen im um O mit dem Radius $r/\sin\varepsilon$ geschlagenen Kreis liegen. In jedem Fall gehören also die zu betrachtenden Dreiecksmengen zu einer kompakten Stellenmenge des Parameterbereiches. Da der Durchschnitt $K \cap \Sigma$ eine stetige Funktion der Parameter ist, nimmt sie nach WEIERSTRASS auf dieser kompakten Menge ihr Maximum an.

Unser Satz behauptet, daß dieses Maximum nur durch das konzentrische regelmäßige n-Eck erreicht wird. Es genügt also zu zeigen, daß $K \cap \Sigma$ immer vergrößert werden kann, wenn es unter den gleichschenkligen Dreiecken, aus

denen Σ besteht und deren Basen alle den Randkreis treffen, zwei inkongruente gibt.

Der Fall, daß auch ein gestreckter Winkel vorkommt, wird auch weiter mitbehandelt. Der Fall des Nullwinkels kann aber beseitigt werden. Kommt nämlich ein Dreieck mit Nullwinkel bei O vor, so kann man ein beliebiges in Σ vorkommendes Dreieck mit einer von O auslaufender Transversale in zwei Dreiecke zerschneiden, diese laut Abschnitt **3** symmetrisieren und dadurch zu einem größeren Durchschnittsinhalt ankommen.

6. Als letzter Schritt bleibt es noch übrig, zwei inkongruente gleichschenklige Dreiecke A_1OB_1, A_2OB_2 zu betrachten, deren Basenmittelpunkte C_1, C_2 zu K gehören und deren von O verschiedene Ecken nicht im Inneren von K sind, und zu zeigen, daß diese Dreiecke durch zwei andere mit gleicher Inhaltssumme und gleicher Winkelsumme bei O ersetzt werden können, die einen größeren Durchschnittsinhalt mit K aufweisen.

Der mitbehandelte ausgeartete Fall, daß etwa $\sphericalangle A_2OB_2 = \pi$ ist, wird das Folgende gar nicht stören. Dann wählen wir die Punkte A_2, B_2 am Randkreis K. Die Halbgerade OC_2 sei auch in diesem Fall, wo O und C_2 zusammenfallen, auf der Strecke A_2B_2 senkrecht.

Wir legen die Dreiecke A_1OC_1, A_2OC_2 so nebeneinander, daß die Halbgeraden OC_1, OC_2 zusammenfallen und die Dreiecke voneinander trennen (Fig. 3). Wir bezeichnen ihre Vereinigung mit V und den im Winkelbereich $\sphericalangle A_1OA_2$ liegenden Sektor von K mit S. Wir werden V durch ein Dreieck mit demselben

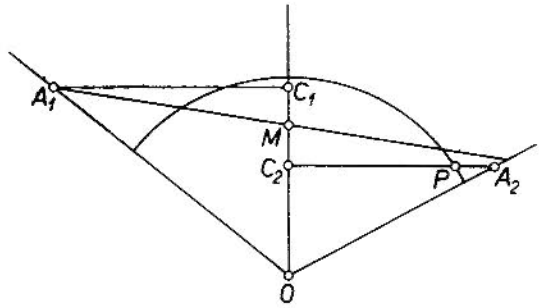

Fig. 3

Inhalt und demselben Winkel bei O ersetzen, das einen größeren Durchschnittsinhalt aufweist. Das vervollständigt dann unseren Beweis, da zwei Exemplare dieses Dreiecks die ursprünglichen Dreiecke A_1OB_1, A_2OB_2 unserem Ziel entsprechend ersetzen können.

Sind C_1 und C_2 identisch, so kann das Dreieck A_1OA_2 laut Abschnitt 3 in ein größeren Durchschnittsinhalt aufweisendes Dreieck symmetrisiert werden, was dann den Beweis beendet.

Es sei also $OC_1 > OC_2$, ferner M der Mittelpunkt der Strecke C_1C_2 und P der Punkt, wo die Strecke C_2A_2 den Randkreis K trifft. Wir unterscheiden zwei Fälle je nachdem, ob die Gerade A_1P die Punkte O, M trennt oder nicht.

Fall I: Die Punkte O, M werden durch die Gerade A_1P getrennt.

Wir schneiden aus dem Winkelbereich $\sphericalangle A_1OA_2$ mit der Geraden A_1M ein Dreieck V_1 ab. Diese Gerade trifft den Schenkel OA_2 auch im hyperbolischen Fall (eventuell in seinem uneigentlichen Punkt). Sonst könnte nämlich die Halbgerade C_2A_2 nicht die Halbgerade A_1M und auch den Schenkel OA_2 treffen, was aber der Fall ist, da A_2 am Schenkel und das ebenfalls auf der Halbgeraden C_2A_2 liegende Spiegelbild von A_1 bezüglich M an der Halbgeraden A_1M liegt.

Es ist $V \cong V_1$, da aus V das Dreieck A_1C_1M abgeschnitten worden ist, und das Hinzugefügte innerhalb des Spiegelbildes vom Dreieck A_1C_1M bezüglich M liegt. Es hilft nur, wenn die Gerade A_1M die Strecke C_2A_2 schneidet, da dann noch ein weiteres Dreieck aus V abgeschnitten wird.

Es ist $S \cap V \prec S \cap V_1$, weil der aus $S \cap V$ abgeschnittene Bereich um M gespiegelt einen echten Teil des hinzugefügten Bereiches ergibt.

Ist $V = V_1$, so entspricht das Dreieck V_1 unserer Forderung.

Ist $V \succ V_1$, so verdrehen wir die Gerade A_1M um A_1 bis sie aus dem Winkelbereich $\sphericalangle A_1OA_2$ ein Dreieck V_2 abschneidet, für welches $V = V_2$ gilt. Da man dabei den mit S gebildeten Durchschnitt vergrößert, ergibt sich $S \cap V \prec S \cap V_1 \prec S \cap V_2$. Das besagt aber, daß V_2 unserer Forderung entspricht und den Beweis im untersuchten Fall beendet.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man auch im hyperbolischen Fall zum Dreieck V_2 gelangen kann. Dazu genügt es einzusehen, daß die von A_1 aus zum Schenkel OA_2 gezogene Parallele aus dem Winkelbereich $\sphericalangle A_1OA_2$ ein Dreieck Δ abschneidet, für welches $\Delta \cong V$ gilt. Das ist trivialer Weise richtig, wenn die Gerade A_1C_1 den Schenkel OA_2 trifft. Ist aber das nicht der Fall, so befindet sich die Parallele innerhalb des Winkelbereiches (eventuell durch zueinander parallele Schenkel gebildeten Nullwinkels) $\sphericalangle OA_1C_1$. Dann ist aber der Defekt von Δ größer oder gleich als die Defektensumme der Dreiecke A_1OC_1, A_2OC_2, woraus $\Delta \cong V$ folgt.

Fall II: Die Punkte O, M werden durch die Gerade A_1P nicht getrennt.

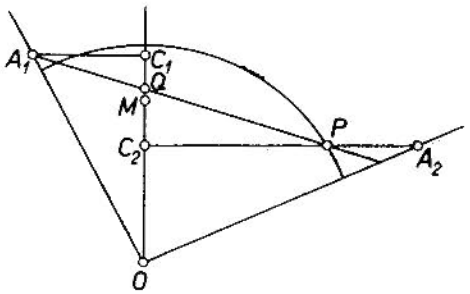

Fig. 4

Wir schneiden jetzt aus dem Winkelbereich $\sphericalangle A_1OA_2$ mit der Geraden A_1P ein Dreieck V_1 ab (Fig. 4). Diese Gerade schneide die Strecke C_1C_2 im Punkt Q. Man hat also $C_1Q \cong C_2Q$, woraus folgt, daß das zu $S \cap V$ hinzugefügte Dreieck C_2PQ um P gespiegelt den aus $S \cap V$ abgeschnittenen Bereich als echten Teil enthält, daß also $S \cap V \prec S \cap V_1$ ist.

Da die Gerade A_1P aus den aus S herausragenden Bereichen von V Teile abschneidet, ergibt sich

$$V-S\cap V>V_1-S\cap V_1.$$

Ist $V=V_1$, so entspricht V_1 unserer Forderung.

Ist $V<V_1$, so verdrehen wir die Gerade A_1P A_1 bis sie ein Dreieck V_2 abschneidet, für welches $V=V_2$ gilt. Dieses Verdrehen vermindert die aus S herausragenden Bereiche weiter. Es ergibt sich also

$$V-S\cap V>V_2-S\cap V_2,$$

woraus wegen $V=V_2$ folgt, daß $S\cap V<S\cap V_2$ ist, daß also V_2 unserer Forderung entspricht.

Ist $V>V_1$, so verdrehen wir die Gerade A_1P wieder um A_1 bis die verdrehte Gerade ein Dreieck V_2 abschneidet, für welches $V=V_2$ gilt. Das ist auch im hyperbolischen Fall möglich, wie wir da schon bei dem Fall I eingesehen haben. Das Verdrehen vergrößert jetzt $S\cap V_1$ weiter, so daß $S\cap V<S\cap V_1<S\cap V_2$ gilt. Das Dreieck V_2 entspricht also auch jetzt unserer Forderung, was den Beweis engültig beendet.

Literaturverzeichnis

[1] L. Fejes Tóth, On isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 8 A (1963), 53–56.

ON STABILITY AND GEODESICS

By

M. FARKAS

University of Lagos and Technological University, Budapest

(Received July 23, 1967)
(Revised January 10, 1968)

In this paper autonomous systems of differential equations are considered and the concept of stability with respect to a level surface of a first integral is introduced (cf. [3] p. 61). The connection of this concept to Lyapunov stability is pointed out. Furthermore, the concept of a derivo-periodic solution is defined and its stability discussed. The results are applied then in dealing with the stability of closed geodesics in a Riemannian space. While the stability of geodesics has been investigated by T. LEVI-CIVITÀ [2], it seems to the author that its relation to the rigorous concept of stability has not yet been pointed out. On the other hand stability of *closed* geodesics can be investigated with methods not applicable in the general case. At the end of the paper two examples are presented which illustrate the general ideas and, at the same time, throw light to well known limitations of some existing criteria of stability.

1. Let

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \tag{1}$$

be an autonomous system of differential equations where $X(x) \in C^2$, $x \in T$ an open and connected region in the n-dimensional space of $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Let us denote by $x(t, x^0)$ the solution of (1) satisfying $x(0, x^0) = x^0$ and by $\varphi(t)$ a solution defined for $0 \leq t < +\infty$ such that

$$\varphi(t) \in T, \quad \text{if} \quad 0 \leq t < +\infty,$$
$$\varphi(0) = \varphi^0.$$

Suppose that a first integral $\Phi(x) \in C^2$, $x \in T$, is given (Φ a scalar), i.e. $\Phi(x)$ is constant along any solution $x(t, x^0)$ of (1), and that

$$\Phi(\varphi(t)) \equiv 0.$$

We shall call the $n-1$ dimensional hypersurface

$$\Phi(x) = 0 \tag{2}$$

the *integral suface of* $\varphi(t)$. We assume that

$$\operatorname{grad} \Phi \neq 0$$

over the surface (2).

DEFINITION 1. *The solution* $\varphi(t)$ *of* (1) *is said to be stable with respect to its integral surface* (2), *if*

(i) *a* $\varrho > 0$ *can be found such that any solution* $x(t, x^0)$ *with* $|x^0 - \varphi^0| < \varrho$ *and* $\Phi(x^0) = 0$ *is defined in* $0 \leq t < +\infty$.

(ii) *given an arbitrary* $\varepsilon > 0$, *a* $0 < \delta < \varrho$ *can be found such that*

$$|x(t, x^0) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t < +\infty,$$

whenever

$$|x^0 - \varphi^0| < \delta \text{ and } \Phi(x^0) = 0.$$

Since $\Phi(x^0) = 0$ implies $\Phi(x(t, x^0)) \equiv 0$, the definition above means that the path of $\varphi(t)$ is stable in the sense due to Lyapunov "conditionally" i.e. with respect to all paths on the level surface (2) of the first integral $\Phi(x)$.

Throughout the paper the modulus $|x|$ of a vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in understood to mean

$$|x| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

2. Keeping to the notations and assumptions made in **1.** suppose that the surface (2) admits the parametric representation

$$x = x(u) \tag{3}$$

where $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, $x(u)$ C^2 and

$$\operatorname{rank} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| = n - 1, \tag{4}$$

if $u \in \Theta$, an open and connected region of the $n-1$ dimensional space of $u = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, assume furthermore that the point $x(u) \in T$, if $u \in \Theta$, i.e. by the mapping

$$p : u \to x(u),$$

$$p\Theta = T' \subset T.$$

Obviously

$$\Phi(x(u)) = 0. \tag{5}$$

LEMMA. *If* $x(t, x^0)$ *is a solution of* (1), $x^0 \in T'$, *i.e.* $p^{-1}x^0 = u^0 \in \Theta$ *and* $\Phi(x^0) = 0$, *then a unique function* $u(t) \in C^2$, $|t| < \alpha$ *for some* $\alpha > 0$, *exists such that*

$$x(t, x^0) \equiv x(u(t)), \quad |t| < \alpha,$$

$u(0) = u^0$ *and* $u(t)$ *satisfies a well defined explicit autonomous system of differential equations with "right hand sides" continuously differentiable in* Θ.

PROOF. Without restriction on generality let, say, the Jacobian

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \neq 0, \qquad u \in \Theta.$$

It follows from (5) that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6}$$

and as a consequence that $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \neq 0$, since otherwise grad $\Phi = 0$ would hold. The last result ensures that in a neighbourhood of x^0 one can express x_n uniquely from

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

i.e.

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad f \in C^1.$$

Consider the system

$$\begin{aligned} x_1(t, x^0) &= x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ &\ldots \\ x_{n-1}(t, x^0) &= x_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ x_n(t, x^0) &= x_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{aligned}$$

in the unknowns u_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. From the first $n-1$ equations $u_1, \ldots, u_{n-1}$ can be expressed uniquely as continuously differentiable functions of $x_1(t, x^0) \ldots, x_{n-1}(t, x^0)$ in a neighbourhood of $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ and, as a consequence, of t, if $|t| < \alpha$ for some $\alpha > 0$:

$$u = u(t) \in C^1, \quad u(0) = u^0.$$

This done the last equation becomes an identity, since both

$$x_n(t, x^0) \equiv f(x_1(t, x_0), \ldots, x_{n-1}(t, x_0)), \quad |t| < \alpha$$

and

$$x_n(u) \equiv f(x_1(u), \ldots, x_n(u)), \quad |u - u_0| < \beta$$

for some $\beta > 0$, holds, i.e.

$$\begin{aligned} x_n(u(t)) &\equiv f(x_1(u(t)), \ldots, x_{n-1}(u(t))) \equiv \\ &\equiv f(x_1(t, x^0), \ldots, x_{n-1}(t, x^0)) \equiv x_n(t, x^0), \quad |t| < \alpha. \end{aligned}$$

The function $u(t)$ satisfies the differential system

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial x}{\partial u_k} \dot{u}_k = X(x(u)). \tag{7}$$

If we look at (7) as a linear algebraic system in the unknowns $\dot{u}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, then the first $n-1$ equations of this system can be solved uniquely for these unknowns and the last one is a simple consequence. The last assertion follows from the fact that because of (6) and

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} X_k = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \neq 0,$$

X_n is the same linear combination of

$$X_1, \ldots, X_{n-1} \text{ as } \frac{\partial x_n}{\partial u_i} \text{ is of } \frac{\partial x_1}{\partial u_i}, \ldots, \frac{\partial x_{n-1}}{\partial u_i}.$$

Let us denote the system got this way from (7) by

$$\dot{u} = U(u). \tag{8}$$

Here $U(u) \in C^1$, $u \in \Theta$. Since $u(t)$ is a solution of (8) it follows that $u(t) \in C^2$ and that it is uniquely determined. This proves the Lemma.

It may be noted here that, "inversely", if $u(t)$ is a solution of (8) then obviously $x(u)|_{u=u(t)}$ is a solution of (1).

3. Throughout this section notations and assumptions made in **1.** and **2.** hold.

THEOREM 1. *Let $u = \psi(t)$, $0 \leq t < +\infty$, be a periodic solution of* (8) *with period τ, the points $\psi(t) \in \Theta$ for all $t > 0$; if $\psi(t)$ is stable in the sense due to Lyapunov and*

$$\varphi(t) = x(u)|_{u=\psi(t)} = x(\psi(t)),$$

then the periodic solution $\varphi(t)$ of (1) *is stable with respect to it's integral surface* (2).

Though the proposition in this theorem may seem to be obvious, it is not a triviality since e.g. stability is not invariant under general coordinate transformations (see [1] pp. 12–13).

PROOF. Denote by $u(t, u^0)$ the solution of (8) with $u(0, u^0) = u^0$ and let $\psi^0 = \psi(0)$. It follows from the stability of $\psi(t)$ that an $\eta > 0$ can be found such that if $|u^0 - \psi^0| < \eta$, then $u(t, u^0)$ is defined in $0 \leq t < +\infty$.

Now, a bounded open and connected region Ψ exists such that the points $\psi(t) \in \Psi$, $0 \leq t < +\infty$ and $\overline{\Psi} \subset \Theta$, where $\overline{\Psi}$ is the closure of Ψ. It follows then from the stability of $\psi(t)$ that $\eta > 0$ can be chosen such a way that the points

$$u(t, u^0) \in \Psi, \ 0 \leq t < +\infty, \text{ if } |u^0 - \psi^0| < \eta.$$

Let $x(t, x^0)$ be an arbitrary solution of (1) with $\Phi(x^0) = 0$, then by our Lemma a solution $u(t, u^0)$ of (8) exists such that

$$x(t, x^0) \equiv x(u)|_{u=u(t, u^0)} = x(u(t, u^0)), \quad |t| < \alpha \tag{9}$$

for some $\alpha > 0$. From here we have

$$x^0 = x(0, x^0) = x(u(0, u^0)) = x(u^0); \tag{10}$$

in particular

$$\varphi^0 = x(\psi^0).$$

By considerations similar to those made in the proof of the Lemma, u^0 can be expressed from (10) as a continuous function of x^0 in a neighbourhood of φ^0 hence a $\varrho > 0$ can be found such that $|u^0 - \varphi^0| < \eta$, whenever

$$|x^0 - \varphi^0| < \varrho, \ \Phi(x^0) = 0.$$

As a consequence the solution $u(t, u^0)$ of (8) occurring in (9) is defined or can be continued over the whole interval $0 \leq t < +\infty$. Furthermore since over the same interval the points

$$u(t, u^0) \in \Psi \subset \Theta,$$

$x(u(t, u^0))$ is defined and is a solution of (1) in $0 \leq t < +\infty$.

Thus we have proved that a $\varrho > 0$ can be found such that if

$$|x^0 - q^0| < \varrho \text{ and } \Phi(x^0) = 0, \tag{11}$$

then $x(t, x^0)$ is defined in $0 < t < +\infty$.

Now, let x^0 satisfy conditions (11) and an arbitrary $\varepsilon > 0$ be given. Since $x(u)$ is uniformly continuous on the bounded and closed region $\bar{\Psi}$ a $\sigma > 0$ can be found such that

$$|x(t, x^0) - q(t)| = |x(u(t, u^0)) - x(\psi(t))| < \varepsilon, \tag{12}$$

whenever

$$|u(t, u^0) - \psi(t)| < \sigma, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

On the other hand because of the stability of $\psi(t)$ the last inequality holds for arbitrary σ if

$$|u^0 - \psi^0| < \omega < \eta,$$

$\omega > 0$ sufficiently small, and this in turn if

$$|x^0 - q^0| < \delta < \varrho, \tag{13}$$

$\delta > 0$ sufficiently small. Thus a $0 < \delta < \varrho$ can be found such that (13) implies (12) and this proves the Theorem.

DEFINITION 2. *A function $u(t)$ is said to be derivo-periodic with period τ if it's first derivative is periodic with period τ.*

It is easy to see that the function $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_{n-1}(t))$ is derivo-periodic if and only if

$$u_k(t) = v_k(t) + a_k t, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

where $v_k(t)$ are periodic with period τ and a_k-s are constants (not necessarily all different from zero).

We are going to prove a theorem analogous to the previous one for the case of a derivo-periodic solution.

THEOREM 2. *Assume that $x(u)$ is periodic in u_k with period $a_k\tau$, $a_k \neq 0$, $k = m+1, m+2, \ldots, n-1$, i.e.*

$$x(u_1, \ldots, u_k + a_k\tau, \ldots, u_{n-1}) = x(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_{n-1}), \tag{14}$$
$$k = m+1, m+2, \ldots, n-1, \quad (0 \leq m \leq n-1),$$

for all $u \in \Theta$ and let Θ be now the set theoretical product of $\Theta^m, I^{m+1}, \ldots, I^{n-1}$, i.e.

$$\Theta = \Theta^m \times I^{m+1} \times \ldots \times I^{n-1}$$

where Θ^m is an open and connected region in the m-dimensional space of $u_1, \ldots, u_m$ and I^k is the interval $-\infty < u_k < +\infty$, $k = m+1, \ldots, n-1$; let $u = \psi(t)$, the

points $\psi(t)\in\Theta$, $0\leq t<+\infty$, *be a derivo-periodic solution of* (8) *with period* τ, *namely*

$$\psi_k(t) = \alpha_k(t)+a_k t, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

where $\alpha_k(t)$-s *are periodic with period* τ, $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ *and* a_k *is as in* (14) *for* $k = m+1, \ldots, n-1$; *if* $\psi(t)$ *is stable in the sense due to Lyapunov and*

$$\varphi(t) = x(u)'_{u=\psi(t)} = x(\psi(t)),$$

then the periodic solution $\varphi(t)$ *of* (1) *is stable with respect to its integral surface* (2)

Proof. The proof of this theorem follows the outlines of that of the first one. This is so especially in proving the first requirement in Definition 1. Therefore this part of the proof won't be given in detail, only the necessary alterations will be pointed out.

Since the projection of $\psi(t)$ to the subspace $u_1, \ldots, u_m$, i.e. $(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))$ represents a closed curve there and

$$(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))\in\Theta^m, \quad 0\leq t<+\infty,$$

a bounded open and connected region Ψ^m exists in this subspace such that

$$(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))\in\Psi^m, \quad 0\leq t<+\infty$$

and $\Psi^m\subset\Theta^m$. The role of Ψ in the proof of Theorem 1 is played now by the region

$$\Psi^* = \Psi^m\times I^{m+1}\times\ldots\times I^{n-1}$$

and the first part of the proof can be carried out without any other modification. We use the notations introduced in the proof of Theorem 1 in what follows.

In the second part of the proof which we are going to give in detail the role of Ψ is played by the bounded and open region

$$\Psi^*_{2\tau} = \Psi^m\times I^{m+1}_{2\tau}\times\ldots\times I^{n-1}_{2\tau},$$

where $I^k_{2\tau}$ is the interval

$$I^k_{2\tau}: |u_k-\psi^0_k|<2[\max|\alpha_k(t)|+|a_k|\tau|+1,$$
$$k = m+1, \ldots, n-1.$$

The inequality corresponding to (12) can be proved the following way. For arbitrary $0\leq t<+\infty$ a non-negative integer N can be found such that

$$N\tau\leq t<(N+1)\tau.$$

Since $x(\psi(t))$ is periodic with period τ,

$$x(\psi(t)) = x(\psi(t-N\tau)).$$

For the components of $\psi(t)$ we have

$$\psi_k(t-N\tau) = \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$
$$\psi_k(t-N\tau) = \alpha_k(t-N\tau)+a_k t-a_k N\tau =$$
$$= \alpha_k(t)+a_k t-a_k N\tau =$$
$$= \psi_k(t)-a_k N\tau,$$
$$k = m+1, m+2, \ldots, n-1.$$

Hence

(15) $$|\psi_k(t-N\tau)-\psi_k(0)| < 2\max|\alpha_k(t)|+|a_k|\tau < \\ < 2[\max|\alpha_k(t)|+|a_k|\tau]+1,$$

i.e.

(16) $$\psi(t-N\tau)\in\Psi^*_{2\tau}.$$

Let $u^* = (u_1^*, \ldots, u_{n-1}^*)$ be defined the following way

$$u_k^* = u_k(t, u^0), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$u_k^* = u_k(t, u^0)-a_kN\tau, \quad k = m+1, \ldots, n-1.$$

Obviously

(17) $$|u(t, u^0)-\psi(t)| = |u^*-\psi(t-N\tau)|.$$

Since $\psi(t)$ is stable, if an arbitrary $\sigma>0$ is given, a sufficiently small $\omega>0$ can be found such that

$$|u^0-\psi^0| < \omega < \eta$$

implies

(18) $$|u(t, u^0)-\psi(t)| < \sigma, \quad 0 \leq t < +\infty$$

and

(19) $$\big(u_1(t, u^0), \ldots, u_m(t, u^0)\big) = (u_1^*, \ldots, u_m^*)\in\Psi^m,$$

this in turn means that the points

$$u(t, u^0)\in\Psi^*, \quad 0 < t < +\infty.$$

If $0<\sigma<1$, then from (19), (18), (17) and (15) follows

(20) $$u^*\in\Psi^*_{2\tau}.$$

Since $x(u)$ is uniformly continuous in $\Psi^*_{2\tau}$, if an arbitrary $\varepsilon>0$ is given, a $\sigma>0$ can be found such that

$$|x(u^*)-x\big(\psi(t-N\tau)\big)| < \varepsilon$$

whenever

$$|u^*-\psi(t-N\tau)| < \sigma$$

and

$$u^*\in\overline{\Psi}^*_{2\tau}, \quad \psi(t-N\tau)\in\overline{\Psi}^*_{2\tau}.$$

Because of the periodicity property (14) of $x(u)$

$$x\big(u(t, u^0)\big) = x(u^*),$$

hence

$$|x(t, x^0)-q(t)| = |x\big(u(t, u^0)\big)-x\big(\psi(t)\big)| = \\ = |x(u^*)-x\big(\psi(t-N\tau)\big)| < \varepsilon,$$

if

$$|u^* - \psi(t - N\tau)| = |u(t, u^0) - \psi(t)| < \sigma < 1.$$

Since the last inequality holds if

$$|u^0 - \psi^0| < \omega < \eta$$

and this in turn if

$$|x^0 - \varphi^0| < \delta < \varrho, \quad \Phi(x^0) = 0$$

(δ sufficiently small), the stability of $\varphi(t)$ with respect to it's integral surface has been proved.

4. It has been shown in the previous section that the stability of a derivo-periodic solution of a system in certain cases may guarantee the stability of a periodic solution of another system with respect to it's integral surface. It is therefore of some interest to see whether standard criteria of stability known for periodic solutions could be applied to derivo-periodic solutions too.

We are dealing here with the generalisation of the probably most fundamental Andronov – Witt theorem only. This theorem in it's original form states under certain differentiability conditions that a periodic solution of a p-dimensional autonomous system is stable if the first variational system corresponding to the given periodic solution has 1 as a simple characteristic factor and the remaining $p-1$ characteristic factors are in modulus less than 1. Let us proceed now with the generalisation of this theorem.

Given the autonomous system

$$\dot{u} = U(u), \tag{21}$$

$u = (u_1, \ldots, u_p)$, $U = (U_1, \ldots, U_p)$, where $U(u) \in C^2$ in some open and connected region Θ of the p-dimensional space, assume that it admits a non-constant derivo-periodic solution $\varphi(t)$ with period $\tau > 0$, i.e.

$$\varphi_k(t) = \alpha_k(t) + a_k t, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

where the $\alpha_k(t)$-s are periodic with period τ, $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $(0 \leq m \leq p)$, $a_k \neq 0$, $k = m+1, \ldots, p$; and the points $\varphi(t) \in \Theta$, $0 \leq t < +\infty$; assume furthermore that $U(u)$ is periodic in u_k with period $a_k\tau$ respectively, $k = m+1, \ldots, p$.

The first variational system of (21) corresponding to $\varphi(t)$ is

$$\dot{v} = A(t)v, \tag{22}$$

where the p by p matrix $A(t)$ is given by

$$A(t) = \left[\frac{\partial U_i(\varphi(t))}{\partial u_k}\right].$$

It is easy to see that $A(t)$ is periodic with period τ and further that (22) admits the periodic function $\dot{\varphi}(t)$ as a solution. From this it follows immediately that (22) has 1 as a characteristic factor.

Keeping to the assumption and notations made in this section there holds the following

THEOREM 3. *If* 1 *is a simple characteristic factor of system* (22) *an the remaining* $p-1$ *characteristic factors are in modulus less than* 1, *then the derivo-periodic solution* $q(t)$ *of* (21) *is stable in the sense due to Lyapunov.*

PROOF. The proof of the original Andronov–Witt theorem is fairly long and there are surprisingly few modifications to be done there. Therefore we are not giving the proof of the present theorem in detail. Instead of that we shall make use of the proof of the quoted theorem as given in [5] pp. 278–284 and point out the modifications to be made.

Throughout the proof quoted, with the exception of one stage only, the periodicity of $\dot{q}(t)$ and that of $U(u)$ it's first and second partial derivatives taken along $u = \varphi(t)$ is used and not that of $\varphi(t)$. These conditions hold now too.

At one stage only, where the new variables $z^* = (z_1^*, \ldots, z_{p-1}^*)$ and s are introduced by

$$u = T^*(s)z^* + q(s) = g(z^*, s)$$

(formula (28) on p. 281 of [5], $T^*(s)$ a periodic regular matrix defined there), is the periodicity of $\varphi(s)$ used to ensure that $g(z^*, s)$ is uniformly continuous. However, the last assertion holds in our case too since $q(s)$ is the sum of two vectors, one of which is periodic and the other linear in s.

With these alterations the proof quoted yields a proof to our theorem.

5. We are going to apply now the previous results to the study of the behaviour of closed geodesics in a Riemannian space. Tools of local differential geometry only are used.

Let M denote an n-dimensional differentiable manifold with a positive definite Riemannian metric, V a simple coordinate neighbourhood of M, where g_{ik} and Γ^i_{jl} denote the components of the metric tensor and the Christoffel symbols, respectively in the coordinate system $y = (y^1, \ldots, y^n)$.

Let

$$\gamma : y = f(s),\ 0 \leq s < +\infty,\ f(s+\tau) = f(s)$$

be a closed geodesic, $\gamma \subset V$, s the arc length and

$$f_0 = f(0), \quad \dot{f}_0 = \frac{df(0)}{ds}.$$

Let us denote by $y = y(s; y_0, \dot{y}_0)$ the equation of the geodesic with

$$y_0 = y(0; y_0, \dot{y}_0), \qquad \dot{y} = \frac{dy(0; y_0, \dot{y}_0)}{ds},$$

where s is again the arc length on the latter. Using these notations we are giving the following

DEFINITION 3. *The closed geodesic* γ *is said to be stable if*

(i) *a* $\varrho > 0$ *can be found such that if*

$|y_0 - f_0| < \varrho,\ |\dot{y}_0 - \dot{f}_0| < \varrho,$

then $y(s; y_0, \dot{y}_0)$ is defined for $0 \leq s < +\infty$;

(ii) *given an arbitrary* $\varepsilon > 0$, *a* $0 < \delta < \varrho$ *can be found such that*

$$|y_0 - f_0| < \delta, \quad |\dot{y}_0 - \dot{f}_0| < \delta$$

implies

$$|y(s; y_0, \dot{y}_0) - f(s)| < \varepsilon \quad \textit{and}$$

$$|\dot{y}(s; y_0, \dot{y}_0) - \dot{f}(s)| < \varepsilon, \quad 0 \leq s < +\infty.$$

REMARK. If γ is stable in a given coordinate system, then it is stable in any other admissible coordinate system. This is so because a bounded and open region R can be found such that

$$\gamma \subset R, \quad \bar{R} \subset V$$

where $\bar{R}$ is the closure of R, and any admissible coordinate transformation is uniformly continuous in R.

As it is well known the geodesics given in canonical parameter t satisfy the system of differential equations

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jl} \frac{dy^j}{dt} \frac{dy^l}{dt} = 0, \tag{23}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

If we introduce the $2n$ dimensional vector

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{2n})$$

and put

$$x_k = y^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{n+k} = \dot{y}^k,$$

then considering the normal form of system (23)

$$\dot{x}_k = x_{n+k},$$

$$\dot{x}_{n+k} = -\sum_{j,l=1}^{n} \Gamma^k_{jl} x_{n+j} x_{n+l}, \tag{24}$$

one could easily expect that the stability of the closed geodesic γ as defined above amounts to the Lyapunov stability of the periodic solution

$$\varphi(t) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots, \varphi_{2n}) =$$
$$= (f^1, \ldots, f^n, \dot{f}^1, \ldots, \dot{f}^n)$$

of system (24). Now, this is not the case simply because the canonical parameter t is not necessarily the arc length but, in general, a linear function of it.

The canonical parameter t in (23) is the arc length along a solution $y(t)$ if and only if

$$g_{ik}(y(t)) \dot{y}^i(t) \dot{y}^k(t) \equiv 1.$$

i.e. if and only if

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1, \ldots, x_n)x_{n+i}x_{n+k} = 1 \tag{25}$$

along the corresponding solution of (24).

Now, since the tangent vector $\dot{y}$ of a geodesic given in canonical parameter is parallelly displaced along the same in the sense due to Levi-Civita and the length of a vector (in the Riemannian – space) is invariant under parallel displacement, the function

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1, \ldots, x_n)x_{n+i}x_{n+k}$$

is constant along any solution of (24) and so is obviously

$$\Phi(x) = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1, \ldots, x_n)x_{n+i}x_{n+k} - 1. \tag{26}$$

Thus (26) is a first integral of the system (24).
From these simple considerations there follows the

THEOREM 4. *The geodesic γ is stable if and only if the corresponding periodic solution $q(t)$ of* (24) *is stable with respect to its integral surface* (25).

6. The Sphere. Let us consider the unit sphere with centre at the origin of the Cartesian orthogonal coordinate system x, y, z:

$$x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Our first task is to find a parametrisation such that a whole geodesic, i.e. a great circle of the sphere should lie "well" inside an open region consisting of regular points only. This can be achieved by intersecting the sphere with planes passing through the point $(0, 0, -1)$ and parallel to the axes y and x respectively. Denoting the "slopes" of these planes by u and v respectively we get the following parametric representation of the unit sphere:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y &= \frac{2v}{1+u^2+v^2} \\ z &= \frac{1-(u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

The parameter lines are the circles passing through the point $(0, 0, -1)$ and having there tangents parallel to the axes x and y, respectively. As it is easily seen, (27) represents a homeomorphism between the open plane on the one hand and the unit sphere deprived of its "southern pole" on the other.

It is easy to get now the components g_{ik} of the metric tensor, the Christoffel symbols Γ^i_{jl} and the system of differential equations of geodesics. We omit the details.
Introducing the notations

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = \frac{du}{dt}, \quad x_4 = \frac{dv}{dt}$$

the system assumes its normal form:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 2\,\frac{x_1x_3^2 + 2x_2x_3x_4 - x_1x_4^2}{1+x_1^2+x_2^2} \\ \frac{dx_4}{dt} &= 2\,\frac{-x_2x_3^2 + 2x_1x_3x_4 + x_2x_4^2}{1+x_1^2+x_2^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

The first integral (26) and the integral surface (25) is now

$$\Phi(x) = \frac{4(x_3^2+x_4^2)}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} - 1 \tag{29}$$

and

$$\frac{4(x_3^2+x_4^2)}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} - 1 = 0, \tag{30}$$

respectively.

A periodic solution of (28) lying on the hypersurface (30) of the 4 dimensional space is

$$\varphi(t) : x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad x_3 = -\sin t, \quad x_4 = \cos t. \tag{31}$$

(This corresponds actually to the "equator" of the sphere given in natural parametrisation.)

A parametric representation of the integral surface (30) is

$$\begin{aligned} x = x(u) : x_1 &= u_1, \quad x_2 = u_2, \\ x_3 &= 1/2(u_1^2+u_2^2+1)\cos u_3, \\ x_4 &= 1/2(u_1^2+u_2^2+1)\sin u_3, \end{aligned}$$

where the

$$\text{rank of } \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| = 3.$$

The system (8) i.e. the system "equivalent" to system (28) with condition (30) is in our case:

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= 1/2(u_1^2+u_2^2+1)\cos u_3 \\
\dot{u}_2 &= 1/2(u_1^2+u_2^2+1)\sin u_3 \qquad (32)\\
\dot{u}_3 &= u_1 \sin u_3 - u_2 \cos u_3.
\end{aligned}
$$

The latter system admits the derivo-periodic solution

$$\psi(t) : u_1 = \cos t, \quad u_2 = \sin t, \quad u_3 = t+\frac{\pi}{2} \qquad (33)$$

corresponding to (31), i.e.

$$\varphi(t) = x(u)|_{u=\psi(t)}.$$

Since the conditions of Theorem 2 hold, if (33) is stable in the sense due to Lyapunov then (31) is stable with respect to its integral surface (30). One may try to apply Theorem 3 (i.e. the Andronov – Witt theorem as modified for the case of derivo-periodic solutions) to settle the problem of stability of (33).

The linear system of the first variation corresponding to the solution (33) is

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -\sin t \cos t \cdot z_1 - \sin^2 t \cdot z_2 - \cos t \cdot z_3 \\
\dot{z}_2 &= \cos^2 t \cdot z_1 + \sin t \cos t \cdot z_2 - \sin t \cdot z_3 \qquad (34)\\
\dot{z}_3 &= \cos t \cdot z_1 + \sin t \cdot z_2.
\end{aligned}
$$

With some trouble one is able to find a fundamental solution to the matrix differential equation corresponding to (34), it is

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \cos t \\ -\cos t & \sin t \cos t & \sin^2 t \\ -1 & \sin t & -\cos t \end{bmatrix}.$$

Since $Z(t)$ is periodic with period 2π the fundamental matrix

$$C = Z^{-1}(t) \cdot Z(t+2\pi)$$

is the unit matrix and as such has 1 as a triple eigenvalue. Thus system (34) has 1 as a triple characteristic factor. This means that the theorem quoted above doesn't work in this case. There are some results giving sufficient conditions of stability in case 1 is a double characteristic factor and all the remaining characteristic factors are in modulus less than 1 (see [4]) but the author is unaware of general results concerning the case when 1 is a triple characteristic factor. The obvious stability of the solutions of (34) doesn't imply in general the stability of (33).

However, it is perfectly clear that the equator is stable with respect to the family of great circles given in natural parametrisation, i.e. (31) is stable with respect to its integral surface (30).

The Cylinder. Let us consider now the circular cylinder with radius 1 and axis z as its axis in the Cartesian orthogonal coordinate system x, y, z:

$$x^2+y^2 = 1.$$

A parametrisation containing a closed geodesic i.e. a parallel circle well inside a regular region of the parametrisation is

$$(35)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{v}{(u^2+v^2)^{1/2}} \\ y &= \frac{u}{(u^2+v^2)^{1/2}} \\ z &= \log (u^2+v^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

The treatment is now analogous to that of the sphere, we are giving a short sketch only.

Introducing the notations

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = \frac{du}{dt}, \quad x_4 = \frac{dv}{dt}$$

the differential system of the geodesics in normal form is:

$$(36)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{x_1x_3^2+2x_2x_3x_4-x_1x_4^2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{dx_4}{dt} &= \frac{-x_2x_3^2+2x_1x_3x_4+x_2x_4^2}{x_1^2+x_2^2}. \end{aligned}$$

The first integral (26) and the integral surface (25) is now

$$(37)\qquad \Phi(x) = \frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2}-1,$$

and

$$(38)\qquad \frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2}-1 = 0,$$

respectively.

A periodic solution with period 2π of (36) lying on the hypersurface (38) of the 4-dimensional space is

$$\eta(t) : x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad x_3 = -\sin t, \quad x_1 = \cos t. \tag{39}$$

(This corresponds actually to the parallel circle lying in the plane $z = 0$.)

A parametric representation of the integral surface (38) is

$$x = x(u) : x_1 = u_1 \operatorname{ch} u_3, \; x_2 = u_2 \operatorname{ch} u_3,$$
$$x_3 = u_1 \operatorname{sh} u_3 + u_2, \; x_1 = u_2 \operatorname{sh} u_3 - u_1,$$

where the

$$\text{rank of } \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| = 3: \quad u_1^2 + u_2^2 > 0.$$

System (8), i.e. the system "equivalent" to system (36) with condition (38) is in our case

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 \frac{\operatorname{sh} u_3}{\operatorname{ch} u_3} + \frac{u_2}{\operatorname{ch} u_3} \\ \dot{u}_2 &= u_2 \frac{\operatorname{sh} u_3}{\operatorname{ch} u_3} - \frac{u_1}{\operatorname{ch} u_3} \\ \dot{u}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

The latter system admits the periodic solution

$$\eta(t) : u_1 = \sin t, \; u_2 = \cos t, \; u_3 = 0 \tag{41}$$

corresponding to (39), i.e.

$$\eta(t) = x(u)_{u=\eta(t)}.$$

Since the conditions of Theorem 1 hold, (39) is stable with respect to its integral surface (38) if (41) is stable in the sense due to Lyapunov. If one tries to apply the Andronov – Witt theorem (see e.g. [5] p. 275) to settle the problem of stability of (41) one finds that the first variational equation of (40) corresponding to the solution (41) admits 1 as a triple characteristic factor. Thus we are confronted with exactly the same critical position as in the case of the sphere.

However, in the present case, clearly, the periodic solution (39) is not stable with respect to its integral surface (38), the corresponding parallel circle on the cylinder is not stable with respect to circular helices even if given in natural parametrisation.

References

[1] Cesari, L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. 2nd edition, Springer, 1963, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

[2] Levi-Civita, T., Sur l'écart géodésique, *Mathematische Annalen*, **97** (1927), 291 – 320.

[3] Ляпунов, А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, Собраніе сочиненій, том II., 7 – 263, Изд. Ак. Наук СССР, 1956, Москва, Ленинград.

[4] Malkin, I. G., On the stability of motion in the sense of Lyapunov, *Am. Math. Soc. Translations*, Series I., **5** (1962), 175 – 241.

[5] Понтрягин, Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит, 1961, Москва.

INDEX

Technikai szerkesztő:

SCHARNITZKY VIKTOR

68.242. Állami Nyomda, Budapest

A kiadásért felelős: az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora

A kézirat nyomdába érkezett: 1968 február. Megjelent 1968 december

Terjedelem 13,75 A/5 ív, 8 ábra. Példányszám 650

Készült monó- és kéziszedéssel, ives magasnyomással,

az MSZ 5601–59 és az MSZ 5602–55 szabványok szerint