

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM
BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS XIV.

REDIGIT
Á. CSÁSZÁR

ADIUVANTIBUS

M. BOGNÁR, G. HAJÓS, F. KÁRTESZI, I. KÁTAI,
A. KÓSA, J. MOGYORÓDI, J. MOLNÁR, R. PÉTER,
P. SZÁSZ, J. SURÁNYI, P. TURÁN



1971

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM
BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO BIOLOGICA
incipit anno MCMLVII

SECTIO CHIMICA
incipit anno MCMLIX

SECTIO GEOGRAPHICA
incipit anno MCMLXVI

SECTIO GEOLOGICA
incipit anno MCMLVII

SECTIO HISTORICA
incipit anno MCMLVII

SECTIO IURIDICA
incipit anno MCMLIX

SECTIO LINGUISTICA
incipit anno MCMLXX

SECTIO MATHEMATICA
incipit anno MCMLVIII

SECTIO PAEDAGOGICA ET PSYCHOLOGICA
incipit anno MCMLXX

SECTIO PHILOLOGICA
incipit anno MCMLVII

SECTIO PHILOLOGICA HUNGARICA
incipit anno MCMLXX

SECTIO PHILOLOGICA MODERNA
incipit anno MCMLXX

SECTIO PHILOSOPHICA ET SOCIOLOGICA
incipit anno MCMLXII

AN INEQUALITY FOR POLYNOMIALS

By

Á. ELBERT

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest

(Received December 8, 1969)

Let z_1, \dots, z_m be complex numbers with $\varrho_j = |z_j| \geq 1$ ($j = 1, \dots, m$) and for $n > m$

$$\mathcal{F}(n; z_1, \dots, z_m) = \left\{ f(x); f(x) = \prod_{j=1}^m (x - z_j) \cdot \right. \\ \left. \cdot \{x^{n-m} + a_{n-m-1} x^{n-m-1} + \dots + a_0\}, \quad a_0, \dots, a_{n-m-1} \text{ real} \right\}$$

$$E(n; z_1, \dots, z_m) = \min_{f \in \mathcal{F}(n; z_1, \dots, z_m)} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|,$$

$$M(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m) = \min_{\substack{|z_j| = \varrho_j \\ j=1, \dots, m}} E(n; z_1, \dots, z_m).$$

Now we are interested in the quantities $E(n; z_1, \dots, z_m)$ and $M(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m)$. An asymptotic result is known, namely S. BERNSTEIN [1] proved for fixed m the asymptotic formula

$$(1) \quad E(n; z_1, \dots, z_m) \sim 2 \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^m |z_j + \sqrt{z_j^2 - 1}| \quad (n \rightarrow \infty),$$

but this formula does not give information for finite n -s. In the latter case there is a result of P. TURÁN [4] which states the validity of the inequality

$$(2) \quad M(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m) > 2 \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^m \varrho_j,$$

which is not sharp enough above all for large m -s. Concerning (1) and (2) we want now to prove the following

THEOREM. For the quantity $M(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m)$ defined above the inequality

$$(3) \quad M(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m) > \frac{s^{n-m}}{2^n} \prod_{j=1}^m (\varrho_j + \sqrt{\varrho_j^2 - s^2})$$

holds, where

$$s = \begin{cases} 1 & \text{if } n \geq \sum_{j=1}^m \frac{\varrho_j}{\sqrt{\varrho_j^2 - 1}} \\ \text{the positive root of the equation } n = \sum_{j=1}^m \frac{\varrho_j}{\sqrt{\varrho_j^2 - x^2}} & 0 < x < 1. \end{cases}$$

In connection with (2) we have

$$(4) \quad \frac{s^{n-m}}{2^n} \prod_{j=1}^m (\varrho_j + \sqrt{\varrho_j^2 - s^2}) \geq \left\{ \left(1 + \frac{m}{n} \right)^{1+\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{1-\frac{m}{n}} \right\}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^m \varrho_j.$$

REMARK. The inequality $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x} > e^{x^2}$ for $0 < x \leq 1$ and (4) imply that the inequality (3) is sharper than (2) if $m \geq \sqrt{\log 4} / \sqrt{n}$.

The proof of our Theorem goes on the way as in [3] and only the modifications will be detailed here.

PROOF. For the sake of simplicity we shall write for $v = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}(2^v n; \varrho_1, \dots, \varrho_1, -\varrho_1, \dots, -\varrho_1, \dots, \varrho_m, \dots, \varrho_m, -\varrho_m, \dots, -\varrho_m)$$

$$E_v = E(2^v n; \underbrace{\varrho_1, \dots, \varrho_1}_{2^{v-1} \text{ times}}, \underbrace{-\varrho_1, \dots, -\varrho_1}_{2^{v-1} \text{ times}}, \underbrace{\varrho_m, \dots, \varrho_m}_{2^{v-1} \text{ times}}, \underbrace{-\varrho_m, \dots, -\varrho_m}_{2^{v-1} \text{ times}}).$$

Let us consider a polynomial $f(x) \in \mathcal{F}(n; z_1, \dots, z_m)$ then $(-1)^n \overline{f(-x)} \cdot f(x) \in \mathcal{F}(2n; z_1, -z_1, \dots, z_m, -z_m)$ and from the inequality

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|^2 \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) \overline{f(-x)}|$$

it follows immediately the validity of the inequality

$$(5) \quad E^2(n; z_1, \dots, z_m) \geq E(2n; z_1, -\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, -\bar{z}_m).$$

Let $z_j = \varrho_j e^{i\varphi_j}$ ($0 \leq \varphi_j < 2\pi$, $j = 1, \dots, m$) be then

$$|(x-z_j)(x+\bar{z}_j)| = |x^2 - \varrho_j^2 + 2ix\varrho_j \sin \varphi_j| \geq |x^2 - \varrho_j^2|$$

and this implies

$$(6) \quad E(2n; z_1, -\bar{z}_1, \dots, z_m, -\bar{z}_m) \geq E(2n; \varrho_1, -\varrho_1, \dots, \varrho_m, -\varrho_m) = E_1.$$

By (5), (6) we have

$$(7) \quad M^2(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m) \cong E_r.$$

Let $g_r^*(x)$ be an extremal polynomial in \mathcal{F}_r , i.e. for which $\max_{-1 \leq x \leq 1} |g_r^*(x)| = E_r$.

In the theory of approximation it is proved that there is one and only one extremal polynomial in \mathcal{F}_r , and this takes on the values E_r and $-E_r$ alternatively in $[-1, 1]$, therefore $g_r^*(x)$ has only real roots, which lay except ϱ_j 's in the interval $[-1, 1]$ and they are simple, hence

(8)

$$g_r^*(x) = \prod_{j=1}^m (x^2 - \varrho_j^2)^{2^{r-1}} \cdot \prod_{k=1}^{2^r(n-m)} (x - x_k^{(r)}) - 1 \leq x_1^{(r)} < \dots < x_{2^r(n-m)}^{(r)} \leq 1.$$

Let us define the nondecreasing function $I_r(x)$ by

$$(9) \quad I_r(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1^{(r)} \\ \frac{i-1}{2^r n} + \frac{x - x_{i-1}^{(r)}}{2^r n (x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)})} & x_{i-1}^{(r)} \leq x \leq x_i^{(r)} \\ \frac{2^r(n-m)-1}{2^r n} & x \geq x_{2^r(n-m)}^{(r)}. \end{cases}$$

Between the roots $x_{i-1}^{(r)}$ and $x_i^{(r)}$ ($i = 2, \dots, 2^r(n-m)$) there is a $\xi_i^{(r)}$ for which

$$(10) \quad |g_r^*(\xi_i^{(r)})| = E_r.$$

Using the well-known inequality of Bernstein

$$\left| \frac{d}{dx} g_r^*(x) \right| \leq 2^r n \frac{\max_{-1 \leq x \leq 1} |g_r^*(x)|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^r n E_r}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

we have by (10)

$$E_r = \left| \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{\xi_i^{(r)}} \frac{d}{dx} g_r^*(x) dx \right| \leq \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{\xi_i^{(r)}} \frac{2^r n E_r}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

hence

$$(11) \quad \frac{1}{2^r n} \leq \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{\xi_i^{(r)}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

and similarly

$$(12) \quad \frac{1}{2^v n} \equiv \int_{\xi_i^{(v)}}^{x_i^{(v)}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

By (11) and (12) we get

$$(13) \quad \Gamma_v(x'') - \Gamma_v(x') < \frac{1}{2^{v-1} n} + \frac{1}{2} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x' < x'').$$

By (13) the sequence $\{\Gamma_v(x)\}_{v=1}^\infty$ is equicontinuous and there is a subsequence $\{\Gamma_{v_r}(x)\}_{r=1}^\infty$ such that

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{v_r}(x) = \Gamma(x) \quad -1 \leq x \leq 1,$$

and one can define the quantities a and b by

$$a = \max \{x; \Gamma(x) = \Gamma(0) = 0, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$b = \min \{x; \Gamma(x) = \Gamma(1), -1 \leq x \leq 1\}.$$

The function $\Gamma(x)$ is nondecreasing, has a non-negative derivative $\gamma(x)$ almost everywhere, for which by (13)

$$(14) \quad 0 \leq \gamma(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \text{ a. e. in } [-1,1].$$

It is clear, that the polynomial $(g_v^*(x))^2 \in \mathcal{F}_{v+1}$ and can not be extremal one in \mathcal{F}_{v+1} , hence

$$(15) \quad E_v^2 > E_{v+1}.$$

Taking into account the inequalities (7) and (15) we obtain that the sequence $\{\sqrt[2^v n]{E_v}\}_{v=1}^\infty$ is a decreasing one, and let

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[2^v n]{E_v} = M,$$

then

$$(16) \quad M(n; \varrho_1, \dots, \varrho_m) > M^n.$$

Using the mean result of [3] we have

$$\frac{1}{2^v n} \log |g_v^*(x)| \Rightarrow \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \log (\varrho_j^2 - x^2) + \int_a^b \log |x-t| \gamma(t) dt,$$

where \Rightarrow means, as usual, the convergence in measure, and

$$(17) \quad \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \log(\varrho_j^2 - x^2) + \int_a^b \log|x-t| \gamma(t) dt = \log M \text{ for } x \in [a,b].$$

This integral equation has the solution (see [2])

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & \frac{1}{\pi \sqrt{(b-x)(x-a)}} \left\{ \int_a^b \gamma(t) dt + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \left(2 - \frac{\sqrt{(\varrho_j+a)(\varrho_j+b)}}{\varrho_j+x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{(\varrho_j-a)(\varrho_j-b)}}{\varrho_j-x} \right) \right\} \quad (a \leq x \leq b). \end{aligned}$$

By (9) we have $I_r(1) = \frac{2^r(n-m)-1}{2^r n}$, therefore $I(1) = \frac{n-m}{n}$ and $I(b) = I(1) = \int_a^b \gamma(t) dt = \frac{n-m}{n}$, hence

$$(18) \quad \begin{aligned} \gamma(x) = & \frac{1}{\pi \sqrt{(b-x)(x-a)}} \left[1 - \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\sqrt{(\varrho_j+a)(\varrho_j+b)}}{\varrho_j+x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sqrt{(\varrho_j-a)(\varrho_j-b)}}{\varrho_j-x} \right) \right] \quad a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Let us assume at first that $-1 < a, b < 1$, then by (14) $\gamma(a) < 1/2\sqrt{1-a^2}$ and $\gamma(b) < 1/2\sqrt{1-b^2}$, therefore by (18) it must be

$$(19) \quad F(a, b) = 0, \quad F(b, a) = 0,$$

where

$$F(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \left(\sqrt{\frac{\varrho_j+y}{\varrho_j+x}} + \sqrt{\frac{\varrho_j-y}{\varrho_j-x}} \right) - 2n.$$

By the identity

$$(20) \quad \begin{aligned} F(x, y) - F(y, x) = & \\ = & \sum_{j=1}^m \frac{(\sqrt{\varrho_j^2 - y^2} - \sqrt{\varrho_j^2 - x^2})(\sqrt{(\varrho_j+x)(\varrho_j+y)} + \sqrt{(\varrho_j-x)(\varrho_j-y)})}{\sqrt{(\varrho_j^2 - x^2)(\varrho_j^2 - y^2)}} \end{aligned}$$

we have from (19) that $b = \pm a$ because all terms in (20) have the same sign, therefore $b = -a$, hence a is the negative solution of the equation

$$\sum_{j=1}^m \left(\sqrt{\frac{\varrho_j + x}{\varrho_j - x}} + \sqrt{\frac{\varrho_j - x}{\varrho_j + x}} \right) - 2n = 0$$

or in a simpler form

$$(21) \quad \sum_{j=1}^m \frac{\varrho_j}{\sqrt{\varrho_j^2 - x^2}} - n = 0.$$

If for example it would be $-1 < a < 0$ and $b = 1$, then it should be $F(a, 1) = 0$ and by (20) $-F(1, a) = F(a, 1) - F(1, a) < 0$, hence $F(1, a) > 0$ and $\gamma(x)$ would be negative in any neighbourhood of $x = 1$, which would be a contradiction to (14), therefore a must be -1 and we have always $b = -a$, and the value of a is either -1 or is a solution of (21). In the Theorem the value of s is defined as the positive solution of (21), hence $s = -a$ and by (17)

$$(22) \quad \gamma(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{s^2 - x^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{\varrho_j \sqrt{\varrho_j^2 - s^2}}{\varrho_j^2 - x^2} \right\} \quad (-s \leq x \leq s).$$

By multiplication of the integral equation (17) with $1/\pi \sqrt{s^2 - x^2}$ and integrating it over $[-s, s]$ we obtain

$$-\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \int_{-s}^s \log(\varrho_j^2 - x^2) \frac{dx}{\pi \sqrt{s^2 - x^2}} + \frac{n-m}{n} \log \frac{s}{2} = \log M,$$

hence

$$(23) \quad M^n = \frac{1}{2n} s^{n-m} \prod_{j=1}^m (\varrho_j + \sqrt{\varrho_j^2 - s^2}),$$

which proves by (16) the expected inequality (3).

Using the inequalities $\varrho_j \geq 1$ we have from (21)

$$0 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{\varrho_j^2}}} - n \geq \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{n^2}}} - n,$$

hence

$$(24) \quad s \geq \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}}.$$

Let us consider the following problem. Let $Y_{m,n}$ be defined by

$$Y_{m,n} = \left\{ (y_1, \dots, y_m); 0 \leq y_j \leq \log 2, (j = 1, \dots, m), \sum_{j=1}^m \frac{1}{e^{y_j} - 1} \leq n \right\}.$$

The set $Y_{m,n}$ is a compact subset of the euclidean space E^m , therefore there is at least one point $(y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) \in Y_{m,n}$ where the function $\sum_{j=1}^m y_j$ attains its minimum on $Y_{m,n}$. The function $1/(e^y - 1)$ is a decreasing function of y , therefore it must be

$$(25) \quad n = \sum_{j=1}^m \frac{1}{e^{y_j^{(0)}} - 1}.$$

But the function $1/(e^y - 1)$ is a convex function of y for $y > 0$, therefore for any $(y_1, \dots, y_m) \in Y_{m,n}$

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{e^{y_j} - 1} \geq \frac{m}{e^{y^{(1)}} - 1}$$

if there is an index j with $y_j \neq y^{(1)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j$. From this and (25) it

follows that

$$y_1^{(0)} = \dots = y_m^{(0)} = y^{(1)}$$

and $n = m/(e^{y^{(1)}} - 1)$, therefore $y^{(1)} = \log \left(1 + \frac{m}{n} \right)$ and

$$(26) \quad \sum_{j=1}^m y_j \geq m \log \left(1 + \frac{m}{n} \right) \text{ if } (y_1, \dots, y_m) \in Y_{m,n}.$$

Let $z_j = \log(1 + \sqrt{1 - s^2/\varrho_j^2})$ then by (21) ($s = s!$) we have $(z_1, \dots, z_m) \in Y_{m,n}$ hence from (23), (24) and (25)

$$\begin{aligned} \log \cdot \frac{M^n 2^n}{\prod_{j=1}^m \varrho_j} &= \sum_{j=1}^m \log \left(1 + \sqrt{1 - \frac{s^2}{\varrho_j^2}} \right) + (n-m) \log s = \sum_{j=1}^m z_j + \\ &+ (n-m) \log s \geq m \log \left(1 + \frac{m}{n} \right) + (n-m) \log \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}} = \\ &= \frac{n}{2} \left[\left(1 + \frac{m}{n} \right) \log \left(1 + \frac{m}{n} \right) + \left(1 - \frac{m}{n} \right) \log \left(1 - \frac{m}{n} \right) \right], \end{aligned}$$

which yields the desired inequality (4). We remark that the last inequality holds for $s = 1$, too, which completes the proof.

References

- [1] BERNSTEIN, S., Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes, *Comptes Rendus*, **157** (1913), 1055–1057.
- [2] CARLEMAN, T., Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen, *Math. Zeitschr.*, **15** (1922), 111–120.
- [3] ELBERT, Á., Some inequalities concerning polynomials having only real zeros, *Studia Scient. Math. Hung.*, **6** (1971).
- [4] TURÁN, P., On an inequality of ČEBIŠEV, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **11** (1968), 15–16.

SOME PROBABILISTIC ASPECTS OF MAJORIZATION

By

J. GALAMBOS

University of Ibadan, Nigeria

(Received February 15, 1970)

1. Summary

Let A_1, A_2, \dots, A_n be a sequence of events on a given probability space and let E_k denote the event that at least k among the A 's occur. We show that majorization characterizes the sequence E_k among all Boolean functions of A_i , $i = 1, 2, \dots, n$. In addition we settle the problem raised by A. W. MARSHALL that if (y_1, y_2, \dots, y_n) , $1 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ majorizes (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ then there is a probability space and a sequence $\{A_i\}$ of events on it such that $x_i = P(A_i)$ and $y_k = P(E_k)$. Finally, we give some applications of these results and sharpen known inequalities.

2. Introduction

Let $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ and $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ be sequences of real numbers. We say that (y_1, y_2, \dots, y_n) majorizes (x_1, x_2, \dots, x_n) if

$$(1) \quad \sum_{j=1}^k y_j \geq \sum_{j=1}^k x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

and

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n x_j$$

The effectiveness of majorization is due to the following Karamata theorem (see [1], p. 89).

THEOREM K. *Let $f(z)$ be a convex function. Then for (y_1, y_2, \dots, y_n) majorizing (x_1, x_2, \dots, x_n)*

$$\sum_{j=1}^n f(y_j) \geq \sum_{j=1}^n f(x_j).$$

Theorem K provides a unified method to prove inequalities from different branches of mathematics. For results and further references related to majorization see [4] and [7].

Let A_1, A_2, \dots, A_n be a sequence of events on a given probability space and let E_k denote the event that at least k among the events A_i occur. Our main concern is to investigate how widely can Theorem K be applied to prove inequalities among probabilities of Boolean functions of the A_i . Boolean function is meant here as a function which can be expressed by a finite number of the operations: addition, multiplication and taking complements. In this regard I prove the following

THEOREM 1. Let $A_j, j = 1, 2, \dots, n$ be a sequence of events on a given probability space and let $F_k = F_k(A_1, \dots, A_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ be Boolean functions of the variables A_j . Put $y_k = P(F_k)$ and $x_k = P(A_k)$ and reorder the subscripts so that both the y 's and x 's be decreasing. Then (1) and (2) are satisfied independently of the probability space and choice of A_k if, and only if, $F_k = E_k$.

The next theorem settles a question, in the affirmative, raised by A. W. MARSHALL,

THEOREM 2. Let (y_1, y_2, \dots, y_n) and (x_1, x_2, \dots, x_n) be real n -vectors the subscripts being chosen in such a way that $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ and $x_1 \geq x_2 \dots \geq x_n$, and assume that $y_1 \leq 1$, $y_n \geq 0$, $x_n \geq 0$ and that (1) and (2) are satisfied. Then there is a probability space (Ω, \mathcal{A}, P) and a sequence A_1, A_2, \dots, A_n , $A_j \in \mathcal{A}$, such that $x_j = P(A_j)$ and $y_j = P(E_j)$ for $j = 1, 2, \dots, n$.

3. Proof of the main results

I shall prove Theorem 1 by the method of indicators of M. LOÈVE [5] what I state in the form how it was re-discovered by RÉNYI [8].

Method of indicators. Let $S = (\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space and A_1, A_2, \dots, A_n events on S , i.e. $A_i \in \mathcal{A}$. Let $F_k = F_k(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$ be Boolean functions of A_1, A_2, \dots, A_n and let c_k be real numbers. If

$$(3) \quad \sum_{k=1}^N c_k P(F_k) \geq 0$$

whenever all the A_1, A_2, \dots, A_n are replaced by either Ω or \emptyset (empty set), then (3) is valid for any choice of A_1, A_2, \dots, A_n .

Another tool in proving Theorem 1 is the representation of Boolean functions by 'basic functions'.

Let A_1, A_2, \dots, A_n be events on a given probability space and let $F_k = F_k(A_1, A_2, \dots, A_n)$, $k = 1, 2, \dots, N$ be Boolean functions of the variables A_j . Denoting the complement of the set A by A^{-1} and putting A^1 for A , a basic (Boolean) function of the variables A_j is defined as

$$A_1^{e_1} A_2^{e_2} \dots A_n^{e_n}$$

where e_j is either +1 or -1. Clearly, the number of basic (Boolean) functions of n variables is 2^n , which will be denoted by B_1, B_2, \dots, B_{2^n} . A labelling of the basic functions can, e.g., be obtained by defining 2^n n -vectors $(e_1(m), e_2(m), \dots, e_n(m))$, $m = 1, 2, \dots, 2^n$, where $e_j(m)$ is either +1 or -1, and the corresponding basic function is denoted by B_m . Such a sequence of n -vectors can be obtained as follows. Expand

$$m-1 = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(m) 2^j, \quad m = 1, 2, \dots, 2^n,$$

where $f_j(m)$ is either 0 or 1 and put $e_j(m) = 2f_{j-1}(m)-1$. By this procedure we get

$$B_1 = A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_n^{-1}, \quad B_{2^n} = A_1 A_2 \dots A_n.$$

We can now formulate the representation theorem.

Representation of Boolean functions. For any Boolean function F of the variables A_1, A_2, \dots, A_n there is a unique subset T of the set $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ such that

$$(4) \quad F = \sum_{t \in T} B_t$$

This statement can easily be proved by the definitions involved and a proof in detail can be found in [3].

We can now turn to the proof of Theorem 1.

PROOF OF THEOREM 1. Putting $y_k = P(E_k)$ and $x_k = P(A_k)$, it is clear that $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$. Thus condition (1) of majorization can be restated in the equivalent form, that for any $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_k = n$

$$(1^*) \quad \sum_{j=1}^k y_j \geq \sum_{l=1}^k x_{j_l}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

In order to show that (y_1, y_2, \dots, y_n) majorizes (x_1, x_2, \dots, x_n) , by the method of indicators, it suffices to show that (1*) and (2) are satisfied when all the A 's are either Ω or Φ . Let h denote the number of A_i 's which are chosen as Ω (and thus the remaining $n-h$ A 's are taken as Φ). If $h=0$, all x 's and y 's are 0 and both (1*) and (2) are satisfied. If $h>0$, then clearly $y_1 = y_2 = \dots = y_h = 1$, $y_{h+1} = \dots = y_n = 0$, and exactly h x 's are 1, the rest are 0, and (1*) and (2) are again valid what proves one part of the theorem.

Turning to the second part, let F_k , $k=1, 2, \dots, n$ be Boolean functions of A_1, A_2, \dots, A_n such that, putting $z_k = P(F_k)$ and rearranging the subscripts so that $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$, (1*) and (2) are satisfied (not depending on the choice of A_i , only on the functional form of F_k), y_j being replaced by z_j . We have to show $F_k = E_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Since validity of (1*) and (2) does not depend on the choice of A_i , we again restrict ourselves to choosing all the A 's either Ω or Φ , and h again denotes the number of Ω 's among A_1, A_2, \dots, A_n . For $h=0$ we get from (2) that

all z 's should be 0, i.e. $B_1 = A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_n^{-1}$ does not take place in the representation (4) of any of the F_k . Let $h \geq 1$, i.e. let $A_{i_1} = A_{i_2} = \dots = A_{i_h} = \Omega$, $A_{i_{h+1}} = \emptyset$, where i_t are distinct integers between 1 and n . Since by choice, denoting by $B_{i,h}$ the basic function $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_h} A_{i_{h+1}}^{-1} \dots A_{i_n}^{-1}$, $P(B_{i,h}) = 1$, and for any other basic function B_i , $P(B_i) = 0$, (2) yields that in exactly h of the representations (4) of F_1, F_2, \dots, F_n , the basic function $B_{i,h}$ should occur. By considering (1*) we immediately have that the representation of each of F_1, F_2, \dots, F_h should contain $B_{i,h}$, and hence the result above implies that $B_{i,h}$ is not taking place in the expression (4) of F_k for $k > h$, i.e. we have determined the representations of F_1, F_2, \dots, F_n , which are obviously those of E_1, E_2, \dots, E_n . By the uniqueness of (4), we get that $F_k = E_k$, $1 \leq k \leq n$, which completes the proof.

PROOF OF THEOREM 2. We show that a sequence A_1, A_2, \dots, A_n with the required properties can be constructed on the probability space (Ω, \mathcal{A}, P) , where $\Omega = (0, 1)$, P Lebesque measure and \mathcal{A} the set of Lebesque measurable subsets of $(0, 1)$. The A 's will be either intervals or unions of a finite number of disjoint intervals. The sequence A_1, A_2, \dots, A_n is constructed by induction.

Lay the points $1 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ and x_1 in to the interval $(0, 1)$ and put $A_1 = (0, x_1)$. Define

$$x_{12} = \max \{x_1, x_1 + (x_2 - y_2)\}, \quad x_{22} = \min \{x_2, y_2\}$$

and let $A_2 = (0, x_{22}) \cup (x_1, x_{12})$. The intervals $(0, x_{22})$ and (x_1, x_{12}) are disjoint, since if $x_2 < y_2$, the second one is empty, if $x_2 \geq y_2$, then $x_{22} = y_2 \leq x_2 \leq x_1$ by the choice of subscripts, hence again there is no point in common in these two intervals. Thus $P(A_2) = x_{22} + (x_{12} - x_1) = x_2$. Note that by (1), for $k = 2$, $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ what implies that $x_{12} \leq y_1$, and by definition we have that $x_{22} \leq y_2$. We now define $\{A_j\}$ by induction. Assuming that A_k has been defined by the points $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{kk}$, with $x_{jk} \leq y_j$, having been determined, let A_{k+1} be defined as follows. Let $x_{jk} < x_{j,k+1} \leq y_j$, $j = 1, 2, \dots, k, k+1$, with $x_{k+1,k} = 0$, such that

$$(5) \quad x_{k+1,k+1} + \sum_{j=1}^k (x_{j,k+1} - x_{jk}) = x_{k+1}$$

and if $x_{j,k+1} - x_{j,k} > 0$, then $x_{j-1,k+1} = y_{j-1}$. In a plain language, to construct the points $x_{j,k+1}$, $1 \leq j \leq k+1$, the points $0, x_{kk}, \dots, x_{1k}$ are shifted in this order, in aggregate by x_{k+1} , and if the point y_{j-1} is reached by this procedure, this becomes $x_{j-1,k+1}$, and then $x_{j,k+1}$ is moved on. It is evident that $x_{j,k+1} < y_j$, for $j > 1$ from the construction, for $j = 1$ from (1) and (2). Put now

$$A_{k+1} = (0, x_{k+1,k+1}) \cup \left[\bigcup_{j=1}^k (x_{jk}, x_{j,k+1}) \right].$$

From the remark above the intervals involved are disjoint and hence $P(A_{k+1}) = x_{k+1}$ by (5). We obtain that $(0, y_j) = E_j$ if, when finishing the construction, x -points will reach the y 's, i.e. $x_{j,n} = y_j$, but this is guaranteed by (2) what terminates the proof of Theorem 2.

REMARK 1. From the construction it is obvious that it was not important that $\Omega = (0, 1)$, the same procedure works for $\Omega = (0, \alpha)$ with arbitrary finite α , hence in Theorem 2 the restriction $y_1 \leq 1$ is superfluous for the conclusion being valid, the expression 'probability space' being replaced by 'measure space'.

4. Applications

I first prove the following

THEOREM 3. Let $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ be a symmetric function such that for any two of its variables, z_1 and z_2 say,

$$(6) \quad F(u_1, u_2, z_3, \dots, z_n) \geq F(v_1, v_2, z_3, \dots, z_n) \text{ if } u_1 \geq v_1, u_1 + u_2 = v_1 + v_2.$$

Let A_1, A_2, \dots, A_n be events on the probability space (Ω, \mathcal{A}, P) , and let E_k denote the event that at least k among the A 's occur. Put $y_k = P(E_k)$ and $x_k = P(A_k)$. Then

$$(7) \quad F(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

COROLLARY. For a function $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ satisfying the conditions of Theorem 3,

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

if (y_1, y_2, \dots, y_n) majorizes (x_1, x_2, \dots, x_n) and $y_1 \leq 1, y_n \geq 0, x_n \geq 0$ (the y 's and x 's are assumed to be arranged in decreasing order).

The corollary immediately follows from Theorems 1–3. I prove Theorem 3 by induction over n .

PROOF OF THEOREM 3. I prove by induction over n . For $n=2$ the inequality (7) reduces to the assumption (6). Consider the sequence A_1, A_2, \dots, A_n and let E_{kn} denote the event that at least k among A_1, A_2, \dots, A_{n-1} occur and put $y_{kn} = P(E_{kn})$. Assuming (7) for $n-1$ variables we get

$$(8) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \leq F(y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{n-1,n}, x_n).$$

Noting that

$$\begin{aligned} y_1 &= P(A_1 + \dots + A_{n-1} + A_n) = \\ &= P(A_1 + \dots + A_{n-1}) + P(A_n) - P(A_1 A_n + \dots + A_{n-1} A_n) \end{aligned}$$

i.e.

$$y_1 + P(A_1 A_n + \dots + A_{n-1} A_n) = y_{1n} + x_n, y_1 \geq y_{1n}$$

we have by (6) and (8) and by the symmetry of F that

$$(9) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq F(y_1, y_{2n}, \dots, y_{n-1, n}, u_2)$$

where $u_2 = P(A_1 A_n + \dots + A_{n-1} A_n)$. Similarly, since

$$E_{2n} + (A_1 A_n + \dots + A_{n-1} A_n) = E_2$$

we have

$$y_2 = y_{2n} + u_2 - P(A_1 A_n E_{2n} + \dots + A_{n-1} A_n E_{2n})$$

Putting u_3 for the last term, by (6) and (1) we get

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq F(y_1, y_2, y_{3n}, \dots, y_{n-1, n}, u_3)$$

Repeated application of this argument gives (7), since at the k -th step the last variable u_k is the probability that both at least $k-1$ among A_1, A_2, \dots, A_{n-1} and A_n occur, and the first y having double subscript is y_{kn} , hence we get

$$y_k = y_{kn} + u_k - u_{k+1}, \quad y_k \geq y_{kn},$$

therefore by (6) and by the symmetry of F we get that

$$F(\dots, \dots, y_{kn}, \dots, u_k) \leq F(\dots, \dots, y_k, \dots, u_{k+1}).$$

Repeating this argument $(n-1)$ times and noting that $u_n = y_n$, we get (7). The proof is complete.

REMARK 2. Since the proof obviously extends to the case when the bound for $P(\cdot)$ is not necessarily 1 (i.e. when the probability space is replaced by a bounded measure space), by remark 1, we have that in the corollary the assumption $y_1 < 1$ is superfluous, hence our result implies the main result of [6], also the well-known Muirhead inequality, see [4], p. 45.

It is worthy to remark that when one attempts to prove or disprove Theorem 2, the obvious way is to try to find out if the well-known inequalities among probabilities of A_k and E_k are valid for arbitrary n -vectors one majorizing the other. This attempt led to the following sharpening of former inequalities. Let $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ and put

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^n \binom{j-1}{k-1} y_j.$$

We evidently have

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sigma_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{j=k}^n \binom{j-1}{k-1} y_j = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j-1}{k-1} = y_1$$

what is the well known Poincare identity if y_j is replaced by $P(E_j)$. Another very important inequality is re-obtained from the general inequality

$$(10) \quad (2\sigma_2 + \sigma_1)y_1 - \sigma_1^2 = \sum_{t=2}^n y_t \left[y_1 - y_t + 2 \sum_{j=2}^{t-1} (y_1 - y_j) \right] \geq 0$$

i.e.

$$(11) \quad y_1 \geq \sigma_1^2 / (2\sigma_2 + \sigma_1).$$

Putting again $y_j = P(E_j)$, we get the inequality obtained in [2] and by P. WHITTLE [9]. This approach may result in sharper inequalities than the standard ones as it is seen by comparing (10) and (11). The inequalities I proved in [3] can also be re-obtained by this simple approach.

5. Acknowledgements

This research originated from a seminar on inequalities at the Statistical Laboratory, University of Cambridge. The part „if” of Theorem 1 was proved by Professor I. OLKIN and Dr. A. W. MARSHALL, using an argument different from mine. The method applied in the proof of Theorem 3 was used by Professor A. RÉNYI to prove the inequality

$$P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n) \geq P(E_1)P(E_2)\dots P(E_n).$$

References

- [1] BECKENBACH, E. F. and R. BELLMANN, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, (1961).
- [2] CHUNG, K. L. and P. ERDŐS, On the application of the Borel-Cantelli lemma, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 (1952), 179–186.
- [3] GALAMBOS, J., Quadratic inequalities among probabilities. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, 12 (1969), 11–16.
- [4] HARDY, G. J. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, *Inequalities*. 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, (1952).
- [5] LOÉVE, M., Sur les systèmes d'évenements, *Ann. Univ. Lyon, Sect. A.*, 5 (1942), 55–74.
- [6] MARSHALL, A. W. and F. PROSCHAN, An inequality for convex functions involving majorization, *J. Math. Anal. Appl.*, 12 (1965), 87–90.
- [7] MARSHALL, A. W., D. W. WALKUP and R. J. B-WETS, Order preserving functions: Applications to majorization and order statistics, *Pacific J. Math.*, 23 (1967), 569–584.
- [8] RÉNYI, A., Quelques remarques sur les probabilités devenements dépendantes, *Journal de Math.*, 37 (1958), 393–398.
- [9] WHITTLE, P., *Le calcul des probabilités et ses applications*, CNRS, Paris, (1959), p. 173.

COMPONENTS OF THE SPACE OF THE FREDHOLM OPERATORS

By

F. SZIGETI

II. Department of Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received April 17, 1970)

We shall use the following notations:

H is a separable Hilbert — space of infinite dimension.

$L(H)$ is the Banach algebra of all continuous linear transformations of the Hilbert-space H .

$GL(H)$ is the group of the invertible elements in $L(H)$.

$\text{Ker } A = \{\varphi \in H : A\varphi = 0\}$ is the kernel of $A \in L(H)$

$\text{Coker } A = H/\text{Im } A$ where $\text{Im } A$ is the image of the operator A .

If $\text{Im } A$ is a closed subspace in H , then $\text{Coker } A$ can be identified with $(\text{Im } A)^\perp$, the orthogonal complement of $\text{Im } A$.

$[V]$ denotes the dimension of the subspace $V \subset H$.

An operator A is called Fredholm operator if $[\text{Ker } A]$ and $[\text{Coker } A]$ are finite. The difference

$$[\text{Ker } A] - [\text{Coker } A]$$

is called the index of the operator A . The index of A and the space of all Fredholm operators will be denoted by $\text{Index } A$ and F , respectively.*

$$F_k = \{A; A \in F, \text{Index } A = k\}.$$

We shall prove the following theorem:

THEOREM 1. *The space $F \subset L(H)$ is an open set in this latter space, and its components are just the F_k -s. Furthermore $F_k \subset F_l \subset F_{k+l}$ which can be expressed as*

$$(1) \quad \text{Index } TS = \text{Index } T + \text{Index } S.$$

Theorem 1 follows from

* We mention that

$$\text{Index } A = [H/V] - [H/A(V)]$$

where $V \subset H$ is a subspace satisfying the conditions of Lemma 1 (see later).

THEOREM 2. Let us denote the set of the homotopy classes of all continuous mappings from the Hausdorff-space X into F by $[X, F]$. Then $[X, F]$ is isomorphic to $K(X)$, where K is the so-called K -functor.

Theorem 2 was proved by M. ATIYAH and K. JÄNICH independently. The proof uses the deep result of N. H. KUIPER, that the topological space $GL(H)$ is contractible in itself.

The topology in $GL(H)$ is defined with the aid of operator norms. Furthermore the formulation of Theorem 2 supposes the knowledge of the K -theory, that we shall not deal with here (see [1]). Theorem 1 has a completely elementary form. The only fact we make use of is that the space $GL(H)$ is arcwise connected.

We show how Theorem 1 follows from Theorem 2: Put X to be a single point, then $[X, F]$ is the set of the components of F , $K(X)$ is the group of the integers, and index mapping is just the index defined above.

PROOF of Theorem 1:

We mention two lemmas, which are essentially results of M. ATIYAH.

LEMMA 1. Let T be taken from F_k , $V \subset H$ a closed subspace, for which

$$[V^\perp] \text{ is finite}$$

$$V \cap \text{Ker } T = 0$$

Then T has a neighbourhood $U \subset L(H)$ such that for all $S \in U$

$$V \cap \text{Ker } S = 0$$

$$[H/S(V)] = [S(V)^\perp] = \text{const.}$$

LEMMA 2. Index $ST = \text{Index } S + \text{Index } T$.

We shall prove the

LEMMA 3. If $S, T \in F_k$ then there exists a continuous mapping

$$A: [0, 3] \rightarrow F_k$$

for which $A(0) = S$ and $A(3) = T$.

PROOF of Lemma 3. Suppose that $[\text{Ker } S] \leq [\text{Ker } T]$, and let $V \subset H$ be a subspace such that $\text{Ker } S \cap V = 0$ and $[V] + [\text{Ker } S] = [\text{Ker } T]$. We set $A(t) = S(id_H - tP_V)$ if $t \in [0, 1]$ where P_V denotes the orthogonal projection onto V : The following statements are obvious:

$$A: [0, 1] \rightarrow F_k \text{ is continuous}$$

$$A(0) = S,$$

$$[\text{Ker } A(1)] = [\text{Ker } T].$$

In the future we shall make use of the following trivial fact several times.

If $H = H_1 \oplus H_2$ and $H = H' \oplus H''$ are two orthogonal decompositions of the Hilbert space where $H_1 \cong H'$ and $H_2 \cong H''$ then there exists an opera-

tor $B \in GL(H)$ such that $B(H_1) = H'$ and $B(H_2) = H''$. Namely $B = C \oplus D \in GL(H)$ is a suitable choice for B , where $C: H_1 \rightarrow H'$, $D: H_2 \rightarrow H''$ are the given isomorphisms.

So there exists operators $B, C \in GL(H)$ such that $B(\text{Ker } T) = \text{Ker } A(I)$ and $C(A(I)H) = T(H)$. Hence, for the operator $CA(I)B$ we have

$$\text{Ker } CA(I)B = \text{Ker } T,$$

$$\text{Im } CA(I)B = \text{Im } T.$$

The space $GL(H)$ is arcwise connected, so we have the mappings:

$$B: [1, 2] \rightarrow GL(H),$$

$$C: [1, 2] \rightarrow GL(H)$$

such that $B(1) = C(1) = id_H$ and $B(2) = B$, $C(2) = C$. Now we continue the homotopy.

$$A(t) = C(t)A(I)B(t) \quad \text{if } t \in [1, 2].$$

Clearly the mapping

$$A: [1, 2] \rightarrow F_k$$

is continuous and

$$\text{Ker } A(2) = \text{Ker } T$$

$$\text{Im } A(2) = \text{Im } T.$$

Finally we join $A(2)$ to T by a path. Let us denote $V = (\text{Ker } T)^\perp$. Then

$$A(2)/_V: V \rightarrow \text{Im } T$$

$$T/_V: V \rightarrow \text{Im } T$$

are isomorphisms, and $(T/_V)^{-1}A(2)/_V \in GL(V)$.

V is a Hilbert space of infinite dimension itself, hence $GL(V)$ is path-connected. We have a mapping $D: [2, 3] \rightarrow GL(V)$ for which $D(2) = (T/_V)^{-1}A(2)/_V$ and $D(3) = id_V$. Then define:

$$A(t) = [T/_V \cdot D(t)] \ominus O_{\text{Ker } T}$$

if $t \in [2, 3]$. We clearly have — the two definitions of $A(2)$ are the same, so that the mapping

$$A: [0, 3] \rightarrow F_k$$

is continuous.

$$A(3) = T \quad \text{and} \quad A(0) = S,$$

which proves Lemma 3.

PROOF of Theorem 1:

It follows from Lemma 1 that F_k is open. Let $T \in F_k$ be an arbitrary operator and V be a subspace satisfying the conditions of Lemma 1. Then the neighbourhood U occurring in Lemma 1 is in F_k , since if $S \in U$ then

$$[H_V] - [H/S(V)] = \text{index } S = \text{const} = k.$$

F being the union of the open sets F_k is itself open. According to Lemma 3 the F_k 's are connected, and clearly maximal connected sets, therefore they are just the components of F . The other statement of Theorem 1 is consequence of Lemma 2.

So the proof of Theorem 1 is completed.

Bibliography

- [1] M. F. ATIYAH, *Lectures on K-theory*, Harward Univ. Cambridge Mass., 1965.
- [2] K. JÄNICH, *Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren*, Dissertation, Bonn, 1964.
- [3] N. H. KUIPER, The homotopy type of the unitary group of Hilbert space Topology, 3 (1965)

SYNTOPogene GRUPPEN III.

Von

ÁKOS CSÁSZÁR

I. Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 25. April 1970)

Die in den beiden ersten Abhandlungen über syntopogene Gruppen ([3], [4]) eingeführten Begriffe und erreichten Ergebnisse ermöglichen eine eindeutige Beziehung zwischen Filterscharen, linksbiperfekten Ordnungsstrukturen und linksinvarianten, perfekten Ordnungsstrukturen aufzustellen (s. [4], (3.18)). Im folgenden werden die linksinvarianten, perfekten Ordnungsstrukturen mit Hilfe dieses Zusammenhangs untersucht.

Mit E wird immer eine Gruppe mit Einselement e bezeichnet.

1. Gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstrukturen

Nach [3], (5.14) und (5.7) ist jede gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} einer linksinvarianten, perfekten Ordnungsstruktur, nämlich \mathcal{R}^p äquivalent. Mit Hilfe der in [4] eingeführten Beziehungen lässt sich eine Ordnungsstruktur dieser Art einfacher konstruieren:

(1.1) Es sei \mathcal{R} eine Ordnungsstruktur auf E . Für $\prec \in \mathcal{R}$ sei

$$(1.2) \quad \mathfrak{U}(\prec) = \{U : e \prec U\}$$

gesetzt. Dann ist $\mathfrak{U}(\prec)$ ein Filter und

$$(1.3) \quad \mathcal{E}(\mathcal{R}) = \{\mathfrak{U}(\prec) : \prec \in \mathcal{R}\}$$

ist eine Filterschar. $\mathcal{R} = \mathcal{R}^p$ ist genau dann gleichgradig linksstetig, wenn

$$(1.4) \quad \mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p(\mathcal{R}).$$

Beweis. $\mathfrak{U}(\prec)$ ist offenbar ein Filter, und es gilt

$$(1.5) \quad \prec_1 \subset \prec_2 \Rightarrow \mathfrak{U}(\prec_1) \subset \mathfrak{U}(\prec_2).$$

Daraus folgt, daß $\Xi(\mathcal{R})$ eine Filterschar ist, und daß

$$(1.6) \quad \mathcal{R}_1 < \mathcal{R}_2 \Rightarrow \Xi(\mathcal{R}_1) < \Xi(\mathcal{R}_2).^1$$

Ist nun \mathcal{R} eine gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur, ist ferner \mathcal{R}_1 eine linksinvariante, perfekte Ordnungsstruktur mit $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_1$ (z. B. kann $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}^{op}$ gewählt werden), so gilt

$$\Xi(\mathcal{R}) \sim \Xi(\mathcal{R}_1),$$

woraus nach [4], (3.18)

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})}^p \sim \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})}^p$$

folgt.

Umgekehrt ist $\mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})}^p$ nach [4], (3.18) linksinvariant, daher folgt aus (1.4) im Sinne von [3], (5.14), daß \mathcal{R} gleichgradig linksstetig ist. ▀

(1.7) \mathcal{R} sei eine gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur mit $\Xi = \Xi(\mathcal{R})$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{R} ist idempotent,
- (b) Ξ genügt der Bedingung

(1.8) zu jedem Filter $\mathfrak{U} \in \Xi$ gibt es einen Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ mit der Eigenschaft, daß jeder Menge $U \in \mathfrak{U}$ eine Menge $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ so zugeordnet werden kann, daß aus $x \in U_1$ immer $xU(x) \subset U$ folgt für eine geeignete Menge $U_1(x) \in \mathfrak{U}_1$,

- (c) zu $\prec \in \mathcal{R}_{\Xi}^p$ gibt es ein $\prec_1 \in \mathcal{R}_{\Xi}^p$ mit

$$\prec \subseteq \prec_1 \subseteq \prec_{\mathfrak{U}}^p.$$

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b). Nach (1.1) kann man $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\Xi}^p$ annehmen. Ist nun \mathcal{R} idempotent, so gibt es zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ einen Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ mit

$$\prec_{\mathfrak{U}}^p \subseteq \prec_{\mathfrak{U}_1}^p.$$

Für $U \in \mathfrak{U}$ gilt $e \prec_U U$, also $e \prec_{\mathfrak{U}} U$ und $e \prec_{\mathfrak{U}_1}^p U$, und daraus folgt die Existenz einer Menge U_1 mit

$$e \prec_{\mathfrak{U}_1}^p U_1 \prec_{\mathfrak{U}_1}^p U.$$

Aus der ersten Beziehung ergibt sich nach [4], (3.16) $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, und die Beziehung $x \prec_{\mathfrak{U}_1}^p U$ folgt für $x \in U_1$ aus der zweiten. Somit ergibt sich $x \prec_{\mathfrak{U}_1} U$, d.h. die Existenz von $U_1(x) \in \mathfrak{U}_1$ mit $x \prec_{U_1(x)} U$, also $xU_1(x) \subset U$. Man erhält daher die Gültigkeit von (1.8).

(b) \Rightarrow (c). Zu $\prec = \prec_{\mathfrak{U}}$ mit $\mathfrak{U} \in \Xi$ sei $\prec_1 = \prec_{\mathfrak{U}_1}$ mit dem zu \mathfrak{U} nach (1.8) gehörenden Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ gewählt. Dann folgt aus $A \prec B$ die Beziehung $AU \subset BU$ mit einer geeigneten Menge $U \in \mathfrak{U}$. Zu U sei $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ im Sinne von (1.8) gewählt. Mit der Bezeichnung $C = AU_1$ gilt dann erstens $A \prec_U C$,

¹ Für die Bezeichnung, s. [4].

also $A <_1 C$, zweitens ist für $x \in C$ eine Darstellung $x = au$ mit $a \in A$, $u \in U_1$ möglich, so daß nach (1.8) $uU(u) \subset U$ mit $U(u) \in \mathcal{U}_1$, also $xU(u) \subset aU \subset B$, und erst recht $x <_1 B$ für $x \in C$, d.h. $C <_1^p B$.

(c) \Rightarrow (a). Zu $< \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ sei $<_1$ im Sinne von (c) gewählt. Dann folgt aus $A <^p B$, $x \in A$ die Beziehung $x < B$, also $x <_1 C_x <_1^p B$ mit einer Menge C_x . Setzt man $C = \bigcup_{x \in A} C_x$, so ist also $A <_1^p C <_1^p B$, d.h. $<^p \subseteq <_1^{p2}$, und $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p$ ist idempotent. Nach (1.1) ist dann auch \mathcal{R} idempotent. ■

Die Idempotenz von $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ist mit einer einfacheren Bedingung gleichwertig:

(1.9) Eine linksbiperfekte Ordnungsstruktur $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ist genau dann idempotent, wenn die assoziierte Filterschar \mathcal{E} folgender Bedingung genügt:

(1.10) zu $U \in \mathcal{E}$ gibt es $U_1 \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Menge $U \in \mathcal{U}$ eine Menge $U_1 \in \mathcal{U}_1$ gehört mit $U_1^2 \subset U$.

BEWEIS. Ist $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ idempotent, so gibt es zu $U \in \mathcal{E}$ einen Filter $U_1 \in \mathcal{E}$ mit

$$<_U \subseteq <_{U_1}^2.$$

Nun ist für $U \in \mathcal{U}$ offenbar $e <_U U$, also $e <_{U_1} U$, und $e <_{U_1} V <_{U_1} U$ für ein geeignete Menge V . Nach [4], (3.16) hat die erste Beziehung $V \in \mathcal{U}_1$ zur Folge, während sich aus der zweiten $V <_{U_1} U$, d.h. $VV_1 \subset U$ für eine Menge $V_1 \in \mathcal{U}_1$ ergibt. Mit der Bezeichnung $V \cap V_1 = U_1 \in \mathcal{U}_1$ ist also $U_1^2 \subset U$.

Setzt man nun voraus, daß (1.10) erfüllt ist, so werde zu $U \in \mathcal{E}$ im Sinne von (1.10) der Filter $U_1 \in \mathcal{E}$ gewählt. Aus $A <_U B$ folgt nun $A <_{U_1} B$, d.h. $AU \subset B$ mit $U \in \mathcal{U}$, und wenn $U_1 \in \mathcal{U}_1$ der Menge U im Sinne von (1.10) gehört, so gilt für $C = AU_1$ offenbar

$$AU_1 \subset C, CU_1 = AU_1^2 \subset AU \subset B, \text{ d.h. } A <_{U_1} C <_{U_1} B.$$

Somit ist $A <_{U_1} C <_{U_1} B$, $<_{U_1} \subseteq <_{U_1}^2$, und $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ist idempotent. ■

BEMERKUNG. In (1.7) und (1.9) wurde eigentlich bewiesen, daß $<_{U_1}^p \subseteq <_{U_1}^{p2}$ oder $<_{U_1} \subseteq <_{U_1}^p$ bzw. $<_{U_1} \subseteq <_{U_1}^2$ mit der in (1.8) bzw. (1.10) für U und U_1 geforderten Eigenschaft gleichwertig sind.

(1.11) Für eine gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{R})$ gesetzt. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (a) $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ist rechtsstetig,
- (b) \mathcal{R} ist rechtsstetig,
- (c) \mathcal{E} genügt folgender Bedingung:

(1.12) jedem Filter $U \in \mathcal{E}$ und jedem Element $x \in E$ gehört ein $U_1 \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft, daß aus $U \in \mathcal{U}$ immer $xUx^{-1} \in \mathcal{U}_1$ folgt.

BEWEIS. Die Implikation (a) \Rightarrow (b) ist Folge von $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p$ (vgl. (1.1) und [5], (10.12)).

(b) \Rightarrow (c). Ist nun \mathcal{R} , also $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p$ rechtsstetig, so gibt es zu $U \in \mathcal{E}$ und $y \in E$ ein $U_1 \in \mathcal{E}$ mit

$$(1.13) \quad A <_{U_1}^p B \Rightarrow Ay < By.$$

Aus $U \in \mathfrak{U}$ folgt aber $x <_{\mathfrak{U}}^p U$, also $y <_{\mathfrak{U}_1}^p Uy$, woraus sich der Reihe nach $y <_{\mathfrak{U}_1} Uy$, $y <_{U_1} Uy$ mit $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, $yU_1 \subset Uy$ und schließlich $U_1 \subset y^{-1}Uy$ ergibt. Schreibt man $x = y^{-1}$, so bedeutet das die Gültigkeit von (1.12).

(c) \Rightarrow (a). Besteht endlich (c), so werde dem Filter $\mathfrak{U} \in \Xi$ und dem Element $x = y^{-1} \in E$ der Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ im Sinne von (1.12) zugeordnet. Aus $A <_{\mathfrak{U}} B$ folgt nun $A <_{\mathfrak{U}_1} B$ mit $U \in \mathfrak{U}$, also $AU \subset B$. Wird $U_1 = xUx^{-1}$ gesetzt, so gilt $yU_1 = Uy$, also $AyU_1 = AUy \subset By$, daher $Ay <_{U_1} By$, schließlich $Ay <_{\mathfrak{U}_1} By$ und

$$(1.14) \quad A <_{\mathfrak{U}} B \Rightarrow Ay <_{\mathfrak{U}_1} By. \blacksquare$$

(1.15) \mathcal{R} sei eine gleichgradig linkssteige, perfekte Ordnungsstruktur, $\Xi = \Xi(\mathcal{R})$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{R}_{Ξ} ist gleichgradig rechtsstetig,
- (b) \mathcal{R} ist gleichgradig rechtsstetig,
- (c) Ξ genügt der Bedingung

(1.16) jedem Filter $\mathfrak{U} \in \Xi$ gehört ein Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ mit der Eigenschaft, daß aus $U \in \mathfrak{U}$, $x \in E$ immer $xUx^{-1} \in \mathfrak{U}_1$ folgt.

Der Beweis ist dem vorangehenden vollständig ähnlich, nur ist es zu beachten, daß jetzt aus (b) die Gültigkeit von (1.13) mit einem von y unabhängigen Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ folgt, dagegen die Menge U_1 ausser von U noch von y abhängen kann. Wird umgekehrt (1.16) statt (1.12) vorausgesetzt, so hängt $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ nur von $\mathfrak{U} \in \Xi$ ab, so daß (1.14) gleichzeitig für alle $y \in E$ besteht. ■

Unter Heranziehung von \mathcal{R}_{Ξ}^* kann man noch (1.15) verschärfen:

(1.17) Unter den Voraussetzungen von (1.15) sind die Aussagen (a), (b), (c) in (1.15) noch mit den folgenden gleichwertig:

- (d) $\mathcal{R}_{\Xi}^2 < \mathcal{R}_{\Xi}^{*p}$,
- (e) $\mathcal{R}_{\Xi}^{*p} < \mathcal{R}_{\Xi}^p$,
- (f) $\mathcal{R}_{\Xi}^2 \sim \mathcal{R}_{\Xi}^{*p}$.

(g) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_1^p \sim \mathcal{R}_2^p$,

wobei \mathcal{R}_1 bzw. \mathcal{R}_2 links- bzw. rechtsbiperfekt ist.

Beweis. (d) \Rightarrow (c). Zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ sei $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ gewählt mit $<_{\mathfrak{U}}^p \subset <_{\mathfrak{U}_1}^{*p}$. Aus $U \in \mathfrak{U}$, $x \in E$ folgt nun $x <_{\mathfrak{U}}^p xU$, also $x <_{\mathfrak{U}_1}^p xU$ und $x <_{\mathfrak{U}_1}^* xU$, so daß man eine Menge $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ finden kann mit $U_1 x \subset xU$, d.h. $U_1 \subset xUx^{-1} \in \mathfrak{U}_1$.

Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die Bedingung (1.16) gegenüber der Umtauschung der Reihenfolge der Faktoren in der Multiplikation invariant ist (nur muß x^{-1} statt x gesetzt werden), ergibt sich die Implikation (e) \Rightarrow (c) ebenso.

(c) \Rightarrow (f). Ist (c) erfüllt, so ist \mathcal{R} nach (1.15) gleichgradig rechtsstetig, so daß nach (1.1) neben $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\Xi}^p$ auch $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\Xi}^{*p}$ gültig ist.

(f) \Rightarrow (d) und (f) \Rightarrow (e) sind evident.

(f) \Rightarrow (g). Nach (1.1) und (f) ist

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^{*p},$$

so dass man $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^*$ setzen kann.

(g) \Rightarrow (b) ergibt sich aus [4], (2.3), [3], (5.7) und (5.14). ■

Merkwürdigerweise steht die p -Stetigkeit einer gleichgradig linkstetigen, perfekten Ordnungsstruktur \mathcal{R} mit der Idempotenz von $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\mathcal{R})$ in Zusammenhang:

(1.18) \mathcal{R} sei eine gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur, $\Xi = \Xi(\mathcal{R})$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{R} ist p -stetig,
- (b) $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ist idempotent und gleichgradig rechtsstetig,
- (c) Ξ erfüllt (1.10) und (1.16).

BEWEIS. Nach (1.9) und (1.15) gilt (b) \Leftrightarrow (c). Aus (a) folgt nach [3], (4.8) die gleichgradige Rechtsstetigkeit von \mathcal{R} , also nach (1.15) dieselbe Eigenschaft von $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Weiterhin seien auf Grund der aus (a) folgenden p -Stetigkeit von $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p \sim \mathcal{R}$ (vgl. (1.1)) zu $<_{\mathcal{U}}^p \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^p$ ($\mathcal{U} \in \Xi$) zwei Filter \mathcal{U}_1 , $\mathcal{U}_2 \in \Xi$ so gewählt, daß aus $A <_{\mathcal{U}}^p B$ immer

$$\pi^{-1}(A) (<_{\mathcal{U}_1}^p \times <_{\mathcal{U}_2}^p)^p \pi^{-1}(B)$$

folgt. Ist nun $U \in \mathcal{U}$, so ist $e <_{\mathcal{U}}^p U$, und aus der Tatsache, daß $(e, e) \in \pi^{-1}(e)$ ist, ergibt sich

$$(e, e) (<_{\mathcal{U}_1}^p \times <_{\mathcal{U}_2}^p)^p \pi^{-1}(U),$$

also

$$(e, e) (<_{\mathcal{U}_1}^p \times <_{\mathcal{U}_2}^p) \pi^{-1}(U).$$

Aus [3], (2.3) folgert man nun (vgl. auch [3], (4.9) und [5], (11.10)), daß es Mengen U_1, U_2, V_1, V_2 gibt mit

$$(e, e) \in V_1 \times V_2, \quad U_1 \times U_2 \subset \pi^{-1}(U),$$

$$V_1 <_{\mathcal{U}_1}^p U_1, \quad V_2 <_{\mathcal{U}_2}^p U_2.$$

Insbesondere ist $e <_{\mathcal{U}_1} U_1, e <_{\mathcal{U}_2} U_2$, also

$$U_1 \in \mathcal{U}_1, \quad U_2 \in \mathcal{U}_2, \quad \pi(U_1 \times U_2) = U_1 U_2 \subset U.$$

Wird noch $\mathcal{U}_3 \in \Xi$ mit $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_3$ gewählt, so ist $U_3 = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_3$ und $U_3^2 \subset U$. Aus (a) folgt also (1.10), d.h. nach (1.9) auch die Idempotenz von $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$.

Wir brauchen noch zu zeigen, daß (a) aus (c) folgt. Zu $\mathcal{U} \in \Xi$ sei $\mathcal{U}_1 \in \Xi$ nach (1.10) und dazu $\mathcal{U}_2 \in \Xi$ nach (1.16) gewählt. Aus $A <_{\mathcal{U}}^p B, (x, y) \in \pi^{-1}(A)$

ergibt sich $xy <_{\mathcal{U}} B$, also $xyU \subset B$ mit einer geeigneten Menge $U \in \mathfrak{U}$.
Sei $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ mit $U_1^2 \subset U$ gewählt, dann erhält man

$$U'_2 = yU_1y^{-1} \in \mathfrak{U}_2 \quad \text{und} \quad U_1 = eU_1e^{-1} \in \mathfrak{U}_2.$$

So hat man für $U_2 = U'_2 \cap U_1 \in \mathfrak{U}_2$ die Inklusionen

$$xU_2yU_2 = xy(y^{-1}U_2y)U_2 \subset xyU_1U_2 \subset xyU_1^2 \subset xyU \subset B,$$

folglich

$$x <_{\mathfrak{U}_2}^p xU_2, \quad y <_{\mathfrak{U}_2}^p yU_2, \quad \pi(xU_2 \times yU_2) = xU_2yU_2 \subset B,$$

und erst recht

$$(x, y) (<_{\mathfrak{U}_2}^p X <_{\mathfrak{U}_2}^p) \pi^{-1}(B)$$

für beliebiges $(x, y) \in \pi^{-1}(A)$. Daraus folgt also

$$\pi^{-1}(A) (<_{\mathfrak{U}_2}^p X <_{\mathfrak{U}_2}^p) \pi^{-1}(B),$$

und die p -Stetigkeit von $\mathcal{R}_2 \sim \mathcal{R}$. ■

Aus (1.18) folgt nun leicht:

(1.19) Eine perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} ist genau dann p -stetig wenn $\mathcal{R} \sim \mathcal{S}^p$ ist mit einer linksbiperfekten, gleichgradig rechtsstetigen syntopogenen Struktur \mathcal{S} . Insbesondere ist eine p -stetige Ordnungsstruktur immer idempotent.

BEWEIS. Aus der p -Stetigkeit folgt nach [3], (4.8) die gleichgradige Links- und Rechtsstetigkeit, so daß nach (1.18) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\mathcal{E}(\mathcal{R})}$ gewählt werden kann (vgl. [4], (3.18)), und die p -Stetigkeit von \mathcal{S}^p ergibt sich ebenfalls aus (1.18) und [4], (3.18), falls \mathcal{S} eine linksbiperfekte, gleichgradig rechtsstetige syntopogene Struktur ist. ■

(1.20) Eine perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} ist genau dann p -stetig, wenn

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{S}_1^p \sim \mathcal{S}_2^p$$

ist, wobei \mathcal{S}_1 bzw. \mathcal{S}_2 eine links- bzw. rechtsbiperfekte syntopogene Struktur bezeichnet.

BEWEIS. Ist \mathcal{R} p -stetig, so ergeben sich aus (1.19) und aus der dazu dualen Aussage die behaupteten Darstellungen. Umgekehrt folgt aus der Existenz solcher Darstellungen, daß \mathcal{R} nach [4], (2.3), [3], (5.7) und (5.14) gleichgradig links- und rechtsstetig ist, so daß $\mathcal{R}_{\mathcal{E}(\mathcal{R})}$ nach (1.15) ebenfalls gleichgradig rechtsstetig sein muß. Nach [4], (3.18) ist aber $\mathcal{R}_{\mathcal{E}(\mathcal{R})} \sim \mathcal{S}_1$, woraus die Idempotenz von $\mathcal{R}_{\mathcal{E}(\mathcal{R})}$ und nach (1.18) die p -Stetigkeit von \mathcal{R} folgt. ■

(1.21) Für eine Filterschar \mathcal{E} sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} < \mathcal{R}_{\mathcal{E}}^*$,

(b) \mathcal{E} erfüllt die Bedingung

(1.22) zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ gibt es ein $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ mit der Eigenschaft, daß es zu $U \in \mathfrak{U}$ und $A \subset E$ ein $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ gibt mit $U_1 A \subset AU$,

(c) zu $< \in \mathcal{R}_{\Xi}^*$ gibt es $<_1 \in \mathcal{R}_{\Xi}^*$ mit der Eigenschaft, daß aus $A < B$ und $C \subset E$ immer $CA <_1 CB$ folgt.

Beweis. (a) \Rightarrow (b). Sei dem Filter $\mathfrak{U} \in \Xi$ ein Filter $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ so zugeordnet, daß $<_{\mathfrak{U}} \subset <_{\mathfrak{U}_1}^*$ ist. Für $U \in \mathfrak{U}$, $A \subset E$ gilt dann $A <_{\mathfrak{U}} AU$, also $A <_{\mathfrak{U}_1}^* AU$, so daß auch $U_1 A \subset AU$ mit einer geeigneten Menge $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ besteht.

(b) \Rightarrow (c). Ist $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ im Sinne von (1.22) gewählt, so folgt aus $A <_{\mathfrak{U}}^* B$ die Beziehung $UA \subset B$ mit $U \in \mathfrak{U}$. Für $C \subset E$ sei $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ zu U und C nach (1.22) zugeordnet. Dann ist $U_1 C \subset CU$, also $U_1 CA \subset CUA \subset CB$, und erst recht $CA <_{\mathfrak{U}_1}^* CB$.

(c) \Rightarrow (a). Zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ sei $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ so gewählt, daß aus $A <_{\mathfrak{U}}^* B$ und $C \subset E$ immer $CA <_{\mathfrak{U}_1}^* CB$ folgt. Aus $e <_{\mathfrak{U}}^* U$ für $U \in \mathfrak{U}$ ergibt sich dann $A <_{\mathfrak{U}_1}^* AU$, also $U_1 A \subset AU$ mit $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, so daß $A <_{\mathfrak{U}} B$, d. h. $AU \subset B$ mit $U \in \mathfrak{U}$ die Beziehung $U_1 A \subset B$ mit $U_1 \in \mathfrak{U}_1$, also $A <_{\mathfrak{U}_1}^* B$ zur Folge hat. ■

(1.23) Für eine Filterschar Ξ sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) ϱ ist $(\mathcal{R}_{\Xi}, \mathcal{R}_{\Xi}^*)$ -stetig,
- (b) ϱ ist $(\mathcal{R}_{\Xi}^p, \mathcal{R}_{\Xi}^{*p})$ -stetig,
- (c) ϱ ist $(\mathcal{R}_{\Xi}^*, \mathcal{R}_{\Xi})$ -stetig,
- (d) ϱ ist $(\mathcal{R}_{\Xi}^{*p}, \mathcal{R}_{\Xi}^p)$ -stetig,
- (e) Ξ erfüllt die Bedingung

(1.24) zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ gibt es $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ mit der Eigenschaft, daß aus $U \in \mathfrak{U}$ immer $U^{-1} \in \mathfrak{U}_1$ folgt,

- (f) $\mathcal{R}_{\Xi}^c < \mathcal{R}_{\Xi}$,
- (g) $\mathcal{R}_{\Xi}^{*c} < \mathcal{R}_{\Xi}^*$,
- (h) $\mathcal{R}_{\Xi}^s \sim \mathcal{R}_{\Xi}$,
- (i) $\mathcal{R}_{\Xi}^{ss} \sim \mathcal{R}_{\Xi}^*$.

Beweis. (a) \Rightarrow (b) ist evident (vgl. [5], (10.12)).

(b) \Rightarrow (c). Zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ sei $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ gewählt mit

$$A <_{\mathfrak{U}}^{*p} B \Rightarrow A^{-1} <_{\mathfrak{U}_1}^p B^{-1}.$$

Dann folgt aus $U \in \mathfrak{U}$ immer $e <_{\mathfrak{U}}^{*p} U$, also $e <_{\mathfrak{U}_1}^p U^{-1}$ und $e <_{\mathfrak{U}_1} U^{-1}$, so daß $U^{-1} \in \mathfrak{U}_1$ ist (vgl. [4], (3.16)).

(e) \Rightarrow (f). Für $U \in \Xi$ gilt offenbar

$$(1.25) \quad \prec_U^c = (\bigcup_{V \in U} \prec_V)^c = \bigcup_{V \in U} \prec_V^c = \bigcup_{V \in U} \prec_{V^{-1}} = \prec_{U^{-1}},$$

wobei

$$(1.26) \quad U^{-1} = \{U^{-1} : U \in U\}$$

gesetzt wurde (vgl. [5], (2.13) und [4], (1.7)). Somit besagt die Bedingung (1.24), daß es zu $U \in \Xi$ ein $U_1 \in \Xi$ gibt mit $U^{-1} \subset U_1$, also mit $\prec_U^c \cup \prec_{U_1}$ (vgl. [4], (3.16)).

(f) \Rightarrow (h). Aus (f) folgt $\mathcal{R}_\Xi = \mathcal{R}_\Xi^{cc} \prec \mathcal{R}_\Xi^c$, also $\mathcal{R}_\Xi \sim \mathcal{R}_\Xi^c$, woraus sich nach [5], (8.107)

$$\mathcal{R}_\Xi^s \sim \mathcal{R}_\Xi \vee \mathcal{R}_\Xi^c \sim \mathcal{R}_\Xi$$

ergibt.

(h) \Rightarrow (c). Aus (h) folgt

$$\mathcal{R}_\Xi^c \sim \mathcal{R}_\Xi^{sc} = \mathcal{R}_\Xi^s \sim \mathcal{R}_\Xi,$$

und für $U \in \Xi$ ergibt sich aus [4], (1.12)

$$\varrho^{-1}(\prec_U^c) = \varrho^{-1}((\bigcup_{V \in U} \prec_V)^c) = \bigcup_{V \in U} \varrho^{-1}(\prec_V^c) = \bigcup_{V \in U} \prec_V^* = \prec_{U^*},$$

also die $(\mathcal{R}_\Xi^*, \mathcal{R}_\Xi^c)$ -Stetigkeit, d.h. die $(\mathcal{R}_\Xi^*, \mathcal{R}_\Xi)$ -Stetigkeit von ϱ .

Somit wurde (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (h) \Rightarrow (c) bewiesen. Ebenso beweist man (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (g) \Rightarrow (i) \Rightarrow (a). ■

(1.27) Eine gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} ist genau dann ϱ -stetig, wenn die Filterschar $\Xi = \Xi(\mathcal{R})$ den Bedingungen (1.16) und (1.24) genügt.

Beweis. Ist \mathcal{R} ϱ -stetig, so ist sie nach [3], (4.6) auch gleichgradig rechtsstetig, und Ξ erfüllt nach (1.15) die Bedingung (1.16). Aus (1.1) ergibt sich dann

$$(1.28) \quad \mathcal{R} \sim \mathcal{R}_\Xi^p \sim \mathcal{R}_\Xi^{*p}.$$

Somit ist ϱ $(\mathcal{R}_\Xi^p, \mathcal{R}_\Xi^{*p})$ -stetig, und Ξ erfüllt (1.24) wegen (1.23).

Umgekehrt folgt aus (1.16) nach (1.17) $\mathcal{R}_\Xi^p \sim \mathcal{R}_\Xi^{*p}$, und aus (1.24) folgt die $(\mathcal{R}_\Xi^p, \mathcal{R}_\Xi^{*p})$ -Stetigkeit, d.h. die $(\mathcal{R}_\Xi^p, \mathcal{R}_\Xi^p)$ -Stetigkeit von ϱ , welche Tatsache gemäß $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_\Xi^p$ mit der ϱ -Stetigkeit von \mathcal{R} gleichbedeutend ist. ■

(1.28) Eine gleichgradig linksstetige, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} ist genau dann ϱ -stetig, wenn

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_1^p \sim \mathcal{R}_2^p,$$

wobei \mathcal{R}_1 symmetrisch und linksbiperfekt, \mathcal{R}_2 symmetrisch und rechtsbiperfekt ist.

Beweis. Aus der ϱ -Stetigkeit von \mathcal{R} folgt (1.28) nach dem obigen Gedankengang, und $\Xi = \Xi(\mathcal{R})$ erfüllt (1.24), woraus sich nach (1.23)

$$\mathcal{R}_\varepsilon \sim \mathcal{R}_\varepsilon^s, \mathcal{R}_\varepsilon^* \sim \mathcal{R}_\varepsilon^{*s}$$

ergibt. Setzt man

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_\varepsilon^s, \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_\varepsilon^{*s},$$

so gilt einerseits

$$\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_\varepsilon, \mathcal{R}_2 \sim \mathcal{R}_\varepsilon^*$$

nach [4], (2.46), (3.4) und (3.5), andererseits

$$\mathcal{R}_1^s = \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2^s = \mathcal{R}_2$$

ebenfalls nach [4], (2.46).

Setzt man umgekehrt

$$(1.30) \quad \mathcal{R} \sim \mathcal{R}_1^p \sim \mathcal{R}_2^p$$

mit links- bzw. rechtsbiperfekten, symmetrischen Ordnungsstrukturen \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 voraus, so ist nach (1.1) und [4], (3.18)

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_\varepsilon^p, \mathcal{R}_1^p \sim \mathcal{R}_{\varepsilon_1}^p$$

mit

$$\Xi = \Xi(\mathcal{R}), \quad \Xi_1 = \Xi(\mathcal{R}_1^p)$$

und $\Xi \sim \Xi_1$. Daraus folgt ebenfalls nach [4], (3.18)

$$\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_{\varepsilon_1}$$

also

$$\mathcal{R}_{\varepsilon_1}^s \sim \mathcal{R}_{\varepsilon_1}.$$

Da \mathcal{R} nach (1.30) gleichgradig links- und rechtsstetig ist, muß Ξ der Bedingung (1.16) genügen, und aus (1.31) entnimmt man auf Grund von (1.23), daß Ξ_1 , d.h. auch $\Xi \sim \Xi_1$ (1.24) erfüllt. Somit ist (1.27) anwendbar um auf die ϱ -Stetigkeit von \mathcal{R} zu schließen. ■

Aus (1.20) und (1.29) ergibt sich mit Rücksicht auf [4], (3.18) und [3], (4.8):

(1.32) Eine perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} ist genau dann p -stetig und ϱ -stetig, wenn

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{S}_1^p \sim \mathcal{S}_2^p$$

ist, wobei \mathcal{S}_1 bzw. \mathcal{S}_2 eine links- bzw. rechtsbiperfekte, symmetrische syntopogene Struktur bezeichnet. ■

(1.33) Für eine Filterschar Ξ ist \mathcal{R}_Ξ genau dann ϱ -stetig, wenn Ξ den Bedingungen (1.22) und (1.24) genügt.

BEWEIS. Aus der ϱ -Stetigkeit von \mathcal{R}_Ξ folgt die ϱ -Stetigkeit von \mathcal{R}_Ξ^p , und demnach das Bestehen von (1.24) (vgl. (1.27)). Wird nun zu $U \in \Xi$ ein Filter $U_1 \in \Xi$ so bestimmt, daß aus $A^{-1} <_{U_1} B^{-1}$ immer $A <_{U_1} B$ folgt, und dann noch zu U_1 der Filter $U_2 \in \Xi$ gemäß (1.24) gewählt, so folgt aus $U \in U_1$, $A \subset E$

$$A <_{U_1} AU,$$

also

$$A^{-1} <_{U_1} U^{-1} A^{-1},$$

d.h.

$$A^{-1} U_1 \subset U^{-1} A^{-1}$$

mit einer geeigneten Menge $U_1 \in U_1$. Nun ist $U_1^{-1} \in U_2$, so daß

$$U_1^{-1} A \subset AU$$

das Bestehen von (1.22) (mit U_2 statt U_1) zeigt.

Umgekehrt folgt aus (1.24) und (1.22) die Gültigkeit der zu (1.22) dualen Bedingung

(1.34) zu $U \in \Xi$ gibt es ein $U_1 \in \Xi$ mit der Eigenschaft, daß gegebenen Mengen $U \in U$ und $A \subset E$ immer $U_1 \in U$ gehört mit $AU_1 \subset UA$.

In der Tat, wenn man zu $U \in \Xi$ den Filter $U_1 \in \Xi$ nach (1.24), zu U_1 den Filter $U_2 \in \Xi$ nach (1.22) und zu U_2 den Filter $U_3 \in \Xi$ wiederum nach (1.24) bestimmt, so folgt aus $U \in U$, $A \subset E$ zuerst $U^{-1} \in U_1$, dann die Existenz von $U_1 \in U_2$ mit $U_1 A^{-1} \subset A^{-1} U^{-1}$, d.h. $AU_1^{-1} \subset UA$, woraus sich das Bestehen von (1.34) ergibt (mit U_3 statt U_1 und $U_1^{-1} \in U_3$ statt U_1).

Dennach folgt aus der zu (1.21) dualen Aussage die Beziehung $\mathcal{R}_\Xi^* < \mathcal{R}_\Xi$. Da ϱ nach (1.23) $(\mathcal{R}_\Xi^*, \mathcal{R}_\Xi)$ -stetig ist, ist diese Abbildung erst recht $(\mathcal{R}_\Xi, \mathcal{R}_\Xi)$ -stetig (vgl. [5], (10.10)). ■

(1.35) Für eine gleichgradig linksstetige und ϱ -stetige, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} mit $\Xi = \Xi(\mathcal{R})$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{R}_Ξ ist ϱ -stetig,
- (b) \mathcal{R}_Ξ^* ist ϱ -stetig,
- (c) $\mathcal{R}_\Xi < \mathcal{R}_\Xi^*$,
- (d) $\mathcal{R}_\Xi^* < \mathcal{R}_\Xi$,
- (e) $\mathcal{R}_\Xi \sim \mathcal{R}_\Xi^*$,
- (f) Ξ erfüllt (1.22),
- (g) Ξ erfüllt (1.34).

BEWEIS. Aus der ϱ -Stetigkeit von \mathcal{R} folgt (1.24) nach (1.27). Demnach entnimmt man dem Beweise von (1.33) die Implikationen $(a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (a)$. Der dazu duale Gedankengang ergibt $(b) \Rightarrow (g) \Rightarrow (f) \Rightarrow (b)$. Aus (1.21) folgt $(c) \Rightarrow (f) \Rightarrow (c)$, und man sieht ähnlich $(d) \Rightarrow (g) \Rightarrow (d)$ ein. Aus (c) folgt daher (d), und diese beiden ergeben (e), während $(e) \Rightarrow (c)$ und $(e) \Rightarrow (d)$ trivial sind. ■

2. Gleichgradig linksstetige, biperfekte Ordnungsstrukturen

In [4] wurden in Zusammenhang mit den linksinvarianten, biperfekten Ordnungsstrukturen die gleichgradig linksstetigen, biperfekten Ordnungsstrukturen schon betrachtet. Unsere letzten Ergebnisse enthalten die dort besagten als Spezialfall und ermöglichen noch weitere Ergebnisse hinzuzufügen.

Ist nämlich \mathcal{R} eine gleichgradig linksstetige, biperfekte Ordnungsstruktur, so enthält für $\prec \in \mathcal{R}$ der Filter

$$(2.1) \quad \mathfrak{U}(\prec) = \{U : e \prec U\}$$

eine kleinste Menge

$$(2.2) \quad V(\prec) = \bigcap \{U : e \prec U\}$$

(vgl. [4], (1.3)), und $\mathfrak{U}(\prec)$ besteht aus allen Mengen $X \subset E$, die $V(\prec)$ enthalten. Um die Filterschar

$$(2.3) \quad \mathcal{E}(\mathcal{R}) = \{\mathfrak{U}(\prec) : \prec \in \mathcal{R}\}$$

zu bestimmen, braucht man also nur das Mengensystem

$$(2.4) \quad \mathfrak{B}(\mathcal{R}) = \{V(\prec) : \prec \in \mathcal{R}\}$$

zu kennen, das immer einen Raster bildet.

Für $e \in V \subset E$ ist umgekehrt

$$(2.5) \quad \mathfrak{U}_V = \{X : V \subset X \subset E\}$$

ein Filter, und wenn \mathfrak{B} einen Raster aus solchen Mengen V bezeichnet, so ist

$$(2.6) \quad \Xi_{\mathfrak{B}} = \{\mathfrak{U}_V : V \in \mathfrak{B}\}$$

eine Filterschar. Es gilt nach [4], (1.4)

$$(2.7) \quad \prec_{\mathfrak{U}_V} = \bigcup_{X \in \mathfrak{U}_V} \prec_X \prec_V,$$

so daß

$$(2.8) \quad \mathcal{R}_{\prec_V} = \{\prec_V : V \in \mathfrak{B}\} = \mathcal{R}_{\mathfrak{B}}$$

ist.

Der Satz [4], (1.21) ist also tatsächlich in (1.1) enthalten. Daraus und aus (1.9) erhält man [4], (1.15) und (1.22), da die Bedingung (1.10) für eine Filterschar von der Gestalt (2.6) in [4], (1.16) übergeht. Aus (1.14) und (1.15) ergibt sich [4], (1.23) mit den aus (1.12) bzw. (1.16) entstehenden Bedingungen [4], (1.24) bzw. [4], (1.25). Unter Heranziehung von (1.17) und mit Rücksicht auf (2.8) kann man noch [4], (1.26) erhalten.

Aus (1.18) erhält man weiterhin [4], (1.27).

Aus (1.23) ergibt sich [4], (1.32), ebenso folgt [4], (1.34) aus (1.27) und (1.28). Endlich folgt aus (1.32) der Satz [4], (1.36).

3. Einfache, linksinvariante, perfekte Ordnungsstrukturen

Es sei nun \prec eine perfekte topogene Ordnung, d.h. $\mathcal{P} = \{\prec\}$ eine perfekte Ordnungsstruktur auf E . Für \mathcal{P} sind die Bedingungen linksstetig, gleichgradig linksstetig und linksinvariant zu sein offenbar gleichbedeutend (vgl. [3], (4.2)). Die Filterschar $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ besteht jetzt aus dem einzigen Filter $\mathfrak{U}(\prec)$, $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}(\prec)}$ ist eine linksinvariante biperfekte Ordnungsstruktur mit

$$(3.1) \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{F}(\mathcal{P})} = \{\prec_{\mathfrak{U}(\prec)}\} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}(\prec)}^l$$

und

$$(3.2) \quad \mathcal{P} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}(\prec)}^{lp}.$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{U}(\prec) = \mathfrak{U}(\mathcal{P}),$$

so kann man behaupten:

(3.3) Ist $\mathcal{P} = \{\prec\}$ eine einfache, linksinvariante, perfekte Ordnungsstruktur, so gibt es eine einzige einfache, linksbiperfekte Ordnungsstruktur $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{P})$ mit

$$(3.4) \quad \mathcal{P} = \mathcal{B}^p,$$

und eine, bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte gleichgradig linksstetige, biperfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} mit

$$(3.5) \quad \mathcal{P} = \mathcal{R}^w.$$

Es gilt

$$(3.6) \quad \mathcal{B} = \mathcal{R}^l,$$

und man kann z. B.

$$(3.7) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}(\mathcal{P})}$$

wählen, wobei $\mathfrak{U}(\mathcal{D})$ den Filter

$$\mathfrak{U}(\mathcal{D}) = \{U : e < U\}$$

bezeichnet. Ist umgekehrt ein beliebiger Filter \mathfrak{U} aus e enthaltenden Mengen vorgeschrieben, so gibt es eine eindeutig bestimmte linksinvariante, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{D} mit $\mathfrak{U}(\mathcal{D}) = \mathfrak{U}$.

BEWEIS. Aus [4], (3.16) ergeben sich die Existenz und die Eindeutigkeit von \mathcal{B} , sowie die Existenz von \mathcal{R} und die Möglichkeit der Wahl (3.7), weiterhin die Gleichung

$$(3.8) \quad \mathcal{B} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^t(\mathcal{D}).$$

Ist nun \mathcal{R} eine gleichgradig linksstetige und biperfekte Ordnungsstruktur mit (3.5), so gilt nach [4], (1.21) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_B$ mit einem Raster B , der aus e enthaltenden Mengen besteht. Bezeichnet \mathfrak{U} den von B erzeugten Filter, so ist $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ nach [4], (1.6), folglich

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{tp} = \mathcal{R}^{tp} = \mathcal{D},$$

und $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathcal{D})$ muß nach [4], (3.16) bestehen, woraus sich die behauptete Eindeutigkeit von \mathcal{R} ergibt. Mit (3.8) besteht dann auch (3.6).

Ist nun \mathfrak{U} ein beliebiger Filter mit $e \in U$ für $U \in \mathfrak{U}$, so sei

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^t = (\prec)$$

gesetzt. Nach [4], (1.6) ist $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ linksinvariant, also \mathcal{D} nach [3], (5.14) und (5.17) ebenfalls linksinvariant, und $e < U$ ist offenbar mit $U \in \mathfrak{U}$ gleichbedeutend. Aus (3.5) und (3.7) folgt, daß die linksinvariante, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{D} durch den Filter $\mathfrak{U}(\mathcal{D})$ tatsächlich eindeutig bestimmt ist. ■

Für den Rest von 3 seien folgende Bezeichnungen festgelegt. \mathcal{D} ist eine einfache, linksinvariante, perfekte Ordnungsstruktur, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathcal{D})$ bezeichnet den zu \mathcal{D} gehörenden Filter, \mathcal{R} und \mathcal{R}^* sind biperfekte Ordnungsstrukturen mit

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}, \mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^*,$$

so daß also \mathcal{R} gleichgradig linksstetig, \mathcal{R}^* gleichgradig rechtsstetig ist. Ferner setzen wir

$$\mathcal{B} = \{\prec_0\} = \mathcal{B}(\mathcal{D}) = \mathcal{R}^t = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^t,$$

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*(\mathcal{D}) = \{\prec_0^*\} = \mathcal{R}^{*t} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{*t}.$$

\mathcal{B} ist also einfach und linksbiperfekt, \mathcal{B}^* aber einfach und rechtsbiperfekt, schließlich

$$\mathcal{D} = \{\prec_0^p\} = \mathcal{B}^p = \mathcal{R}^{tp} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{tp}$$

Man sieht aus [4], (3.16), daß \mathcal{B} hier eigentlich eine beliebige linksbiperfekte, einfache Ordnungsstruktur sein kann, denn eine solche Ordnungsstruktur hat immer die Gestalt $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{P})$ mit der einfachen, linksinvarianten, perfekten Ordnungsstruktur $\mathcal{P} = \mathcal{B}^p$. Ebenso darf \mathfrak{U} einen beliebigen Filter aus e enthaltenden Mengen bezeichnen, denn

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathcal{P}) \text{ mit } \mathcal{P} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{tp},$$

und \mathcal{P} ist wiederum einfach, linksinvariant und perfekt. Ist schließlich \mathcal{R} eine beliebige gleichgradig linksstetige, biperfekte Ordnungsstruktur, so ist \mathcal{R} nach [4], (1.21) einer linksinvarianten, biperfekten Ordnungsstruktur äquivalent, so daß $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ mit einem Filter \mathfrak{U} aus e enthaltenden Mengen, als Folge von [4], (1.6).

Mit diesen Voraussetzungen gelten nun folgende Sätze:

(3.9) *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- (a) \mathcal{P} ist idempotent,
- (b) \mathfrak{U} genügt der Bedingung

(3.10) zu $U \in \mathfrak{U}$ gibt es $U_1 \in \mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft, daß aus $x \in U_1$ immer $xU(x) \subset U$ folgt mit einer geeigneten Menge $U(x) \in \mathfrak{U}$,

- (c) zu $< \in \mathcal{R}$ gibt es $<_1 \in \mathcal{R}$ mit $< \subset <_1 <_0^p$,
- (d) $<_0 \subset <_1 <_0^p$.

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b) ist Folge von (1.7), da jetzt Ξ aus dem einzigen Filter \mathfrak{U} besteht.

(b) \Rightarrow (c). Zu $< \in \mathcal{R}$ gibt es eine Menge $U \in \mathfrak{U}$ mit $< \subset <_U$. Ist $U_1 \in \mathfrak{U}$ zu U im Sinne von (3.10) gewählt, so folgt aus $A < B$ die Beziehung $AU \subset B$, und mit der Bezeichnung $C = AU_1$ noch $A <_{U_1} C$, folglich $A <_1 C$. Ferner hat man für $x \in C$ eine Darstellung $x = au$ mit $a \in A$, $u \in U_1$, also $uU(u) \subset U$, $U(u) \in \mathfrak{U}$, und $xU(u) \subset aU \subset B$, so daß $x <_{U(u)} B$ und erst recht $x <_0 B$ für $x \in C$ besteht. Daraus folgt $C <_0^p B$, und tatsächlich $< \subset <_1 <_0^p$.

(c) \Rightarrow (d). Aus $A <_0 B$ folgt $A < B$ mit einer geeigneten Ordnung $< \in \mathcal{R}$, also $A <_1 C <_0^p B$ mit $<_1 \in \mathcal{R}$ und erst recht $A <_0 C <_0^p B$.

(d) \Rightarrow (a) ist Folge von (1.7), da die Aussage (d) offenbar mit (1.7), (c) identisch ist. ■

(3.11) *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- (a) \mathcal{B} ist idempotent,
- (b) \mathfrak{U} erfüllt die Bedingung

(3.12) zu $U \in \mathfrak{U}$ gibt es $U_1 \in \mathfrak{U}$ mit $U_1^2 \subset U$,

- (c) \mathcal{R} ist idempotent.

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b) ergibt sich aus (1.9).

(b) \Rightarrow (c). Aus (3.12) folgt nach [4], (1.15) die Idempotenz von $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$, also von \mathcal{R} .

(c) \Rightarrow (a) ist Folge der Beziehung $\mathcal{B} = \mathcal{R}^t$. ■

(3.13) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{D} ist rechtsinvariant,
- (b) \mathfrak{U} genügt der Bedingung

(3.14) für $U \in \mathfrak{U}$ und $x \in E$ ist $U_1 = xUx^{-1} \in \mathfrak{U}$,

- (c) \mathcal{R} ist rechtsstetig,
- (d) \mathcal{B} ist rechtsinvariant,
- (e) $\mathcal{D} < \mathcal{B}^{\text{op}}$
- (f) $\mathcal{B}^{\text{op}} < \mathcal{D}$
- (g) $\mathcal{D} = \mathcal{B}^{\text{op}}$.

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b) ergibt sich aus (1.15), da jetzt (1.16) in (3.14) übergeht.

(b) \Rightarrow (c) folgt aus [4], (1.23), da (3.14) mit [4], (1.24) für $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}$ identisch ist, also die Rechtsstetigkeit von $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ und von $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ impliziert.

(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a) folgt offenbar aus $\mathcal{B} = \mathcal{R}^t$, $\mathcal{D} = \mathcal{B}^{\text{op}}$.

(a) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (a) ist in (1.17) enthalten. ■

(3.15) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{D} ist p -stetig,
- (b) \mathfrak{U} genügt den Bedingungen (3.12) und (3.14).
- (c) \mathcal{R} ist idempotent und rechtsstetig,
- (d) \mathcal{B} ist idempotent und rechtsinvariant,
- (e) $\mathcal{D} = \mathcal{S}_1^{\text{op}} = \mathcal{S}_2^{\text{op}}$, wobei \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2) eine linksinvariante (rechtsinvariante), biperfekte syntopogene Struktur bezeichnet,

(f) $\mathcal{D} = \mathcal{S}_1^{\text{op}} = \mathcal{S}_2^{\text{op}}$, wobei \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2) eine gleichgradig linksstetige (rechtsstetige), biperfekte syntopogene Struktur bezeichnet,

(g) $\mathcal{D} = \mathcal{T}_1^{\text{op}} = \mathcal{T}_2^{\text{op}}$, wobei \mathcal{T}_1 (\mathcal{T}_2) eine linksbiperfekte (rechtsbiperfekte) topogene Struktur bezeichnet.

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b) folgt aus (1.18), da (1.10) bzw. (1.16) jetzt mit (3.12) bzw. (3.14) identisch ist.

(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) ergibt sich aus (3.11) und (3.13).

(d) \Rightarrow (a) ist wiederum Folge von (1.18).

(a) \Rightarrow (e). Nach (c) kann man $\mathcal{S}_1 = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ setzen, und $\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^*$ ist ebenso geeignet, da die p -stetige Ordnungsstruktur \mathcal{D} nach [3], (4.8) auch rechtsinvariant ist, so daß man auch die zu (c) duale Behauptung anwenden darf.

(e) \Rightarrow (f) folgt offenbar aus [3], (4.1).

(f) \Rightarrow (g). Setzt man $\mathcal{T}_1 = \mathcal{S}_1^t$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{S}_2^t$, so ist \mathcal{T}_1 linksbiperfekt, da nach (3.3) $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$, also $\mathcal{T}_1 = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^t = \mathcal{B}$ sein muß. Ebenso folgt $\mathcal{T}_2 = \mathcal{B}^*$, da $\mathcal{D} = \mathcal{S}_2^{\text{op}}$ auch rechtsinvariant ist, woraus die Rechtsbiperfektheit von \mathcal{T}_2 folgt.

(g) \Rightarrow (a) ergibt sich aus (1.20). ■

BEMERKUNG. Das Beispiel 4 in [3], S. 9 zeigt, daß die Bedingung (3.14) in (3.15), (b) wesentlich ist. In der Tat, die Topologie $(\mathcal{T}_0 \times \mathcal{T}_0^{\text{op}})$ im erwähnten Beispiel ist linksinvariant, aber nicht rechtsstetig und erst recht nicht p -stetig, und doch erfüllt sie (3.12), denn aus $0 < \varepsilon < 3$ folgt

$$\begin{aligned} \left[\left[1, 1 + \frac{\varepsilon}{3} \right] \times \left[0, \frac{\varepsilon}{3} \right] \right]^2 &\subset \left[1, \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} \right)^2 \right] \times \left[0, \left(1 + \frac{\varepsilon}{3} \right) \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \right] \subset \\ &\subset [1, 1 + \varepsilon] \times [0, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Dagegen folgt aus der Translationsinvarianz von \mathcal{P} und aus (3.12) nach (3.13) das Bestehen von (3.14) und die p -Stetigkeit von \mathcal{P} .

(3.16) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) $\mathcal{B} < \mathcal{B}^*$,
- (b) \mathcal{U} erfüllt die Bedingung

(3.17) zu $U \in \mathcal{U}$ und $A \subset E$ gibt es $U_1 \in \mathcal{U}$ mit $U_1 A \subset AU$,

- (c) \mathcal{B}^* ist linksperfekt.

BEWEIS. Alles folgt aus (1.21); die dortigen Aussagen (a), (b), (c) entsprechen genau den hiesigen. ■

(3.18) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) $\mathcal{R} < \mathcal{R}^*$,
- (b) $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}$,
- (c) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^*$,

(d) \mathcal{U} erfüllt die Bedingung

(3.19) zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es $U_1 \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \subset xUx^{-1}$ für jedes $x \in E$,

(e) \mathcal{R} ist gleichgradig rechtsstetig,

(f) \mathcal{R}^* ist gleichgradig linksstetig,

(g) $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1^p$ mit einer translationsinvarianten, biprofekten Ordnungsstruktur \mathcal{R}_1 ,

(h) Es gibt einen Raster $\mathfrak{V} \sim \mathcal{U}$ mit $xVx^{-1} = V$ für $x \in E$, $V \in \mathfrak{V}$.

BEWEIS. (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) folgt aus [4], (1.26) und aus dem dazu dualen Satz.

(e) \Rightarrow (g). Man kann $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}^{ab}$ setzen, denn $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_1$ nach [3], (5.14), und \mathcal{R}_1 ist nach [3], (5.21) und (3.17) translationsinvariant.

(g) \Rightarrow (h) folgt aus [4], (1.1) und (1.9).

(h) \Rightarrow (d) ist evident. ■

(3.20) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) \mathcal{U} erfüllt die Bedingung

(3.21) aus $U \in \mathcal{U}$ folgt $U^{-1} \in \mathcal{U}$,

- (b) ϱ ist $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^*)$ -stetig,
- (c) ϱ ist $(\mathcal{R}^*, \mathcal{R})$ -stetig,
- (d) ϱ ist $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ -stetig,
- (e) ϱ ist $(\mathcal{B}^*, \mathcal{B})$ -stetig,
- (f) ϱ ist $(\mathcal{D}, \mathcal{D}^p)$ -stetig,
- (g) ϱ ist $(\mathcal{D}^p, \mathcal{D})$ -stetig,
- (h) $\mathcal{R} < \mathcal{R}^c$,
- (i) $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}^{*c}$,
- (j) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s$,
- (k) $\mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}^{*s}$,
- (l) $\mathcal{B} < \mathcal{B}^c$,

- (m) $\mathcal{B}^* \triangleleft \mathcal{B}^{*c}$,
 (n) $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s$,
 (o) $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{*s}$,
 (p) $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1^{lp}$, wobei \mathcal{R}_1 eine linksinvariante, symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur ist,
 (q) Es gibt einen Raster $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{U}$ mit $V^{-1} = V$ für $V \in \mathfrak{B}$.

BEWEIS. Mit Rücksicht auf $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$, $\mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^*$ erhält man aus [4], (1.32)

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (j) \Rightarrow (k) \Rightarrow (a).$$

(j) \Rightarrow (h) ist evident, und man erhält aus $\mathcal{R} \triangleleft \mathcal{R}^c$ offenbar $\mathcal{R}^c \triangleleft \mathcal{R}^{cc} = \mathcal{R}$, also $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^c$, somit

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R} \vee \mathcal{R}^c \sim \mathcal{R}^s$$

(vgl. [5], (8.107)). D.h. (h) \Rightarrow (j); ebenso ergibt sich (k) \Rightarrow (i) \Rightarrow (k).

Aus (1.23) folgt nun

$$(a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (l) \Rightarrow (m) \Rightarrow (n) \Rightarrow (o) \Rightarrow (a).$$

(j) \Rightarrow (p). Aus $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^s$ folgt

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{U}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^b \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{sb}, \quad \mathcal{D} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{sbip},$$

und $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^{sb}$ ist symmetrisch, biperfekt und mit $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$ auch linksinvariant (vgl. [3], (5.17)).

(p) \Rightarrow (j). Nach (3.3) ist $\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}$, woraus $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}}^s$ folgt.

(a) \Rightarrow (q). Man kann offenbar

$$\mathfrak{B} = \{U \cap U^{-1} : U \in \mathfrak{U}\}$$

setzen.

(q) \Rightarrow (a) ist evident. ■

(3.22) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{D} ist ϱ -stetig,
- (b) \mathfrak{U} erfüllt (3.14) und (3.21),
- (c) $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1^{lp} = \mathcal{R}_2^{lp}$, wobei $\mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2)$ eine linksinvariante (rechtsinvariante), symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur ist,
- (d) $\mathcal{D} = \mathcal{B}_1^p = \mathcal{B}_2^p$, wobei $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2)$ eine linksbiperfekte (rechtsbiperfekte), symmetrische, einfache Ordnungsstruktur ist.

BEWEIS. (a) \Leftrightarrow (b) ergibt sich aus (1.27).

(b) \Rightarrow (c). Aus (3.21) folgt nach (3.20) die Darstellung $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1^{lp}$ mit den unter (c) angegebenen Eigenschaften von \mathcal{R}_1 . Da aus (3.14) nach (3.13) die Rechtsinvarianz von \mathcal{D} folgt, ist auch eine duale Darstellung $\mathcal{D} = \mathcal{R}_2^{lp}$ möglich.

(c) \Rightarrow (d). Es genügt $\mathcal{B}_1 = \mathcal{R}_1^t$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{R}_2^t$ zu setzen (vgl. [4], (3.10)).

(d) \Rightarrow (b). Die in (d) vorausgesetzte Darstellung von \mathcal{D} zeigt, daß \mathcal{D} translationsinvariant ist, und dann folgt aus (3.3), daß $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ und daher $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s$ sein muß. (3.13) und (3.20) ergeben also das Bestehen von (b). ■

(3.23) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{B} ist ϱ -stetig,
- (b) \mathcal{B}^* ist ϱ -stetig,
- (c) \mathfrak{U} erfüllt (3.17) und (3.21),
- (d) $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s < \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{ss}$,
- (e) $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{ss} < \mathcal{B} = \mathcal{B}^s$,
- (f) $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s = \mathcal{B}^*$.

BEWEIS. Aus (1.33) folgt (a) \Leftrightarrow (c).

(a) \Rightarrow (b). Aus der ϱ -Stetigkeit von \mathcal{B} folgt dieselbe Eigenschaft von \mathcal{P} , so daß auch (b) besteht (vgl. (1.35)).

(b) \Rightarrow (c). Die ϱ -Stetigkeit von \mathcal{B}^* bedeutet, daß

$$\varrho^{-1}(\prec_0^*) \subseteq \prec_0^*$$

ist, also

$$\prec_0^* = \varrho^{-1}(\varrho^{-1}(\prec_0^*)) \subseteq \varrho^{-1}(\prec_0^*)$$

und $\varrho^{-1}(\prec_0^*) = \prec_0^*$. Aus der Rechtshiperfektheit von \prec_0^* folgt also nach [4], (2.57), daß \prec_0^* auch linksbiperfekt ist. Nach (3.16) ergibt sich daraus (3.17). Da nach dem zu (3.3) dualen Satz $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathcal{B}^{sp})$ ist, folgt aus (b) auch (3.21).

(c) \Rightarrow (d) ergibt sich aus (3.16) und (3.20).

(c) \Rightarrow (f). Aus (c) folgt die ϱ -Stetigkeit von \mathcal{P} über (a), und dann ergibt (1.35) das Bestehen von $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, während $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s$ aus (3.20) folgt.

(f) \Rightarrow (d) ist evident.

Bisher wurde unter anderem (a) \Rightarrow (d) bewiesen. Dazu dual ist (b) \Rightarrow (e). ■

(3.24) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{R} ist ϱ -stetig,
- (b) \mathcal{R}^* ist ϱ -stetig,
- (c) \mathfrak{U} erfüllt (3.19) und (3.21),
- (d) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s < \mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}^{ss}$,
- (e) $\mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}^{ss} < \mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s$,
- (f) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s \sim \mathcal{R}^*$,

(g) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^{sp}$ mit einer translationsinvarianten, symmetrischen, biperfekten Ordnungsstruktur \mathcal{R}_1 ,

(h) Es gibt einen Raster $\mathfrak{V} \sim \mathfrak{U}$ mit $V^{-1} = V$, $xVx^{-1} = V$ für $V \in \mathfrak{V}$, $x \in E$.

BEWEIS. Aus [4], (1.34) folgt (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c). Aus (3.18) und (3.20) ergibt sich (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f).

(f) \Rightarrow (g). Die Beziehung $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s \sim \mathcal{R}^*$ hat $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{nsb}$ zur Folge, so daß $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}^{nsb}$ gesetzt werden kann (vgl. [3], (5.21) und (5.17)).

(g) \Rightarrow (f) folgt aus (3.3).

(c) \Rightarrow (h). Aus (c) folgt nach (3.18) die Existenz eines Rasters $\mathfrak{V}_1 \sim \mathfrak{U}$ mit $xV_1x^{-1} = V_1$ für $V_1 \in \mathfrak{V}_1$, $x \in E$. Dann setzt man

$$\mathfrak{V} = \{V_1 \cap V_1^{-1} : V_1 \in \mathfrak{V}_1\}.$$

(h) \Rightarrow (c) ist evident. ■

(3.25) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) \mathcal{P} ist idempotent und ϱ -stetig,

(b) II erfüllt (3.10), (3.14) und (3.21),

(c) $\mathcal{P} = \mathcal{R}_1^p = \mathcal{R}_2^p$, wobei \mathcal{R}_1 (\mathcal{R}_2) eine linksinvariante (rechtsinvariante), symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur ist mit der Eigenschaft, daß aus $<_i \in \mathcal{R}_i$ ($i = 1, 2$) die Existenz von $<'_i \in \mathcal{R}_i$ folgt mit $<_1 \subset <'_1 <_0^p$ bzw. $<_2 \subset <'_2 <_0^{*p}$,

(d) $\mathcal{P} = \mathcal{B}_1^p = \mathcal{B}_2^p$, wobei \mathcal{B}_1 (\mathcal{B}_2) eine linksbiperfekte (rechtsbiperfekte) symmetrische, einfache Ordnungsstruktur ist mit der Eigenschaft $<_i \subset <_i <$ für $\{<_i\} = \mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2$).

BEWEIS. (a) \Leftrightarrow (b) ergibt sich aus (3.9) und (3.22).

(a) \Rightarrow (c). Die Linksinvarianz und die ϱ -Stetigkeit von \mathcal{P} haben die Translationsstetigkeit von \mathcal{P} zur Folge (vgl. [3], (4.5)), so daß die nach (3.22), (c) gewählten Ordnungsstrukturen \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 die Eigenschaft (3.9), (c) bzw. die dazu duale Eigenschaft besitzen.

(c) \Rightarrow (a) folgt unmittelbar aus (3.22) und (3.9).

Ähnlich beweist man (a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a). ■

(3.26) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) \mathcal{P} ist p -stetig und ϱ -stetig,

(b) II erfüllt (3.12), (3.14) und (3.21),

(c) $\mathcal{P} = \mathcal{S}_1^p = \mathcal{S}_2^p$, wobei \mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2) eine linksinvariante (rechtsinvariante), symmetrische, biperfekte syntopogene Struktur ist,

(d) $\mathcal{P} = \mathcal{T}_1^p = \mathcal{T}_2^p$, wobei \mathcal{T}_1 (\mathcal{T}_2) eine linksbiperfekte (rechtsbiperfekte), symmetrische topogene Struktur ist,

(e) \mathcal{R} ist idempotent und rechtsstetig und erfüllt $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s$,

(f) \mathcal{B} ist idempotent, symmetrisch und rechtsinvariant,

(g) \mathcal{R} ist idempotent und \mathcal{P} ist ϱ -stetig,

(h) \mathcal{B} ist idempotent und \mathcal{P} ist ϱ -stetig,

(i) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s$ und \mathcal{P} ist p -stetig,

(j) \mathcal{B} ist symmetrisch und \mathcal{P} ist p -stetig.

BEWEIS. (a) \Leftrightarrow (b) ist Folge von (3.15) und (3.22).

(a) \Rightarrow (c). Die nach (3.22), (c) existierenden Ordnungsstrukturen \mathcal{R}_1 bzw. \mathcal{R}_2 sind nach (3.3) mit den syntopogenen Strukturen \mathcal{S}_1 bzw. \mathcal{S}_2 von (3.15), (e) äquivalent, also idempotent.

(c) \Rightarrow (d) ergibt sich mit $\mathcal{T}_i = \mathcal{S}_i^p$ ($i = 1, 2$),

(d) \Rightarrow (a) folgt aus (3.15) und (3.22).

(a) \Rightarrow (e) ist Folge von (3.15) und der Beziehung $\mathcal{R} \sim \mathcal{S}_1$ (vgl. (3.3)) für die Struktur \mathcal{S}_1 in (c).

(e) \Rightarrow (f) ist evident, da $\mathcal{B} = \mathcal{R}^s$ ist.

(f) \Rightarrow (a). Nach (3.15) hat (f) die p -Stetigkeit von \mathcal{P} zur Folge, nach (3.20) aber die $(\mathcal{P}, \mathcal{B}^{*p})$ -Stetigkeit von ϱ . Die p -stetige Struktur \mathcal{P} ist rechtsinvariant (vgl. [3], (4.8)), also gilt $\mathcal{P} = \mathcal{B}^{*p}$ nach dem zu (3.3) dualen Satz, woraus sich die ϱ -Stetigkeit von \mathcal{P} ergibt.

(a) \Rightarrow (g) folgt aus (3.15).

(g) \Rightarrow (h) ist trivial.

(h) \Rightarrow (a). Aus der ϱ -Stetigkeit von \mathcal{P} folgt ihre Rechtsinvarianz (vgl.

[3], (4.7)), also \mathcal{B} ist nach (3.13) ebenfalls rechtsinvariant, woraus nach (3.15) die p -Stetigkeit von \mathcal{P} folgt.

(e) \Rightarrow (i) ergibt sich aus (3.15).

(i) \Rightarrow (j) ist trivial.

(j) \Rightarrow (f) folgt aus (3.15). ■

(3.27) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) \mathcal{R} ist p -stetig,

(b) \mathcal{R} ist idempotent und gleichgradig rechtsstetig,

(c) \mathcal{R} erfüllt (3.12) und (3.19),

(d) \mathcal{R}^* ist p -stetig,

(e) $\mathcal{P} = \mathcal{S}^p$ mit einer translationsinvarianten, biperfekten syntopogenen Struktur \mathcal{S} .

BEWEIS. (a) \Leftrightarrow (b) ist in [4], (1.27) enthalten.

(b) \Leftrightarrow (c) folgt aus (3.11) und (3.18).

(c) \Leftrightarrow (d) ist zu (c) \Leftrightarrow (a) dual, da (3.12) und (3.19) zu sich selbst dual sind.

(c) \Rightarrow (e). Nach (3.18) folgt aus (3.19) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^*$, woraus sich nach [3], (5.21) auch $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{a,b}$ ergibt. Nach [3], (5.20) und (5.17) ist $\mathcal{R}^{a,b}$ translationsinvariant und biperfekt, und mit \mathcal{R} auch idempotent (vgl. (3.11)).

(e) \Rightarrow (b) folgt aus der Tatsache, daß $\mathcal{R} \sim \mathcal{S}$ nach (3.3) besteht. §

(3.28) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) \mathcal{R} ist p -stetig und q -stetig,

(b) \mathcal{R} ist idempotent und q -stetig,

(c) \mathcal{R} erfüllt (3.12), (3.19) und (3.21),

(d) \mathcal{R} ist idempotent und erfüllt $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}^{a,b}$,

(e) \mathcal{R}^* ist p -stetig und q -stetig,

(f) $\mathcal{P} = \mathcal{S}^p$ mit einer translationsinvarianten, symmetrischen, biperfekten syntopogenen Struktur \mathcal{S} .

(g) \mathcal{P} ist p -stetig und q -stetig, und es gibt einen Raster \mathfrak{V} auf V mit $xVx^{-1} = V$ für $V \in \mathfrak{V}$, $x \in E$.

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b) folgt aus (3.27).

(b) \Rightarrow (a) ergibt sich ebenfalls aus (3.27) mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die q -Stetigkeit von \mathcal{R} die gleichgradige Rechtsstetigkeit von \mathcal{R} mit sich bringt (vgl. [3], (4.6)).

(a) \Leftrightarrow (c) ist in (3.24) und (3.27) enthalten.

(b) \Rightarrow (d) folgt aus (3.24).

(a) \Rightarrow (e) ergibt sich aus (3.24) und (3.27).

(a) \Rightarrow (f) ist Folge von (3.24), (3.27) und (3.3), da $\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{S}$ für die Ordnungsstruktur \mathcal{R}_1 in (3.24), (g) und die syntopogene Struktur \mathcal{S} in (3.27), (e) notwendigerweise bestehen muß, so daß \mathcal{R}_1 auch idempotent ist.

(f) \Rightarrow (d). Nach (3.3) ist $\mathcal{R} \sim \mathcal{S}$, also \mathcal{R} ist idempotent, und $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^* \sim \mathcal{R}^*$ nach (3.24).

(f) und (c) \Rightarrow (g). Die erste Behauptung von (g) folgt aus (f) nach (3.26), und die zweite aus (3.19) nach (3.18).

(g) \Rightarrow (c) folgt ebenfalls aus (3.26) und (3.18). ■²

² Für (f) \Leftrightarrow (g) (in etwas schwächerer Form) vgl. [6], sowie [7], Theorem 5.

(3.29) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) \mathcal{B} ist idempotent und ϱ -invariant,
- (b) \mathcal{U} erfüllt (3.12), (3.17) und (3.21),
- (c) \mathcal{B}^* ist idempotent und ϱ -invariant,
- (d) $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s = \mathcal{B}^*$ ist idempotent,
- (e) $\mathcal{P} = \mathcal{C}^\rho$ mit einer translationsbiperfekten, symmetrischen topogenen Struktur \mathcal{C} .

Beweis. (a) \Leftrightarrow (b) ist Folge von (3.11) und (3.23).

(a) \Leftrightarrow (d) ist in (3.23) enthalten,

(c) \Leftrightarrow (d) ist ebenfalls Folge von (3.23).

(d) \Rightarrow (e) ergibt sich mit $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

(e) \Rightarrow (d). Aus (e) ergibt sich, daß \mathcal{P} translationsinvariant ist (vgl. [4], (2.3) und [3], (5.14) und (5.17)), woraus $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* = \mathcal{C}$ nach (3.3) folgt. ■

4. Anwendungen auf klassische Strukturen

Es ist noch der Mühe wert, einige der obigen Ergebnisse auch in der Sprache der assoziierten klassischen Topologien, Nachbarschaftsstrukturen und quasi-uniformen Strukturen zu formulieren.

Eine klassische Topologie \mathfrak{G} auf der Gruppe E wird *linksinvariant*, *rechtsinvariant* bzw. *ϱ -invariant* genannt, wenn alle Linkstranslationen σ_e , Rechtstranslationen δ_e bzw. die Abbildung ϱ stetige Abbildungen von $[E, \mathfrak{G}]$ in sich selbst sind. Gleichbedeutend damit ist, daß die genannten Abbildungen Homöomorphismen von $[E, \mathfrak{G}]$ auf sich selbst sind.

$[E, \mathfrak{G}]$ heißt eine *paratopologische Gruppe*³, wenn $\pi : E \times E \rightarrow E$ eine stetige Abbildung der mit der klassischen Produkttopologie von \mathfrak{G} mit sich selbst versehenen Menge $E \times E$ in $[E, \mathfrak{G}]$ ist, d.h. wenn die zu \mathfrak{G} assoziierte Topologie ρ -stetig ist. $[E, \mathfrak{G}]$ heißt eine *halbtopologische Gruppe*⁴, wenn \mathfrak{G} links-, rechts- und ϱ -invariant ist. Bekanntlich heißt eine gleichzeitig paratopologische und halbtopologische Gruppe eine *topologische Gruppe*.

Ähnlich wird die Nachbarschaftsstruktur δ auf E *linksinvariant*, *rechtsinvariant* oder *ϱ -invariant* genannt, sobald die betreffenden Abbildungen δ -stetig sind, was damit gleichwertig ist, daß sie Äquimorphismen von $[E, \delta]$ auf sich selbst darstellen. Die Nachbarschaftsstruktur δ wird *linksperfekt* (*rechtsperfekt*) heißen, wenn die zu δ assoziierte symmetrische topogene Struktur \mathcal{C} linksperfekt (rechtsperfekt), d.h. linksbiperfekt (rechtsbiperfekt) ist (vgl. [4], (2.5)). Nach [4], (2.6) ist diese Eigenschaft von δ damit gleichbedeutend, daß aus $A \delta B$ und $C \subset E$ immer

$$(4.1) \quad \bigcup_{c \in C} cA\bar{\delta} \cap cB \quad (\bigcup_{c \in C} Ac\bar{\delta} \cap Bc)$$

folgt.

³ Vgl. [1], S. 100, Exercice 4).

⁴ Vgl. [1], S. 100, Exercice 2).

Die quasi-uniforme Struktur \mathcal{U} heißt *linksstetig* (*rechtsstetig*) bzw. *ρ -stetig*, wenn alle Linkstranslationen σ_e (Rechtstranslationen δ_e) bzw. die Abbildung ϱ gleichmäßig stetige Abbildungen von $[E, \mathcal{U}]$ in sich selbst sind, d.h. Isomorphismen von $[E, \mathcal{U}]$ auf sich selbst sind, \mathcal{U} heißt *linksinvariant* (*rechtsinvariant*) bzw. *ϱ -invariant*, wenn aus $U \in \mathcal{U}, e \in E$ und xUy immer $exUey$ ($xeUyc$) bzw. $x^{-1}Uy^{-1}$ folgt. \mathcal{U} wird *multiplikationsstetig* genannt, wenn π eine gleichmäßig stetige Abbildung der mit der Produktstruktur von \mathcal{U} mit sich selbst versehenen Menge $E \times E$ in $[E, \mathcal{U}]$ ist, d.h. wenn die assoziierte biperfekte syntopogene Struktur P -stetig ist.⁵

Offenbar sind die anderen genannten Eigenschaften mit den entsprechenden Eigenschaften der assoziierten syntopogenen Strukturen gleichbedeutend.

Aus (3.3) und (3.9) erhält man nun leicht:

(4.2) Ist \mathfrak{G} eine linksinvariante klassische Topologie, so genügt der Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e der Bedingung (3.10). Ist umgekehrt \mathfrak{U} ein Filter mit $e \in U$ für $U \in \mathfrak{U}$ und mit der Eigenschaft (3.10), so bildet $\{xU : U \in \mathfrak{U}\}$ den Umgebungsfilter von $x \in E$ für eine linksinvariante klassische Topologie. ■

Ebenso folgt aus (3.3) und (3.11):

(4.3) Genügt der Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e bezüglich der linksinvarianten klassischen Topologie \mathfrak{G} der Bedingung (3.12), so gibt es eine bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte linksinvariante quasi-uniforme Struktur \mathcal{U} , aus der \mathfrak{G} ableitbar ist, und zwar bilden die Relationen \mathbf{U}_U ($U \in \mathfrak{U}$) mit

$$x\mathbf{U}_Uy \Leftrightarrow x^{-1}y \in U$$

eine solche Struktur. Umgekehrt erfüllt \mathfrak{U} (3.12), sobald die klassische Topologie \mathfrak{G} aus einer linksinvarianten quasi-uniformen Struktur ableitbar ist. ■

Mit Rücksicht auf (3.13) kann man behaupten:

(4.4) Die linksinvariante klassische Topologie \mathfrak{G} ist genau dann rechtsinvariant, wenn der Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e außer (3.10) noch (3.14) erfüllt. ■

Aus (3.15) ergibt sich:

(4.5) Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) $[E, \mathfrak{G}]$ ist eine paratopologische Gruppe,

(b) Der Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e erfüllt (3.12) und (3.14);⁶

(c) \mathfrak{G} ist aus einer linksinvarianten und rechtsstetigen quasi-uniformen Struktur ableitbar,

(d) \mathfrak{G} ist sowohl aus einer linksinvarianten als auch aus einer rechtsinvarianten quasi-uniformen Struktur ableitbar. ■

Nach (3.25) und [3], (4.7) kann man sagen:

(4.6) Eine linksinvariante klassische Topologie \mathfrak{G} ist genau dann ϱ -stetig, wenn der Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e außer (3.10) noch (3.14) und (3.21) erfüllt; dann ist \mathfrak{G} auch rechtsinvariant, so daß $[E, \mathfrak{G}]$ eine halbtopologische Gruppe ist.⁷

⁵ Vgl. [5], (11.33).

⁶ Vgl. [1], S. 100, Exercice 4), a).

⁷ Vgl. [1], S. 100 Exercice 2), a).

Nach (3.26) und (3.3) kann man die klassischen Grundtatsachen über topologische Gruppen folgenderweise ergänzen:

(4.7) Für eine linksinvariante klassische Topologie \mathfrak{G} und den Umgebungsfilter von e bezüglich \mathfrak{G} sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) $[E, \mathfrak{G}]$ ist eine topologische Gruppe,
- (b) \mathfrak{U} erfüllt (3.12), (3.14) und (3.21),
- (c) \mathfrak{G} ist sowohl aus einer linksinvarianten als auch aus einer rechtsinvarianten uniformen Struktur ableitbar,
- (d) \mathfrak{G} ist sowohl aus einer linkspfekten als auch aus einer rechtsperfekten Nachbarschaftsstruktur ableitbar,
- (e) \mathfrak{G} ist aus einer linksinvarianten und rechtsstetigen uniformen Struktur ableitbar,
- (f) \mathfrak{G} ist aus einer linkspfekten und rechtsinvarianten Nachbarschaftsstruktur ableitbar.

Die unter (d) und (f) erwähnten Nachbarschaftsstrukturen sind durch \mathfrak{G} eindeutig bestimmt und sind aus den unter (c) bzw. (e) erwähnten uniformen Strukturen ableitbar. ▀

Aus (3.27) erhält man mit Rücksicht auf (3.3):

(4.8) Für eine linksinvariante quasi-uniforme Struktur \mathcal{U} und den Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e bezüglich der aus \mathcal{U} abgeleiteten klassischen Topologie \mathfrak{G} sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{U} ist multiplikationsstetig,
- (b) \mathcal{U} ist einer links- und rechtsinvarianten quasi-uniformen Struktur äquivalent,
- (c) \mathfrak{U} erfüllt (3.12) und (3.19). ▀

Aus (3.28) folgt dann:

(4.9) Unter den Voraussetzungen von (4.8) sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{U} ist multiplikationsstetig und einer uniformen Struktur äquivalent,
- (b) \mathcal{U} ist ϱ -stetig,
- (c) \mathcal{U} erfüllt (3.12), (3.19) und (3.21),
- (d) \mathcal{U} ist einer links- und rechtsinvarianten uniformen Struktur äquivalent.⁸ ▀

(3.29) hat zur Folge:

(4.10) Für eine linkspfekte Nachbarschaftsstruktur δ , die daraus abelitete klassische Topologie \mathfrak{G} und den Umgebungsfilter \mathfrak{U} von e bezüglich \mathfrak{G} sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- (a) δ ist ϱ -invariant,
- (b) \mathfrak{U} erfüllt (3.12), (3.17) und (3.21),
- (c) δ ist rechtsperfekt. ▀

Aus (3.3), (3.11) und (3.20) erhält man:

(4.11) Es seien \mathcal{U} eine linksinvariante quasi-uniforme Struktur, \mathfrak{G} die

⁸ Vgl. [1], S. 108, Exercice 3).

daraus abgeleitete klassische Topologie, \mathfrak{U} der Umgebungsfilter von e bezüglich \mathfrak{G} (der nach (4.3) notwendigerweise (3.12) erfüllt), \mathcal{U}^* die aus den Relationen \mathbf{U}_U^* ($U \in \mathfrak{U}$) mit

$$x\mathbf{U}_U^*y \Leftrightarrow yx^{-1} \in U$$

bestehende rechtsinvariante quasi-uniforme Struktur und \mathfrak{G}^* die aus \mathcal{U}^* abgeleitete klassische Topologie. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) ϱ ist eine stetige Abbildung von $[E, \mathfrak{G}]$ in $[E, \mathfrak{G}^*]$,
- (b) ϱ ist eine gleichmäßig stetige Abbildung von $[E, \mathcal{U}]$ in $[E, \mathcal{U}^*]$,
- (c) \mathfrak{U} erfüllt (3.12) und (3.21),
- (d) \mathcal{U} ist einer uniformen Struktur äquivalent,
- (e) \mathcal{U}^* ist einer uniformen Struktur äquivalent,⁹
- (f) \mathfrak{G} ist aus einer linksperfekten Nachbarschaftsstruktur ableitbar.

Die unter (f) erwähnte Nachbarschaftsstruktur ist durch \mathfrak{G} eindeutig bestimmt und aus \mathcal{U} ableitbar. ■

5. Gruppen mit Hüllenoperationen

Ein wesentlicher Teil der Ergebnisse unter 3 bezieht sich darauf, daß gewisse Stetigkeitsannahmen über \mathcal{P} , \mathcal{B} oder \mathcal{R} die Idempotenz der betreffenden Struktur zur Folge haben. Eine Übertragung solcher Aussagen auf die klassischen Strukturen würde Verallgemeinerungen der Begriffe von Topologie, Nachbarschaftsstruktur bzw. quasi-uniformen Struktur unter Verzicht auf Idempotenz benötigen. Solche Verallgemeinerungen wurden in [2] tatsächlich eingeführt; in folgenden werden wir die Beziehungen unserer Ergebnisse zu den dortigen kurz schildern.

Es sei vorläufig E eine beliebige Menge (also nicht notwendig eine Gruppe). Nach [2], S. 237, Definition 14A.1 heißt eine Abbildung $u: 2^E \rightarrow 2^E$ eine *Hüllenoperation* („closure operation“) auf E , wenn

$$(5.1) \quad u(\emptyset) = \emptyset, \quad u(X) \supset X \text{ für } X \subset E, \quad u(X \cup Y) = u(X) \cup u(Y) \text{ für } X, Y \subset E.$$

Es werde noch folgende Terminologie eingeführt: ist jedem Element $x \in E$ ein aus x enthaltenden Mengen bestehender Filter $\mathfrak{v}(x)$ in E zugeordnet, so werden wir von einer Umgebungsstruktur \mathcal{O} auf E sprechen. Nun kann man behaupten:

(5.2) Die Hüllenoperationen, die Umgebungsstrukturen und die einfachen, perfekten Ordnungsstrukturen auf einer Menge E stehen miteinander

⁹ Vgl. [1], S. 38, Proposition 2, und S. 108, Exercice 2).

in eineindeutiger Beziehung. Genauer gesagt kann man aus einer Hülle-
operation u eine Umgebungsstruktur \mathcal{O} durch

$$(5.3) \quad V \in \mathfrak{v}(x) \Leftrightarrow x \notin u(E - V),$$

aus einer Umgebungsstruktur \mathcal{O} eine einfache, perfekte Ordnungsstruktur $\mathcal{D} = \{\prec\}$ durch

$$(5.4) \quad A \subset B \Leftrightarrow B \in \mathfrak{v}(a) \quad \text{für } a \in A,$$

schließlich aus einer einfachen, perfekten Ordnungsstruktur $\mathcal{D} = \{\prec\}$ eine Hülle-
operation u durch

$$(5.5) \quad x \notin u(X) \Leftrightarrow x \prec E - X$$

erhalten, und die Gesamtheiten aller Hülleoperationen bzw. aller Umge-
bungssstrukturen bzw. aller einfachen, perfekten Ordnungsstrukturen werden
damit eineindeutig aufeinander abgebildet.

Beweis. Ist u eine Hülleoperation auf E , so ist das mittels (5.3)
definierte Mengensystem $\mathfrak{v}(x)$ tatsächlich ein aus x enthaltenden Mengen
bestehender Filter:

$$x \notin u(E - E) \quad \text{für } x \in E \Rightarrow E \in \mathfrak{v}(x) \quad \text{für } x \in E,$$

$$V \in \mathfrak{v}(x) \Rightarrow x \notin u(E - V) \supseteq E - V \Rightarrow x \in V,$$

$$V \in \mathfrak{v}(x), V \subset V' \subset E \Rightarrow x \notin u(E - V) \supseteq u(E - V') \Rightarrow V' \in \mathfrak{v}(x),$$

$$V_1, V_2 \in \mathfrak{v}(x) \Rightarrow x \notin u(E - V_1) \cup u(E - V_2) = u(E - (V_1 \cap V_2)) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{v}(x),$$

nämlich $A \subset B$ hat $A \cup B = B$ und $u(B) = u(A) \cup u(B) \supset u(A)$ zur Folge.

Ist \mathcal{O} eine Umgebungsstruktur auf E , so sei \prec durch (5.4) erklärt.
Dann ist \prec eine perfekte topogene Ordnung auf E :

$$x \in \emptyset \quad \text{für } x \in E \Rightarrow \emptyset \prec \emptyset,$$

$$E \in \mathfrak{v}(x) \quad \text{für } x \in E \Rightarrow E \prec E,$$

$$A \prec B \Rightarrow B \in \mathfrak{v}(a) \quad \text{für } a \in A \Rightarrow a \in B \quad \text{für } a \in A \Rightarrow A \subset B,$$

$$A' \subset A \prec B \subset B' \Rightarrow B' \in \mathfrak{v}(a) \quad \text{für } a \in A' \Rightarrow A' \prec B',$$

$$A_1 \prec B_1, A_2 \prec B_2 \Rightarrow B_1 \in \mathfrak{v}(a), B_2 \in \mathfrak{v}(a) \quad \text{für } a \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 \prec B_1 \cap B_2,$$

$$A_i \prec B_i \quad (i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathfrak{v}(a) \quad \text{für } a \in A_i, i \in I$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathfrak{v}(a) \quad \text{für } a \in \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \prec \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Somit ist $\mathcal{D} = \{\prec\}$ eine einfache, perfekte Ordnungsstruktur auf E .

Ist $\mathcal{P} = \{\prec\}$ eine einfache, perfekte Ordnungsstruktur auf E , so sei u mittels (5.5) erklärt. Dann ist u eine Hülleoperation auf E :

$$\begin{aligned} x \prec E - \emptyset &\text{ für } x \in E \Rightarrow u(\emptyset) = \emptyset, \\ x \notin u(X) &\Rightarrow x \prec E - X \Rightarrow x \notin X, \text{ also } x \in u(X), \\ x \notin u(X \cup Y) &\Leftrightarrow x \prec E - (X \cup Y) = (E - X) \cap (E - Y) \\ &\Leftrightarrow x \prec E - X \text{ und } x \prec E - Y \\ &\Leftrightarrow x \notin u(X) \text{ und } x \notin u(Y). \end{aligned}$$

Um noch die behauptete Eindeutigkeit einzusehen, seien die Abbildungen φ, ψ, χ mit

$$\varphi(u) = \emptyset, \quad \psi(\emptyset) = \prec, \quad \chi(\prec) = u$$

der Reihe nach durch (5.3), (5.4) und (5.5) erklärt. Man sieht leicht, daß

$$\chi(\psi(\varphi(u))) = u, \quad \varphi(\chi(\psi(\emptyset))) = \emptyset, \quad \psi(\varphi(\chi(\prec))) = \prec$$

für jede Hülleoperation u , jede Umgebungsstruktur \emptyset bzw. jede perfekte topogene Ordnung \prec ist. ▀

Die im Sinne von (5.2) einander entsprechenden Hülleoperationen, Umgebungsstrukturen und einfachen, perfekten Ordnungsstrukturen sollen zueinander assoziiert heißen.¹⁰

Ist \mathcal{P} idempotent, d.h. eine Topologie, so bezeichnet $u(X)$ nach (5.5) die abgeschlossene Hülle von X in bezug auf die zu \mathcal{P} assoziierte klassische Topologie.

E und E' seien zwei Mengen, u und u' zwei Hülleoperationen auf E bzw. E' , \emptyset und \emptyset' , $\mathcal{P} = \{\prec\}$ und $\mathcal{P}' = \{\prec'\}$ die assoziierten Umgebungsstrukturen bzw. einfachen, perfekten Ordnungsstrukturen. Nach [2], 16A.1 heißt eine Abbildung $f: E \rightarrow E'$ bezüglich u und u' stetig, wenn

$$f(u(X)) \subset u'(f(X)) \quad \text{für } X \subset E.$$

Nach [2], 16A.4 ist diese Tatsache damit gleichbedeutend, daß

$$V' \in \emptyset'(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V') \in \emptyset(x) \quad \text{für } x \in E.$$

Daraus folgt leicht, daß die Stetigkeit von f bezüglich u und u' mit der $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ -Stetigkeit von f gleichwertig ist:

$$\begin{aligned} A' \prec' B' &\Rightarrow B' \in \emptyset'(f(x)) \quad \text{für } x \in f^{-1}(A') \\ &\Rightarrow f^{-1}(B') \in \emptyset(x) \quad \text{für } x \in f^{-1}(A') \\ &\Rightarrow x \prec f^{-1}(B') \quad \text{für } x \in f^{-1}(A') \Rightarrow f^{-1}(A') \prec f^{-1}(B'), \end{aligned}$$

¹⁰ Die Äquivalenz der Begriffe von Hülleoperation und Umgebungsstruktur ist im wesentlichen in [2], 14B.5 und 14B.10 enthalten.

falls f bezüglich u und u' stetig ist, und umgekehrt

$$\begin{aligned} V' \in \mathfrak{v}'(f(x)) &\Rightarrow f(x) < V' \Rightarrow x < f^{-1}(V') \\ &\Rightarrow f^{-1}(V') \in \mathfrak{v}(x), \end{aligned}$$

falls f $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ -stetig ist.

Mit denselben Bezeichnungen wird nach [2], 17C.1 das *Produkt der Hüllenoperationen* u und u' als diejenige Hüllenoperation $u'' = u \times u'$ auf $E'' = E \times E'$ definiert, die zur Umgebungsstruktur \mathcal{O}'' assoziiert ist, wobei $\mathfrak{v}''(x, y)$ den vom Raster

$$\{V \times V' : V \in \mathfrak{v}(x), V' \in \mathfrak{v}'(y)\}$$

in E'' erzeugten Filter bezeichnet. Aus [5], (11.10) sieht man leicht, daß u'' auf diese Weise zu $\mathcal{D}'' = (\mathcal{D} \times \mathcal{D}')^{tp}$ assoziiert ist.

Unter einer *verallgemeinerten Nachbarschaftsstruktur* auf E versteht man nach [2], Definition 25A.1 eine Relation δ zwischen den Teilmengen von E mit folgenden Eigenschaften:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \emptyset \bar{\delta} E, \quad X \delta Y \Rightarrow Y \delta X, \quad X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X \delta Y, \\ (X \cup Y) \delta Z \Leftrightarrow X \delta Z \quad \text{oder} \quad Y \delta Z, \end{aligned}$$

wobei $\bar{\delta}$ die Negation von δ bedeutet. Man sieht leicht, daß die Bedingungen (5.6) genau mit (D.1) – (D.4) in [5], S. 75 gleichwertig sind, und der Gedankengang des Beweises von [5], (7.26) zeigt, daß die verallgemeinerten Nachbarschaftsstrukturen δ und die einfachen, symmetrischen Ordnungsstrukturen $Q = \{<\}$ eindeutig einander entsprechen, und zwar mit Hilfe der Beziehung

$$(5.7) \quad X \bar{\delta} Y \Leftrightarrow X < E - Y.$$

Da die Formel (5.7) genau mit [5], (7.24) übereinstimmt, kann man den Begriff von δ -*Stetigkeit* wortwörtlich und in Übereinstimmung mit [2], 25A.7 auf verallgemeinerte Nachbarschaftsstrukturen übertragen, und zwar so, daß die δ -*Stetigkeit* von $f : E \rightarrow E'$ bezüglich δ und δ' der (Q, Q') -*Stetigkeit* von f bezüglich der assoziierten einfachen, symmetrischen Ordnungsstrukturen Q und Q' entspricht. Von einer verallgemeinerten Nachbarschaftsstruktur δ leitet man nach [2], 25A.1 eine Hüllenoperation u mittels

$$(5.8) \quad u(A) = \{x : \{x\} \delta A\}$$

ab; aus (5.5) sieht man, daß

$$\mathcal{D} = Q^p$$

für die zu δ assoziierte einfache, symmetrische Ordnungsstruktur Q und die zu u assoziierte einfache, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{D} besteht.

Schließlich wird in [2], Definition 23A.3 der Begriff einer *halbuniformen Struktur* auf $E \times E$ eingeführt; darunter versteht man einen Filter in $E \times E$ aus die Diagonale enthaltenden Mengen mit der Eigenschaft, daß dieser Filter mit \mathbf{U} auch \mathbf{U}^d enthält. Ein solcher Filter wird daher von einem Raster \mathcal{U} erzeugt mit der Eigenschaft, daß

$$(5.9) \quad x \in E, \mathbf{U} \in \mathcal{U} \Rightarrow (x, x) \in \mathbf{U},$$

$$\text{zu } \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathcal{U} \text{ gibt es } \mathbf{U}_3 \in \mathcal{U} \text{ mit } \mathbf{U}_3 \subset \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2,$$

$$\mathbf{U} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{U}^d,$$

d.h. \mathcal{U} erfüllt die Bedingungen [5], (U.1), (U.2) und (U.4). Daraus folgt nach [5], (5.39), (5.43) und (5.44), daß die Ordnungen

$$(5.10) \quad A <_{\mathbf{U}} B \Leftrightarrow \text{aus } x \in A, x \mathbf{U} y \text{ folgt } y \in B$$

eine symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur

$$(5.11) \quad \mathcal{R} = \{ <_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \in \mathcal{U} \}$$

darstellen. Ist umgekehrt \mathcal{R} eine symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur, und setzt man für $< \in \mathcal{R}$

$$(5.12) \quad x \mathbf{U} < y \Leftrightarrow x < E - y \text{ ist ungültig,}$$

so erzeugt der Raster

$$(5.13) \quad \mathcal{U} = \{ \mathbf{U}_< : < \in \mathcal{R} \}$$

in $E \times E$ eine halbuniforme Struktur, und die Beziehung zwischen Rastern \mathcal{U} und Ordnungsstrukturen \mathcal{R} mittels (5.10) und (5.11) bzw. (5.12) und (5.13) ist eineindeutig.

Es seien nun \mathcal{R} und \mathcal{R}' symmetrische, biperfekte Ordnungsstrukturen auf E und E' , \mathcal{U} und \mathcal{U}' die assoziierten Raster. Eine Abbildung $f : E \rightarrow E'$ ist genau dann $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ -stetig, wenn es zu $\mathbf{U}' \in \mathcal{U}'$ immer $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ mit

$$x \mathbf{U} y \Rightarrow f(x) \mathbf{U}' f(y)$$

gibt, d.h. im Sinne von [2], 23C.1 wenn f mit Rücksicht auf (5.12) *gleichmäßig stetig* ist bezüglich der von \mathcal{U} bzw. \mathcal{U}' erzeugten halbuniformen Strukturen. Weiterhin wird in [2], 23D.10 das *Produkt* derselben halbuniformen Strukturen als der vom Raster

$$\mathcal{U}'' = \{ \mathbf{U}''(\mathbf{U}, \mathbf{U}') : \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{U}' \in \mathcal{U}' \}$$

erzeugte Filter erklärt, wobei

$$(x, x') \mathbf{U}''(\mathbf{U}, \mathbf{U}') (y, y') \Leftrightarrow x \mathbf{U} y \text{ und } x' \mathbf{U}' y';$$

zum Raster \mathcal{U}'' ist (vgl. [5], (11.36)) die Ordnungsstruktur $\mathcal{R}'' = (\mathcal{R} \times \mathcal{R}')^b = (\mathcal{R} \times \mathcal{R}')^p$ assoziiert.

Sind \mathcal{R} eine symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur auf E und \mathcal{U} der assoziierte Raster, so leitet man nach [2], 25A.1 von der von \mathcal{U} erzeugten halbuniformen Struktur eine verallgemeinerte Nachbarschaftsstruktur δ mittels

$$X \delta Y \Leftrightarrow \text{zu } U \in \mathcal{U} \text{ gibt es } x \in X \text{ und } y \in Y \text{ mit } xUy$$

ab; für die zu δ assoziierte einfache, symmetrische Ordnungsstruktur Q gilt nach (5.10) und (5.7) $Q = \mathcal{R}^t$.

Von nun an sei E eine Gruppe. Für eine Hülleoperation u auf E definieren wir *Linksinvarianz*, *Rechtsinvarianz*, *Translationsinvarianz*, ϱ -*Invarianz* der Reihe nach durch die Stetigkeit der Abbildungen σ_c , δ_c , σ_c und δ_c ($c \in E$), ϱ bezüglich u und u ; ferner wird die *Multiplikationsstetigkeit* von u durch die Stetigkeit von π bezüglich $u \times u$ und u erklärt. Nach den oben gesagten entsprechen die erstgenannten vier Begriffe den ebenso heißen Begriffen für die assoziierte einfache, perfekte Ordnungsstruktur \mathcal{D} , die Multiplikationsstetigkeit von u aber der p -Stetigkeit von \mathcal{D} .

Die Begriffe von *Links-* bzw. *Rechtsperfektheit* und ϱ -*Invarianz* lassen sich von Nachbarschaftsstrukturen auf verallgemeinerte Nachbarschaftsstrukturen übertragen. Dasselbe gilt für halbuniforme Strukturen statt quasi-uniformen Strukturen in Zusammenhang mit den Begriffen von *Links-, Rechts-, Translationsstetigkeit*, ϱ -*Stetigkeit*, *Links-, Rechts-, Translationsinvarianz* bzw. *Multiplikationsstetigkeit*; eine halbuniforme Struktur heißt z.B. linksinvariant, wenn sie von einem Raster \mathcal{U} aus im Sinne von S. 44 linksinvarianten Relationen U erzeugt wird. Für die assoziierte einfache, symmetrische Ordnungsstruktur Q bzw. symmetrische, biperfekte Ordnungsstruktur \mathcal{R} bedeuten diese Eigenschaften der Reihe nach *Links- und Rechtsbiperfektheit*, ϱ -*Invarianz*, *Links-, Rechts- und Translationsstetigkeit*, ϱ -*Stetigkeit*, *Links-, Rechts- und Translationsinvarianz* bzw. p -*Stetigkeit*.

Die hier angeführten Definitionen ermöglichen nun fast alle Ergebnisse unter 3 auf die Sprache von Hülleoperationen, verallgemeinerten Nachbarschaftsstrukturen und halbuniformen Strukturen zu übersetzen, indem man statt \mathcal{D} , \mathcal{B} und \mathcal{R} überall die assoziierten Strukturen einsetzt (in Zusammenhang mit den beiden letzten Strukturenarten kommen allerdings nur die Ergebnisse über *symmetrische* \mathcal{B} und \mathcal{R} in Frage). Ohne alle möglichen so übersetzten Ergebnisse hier zu formulieren, beschränken wir uns auf die folgenden:

(5.14) Es seien u eine linksinvariante Hülleoperation auf E , \mathcal{D} die assoziierte Umgebungsstruktur, $\mathfrak{U} = \mathfrak{b}(e)$, und es werde für \mathfrak{U} die Bedingung (3.21)

$$U \in \mathfrak{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathfrak{U}$$

vorausgesetzt. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte linksperfekte verallgemeinerte Nachbarschaftsstruktur δ , aus der sich u ableiten lässt, sowie eine

eindeutig bestimmte linksinvariante halbuniforme Struktur mit derselben Eigenschaft; aus dieser halbuniformen Struktur leitet man auch δ ab.

BEWEIS. (3.3) und (3.20). ▀

(5.15) Es sei u eine linksinvariante Hülleoperation auf E . Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(a) u ist ϱ -invariant,

(b) u läßt sich sowohl aus einer linksperfekten als auch aus einer rechtsperfekten verallgemeinerten Nachbarschaftsstruktur ableiten,

(c) u läßt sich sowohl aus einer linksinvarianten als auch aus einer rechtsinvarianten halbuniformen Struktur ableiten.

BEWEIS. (3.22). ▀

(5.16) Eine linksperfekte verallgemeinerte Nachbarschaftsstruktur auf E ist genau dann ϱ -invariant, wenn sie rechtsperfekt ist.

BEWEIS. (3.3) und (3.23). ▀

(5.17) Eine linksinvariante halbuniforme Struktur auf E ist genau dann ϱ -stetig, wenn sie rechtsinvariant ist.

BEWEIS. (3.3) und (3.24). ▀

(5.18) Ist eine Hülleoperation u auf E multiplikationsstetig und ϱ -invariant, so fällt $u(X)$ für $X \subset E$ mit der abgeschlossenen Hölle von X in bezug auf eine klassische Topologie \mathfrak{G} zusammen, so daß $[E, \mathfrak{G}]$ eine topologische Gruppe ist.¹¹

BEWEIS. [3], (4.8) und (3.26). ▀

(5.19) Eine halbuniforme Struktur auf E ist genau dann multiplikationsstetig und ϱ -stetig, wenn sie einer translationsinvarianten uniformen Struktur äquivalent ist.

BEWEIS. (3.3) und (3.28). ▀

Literatur

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. 3–4, 3. Auflage (Paris, 1960).
- [2] E. ČECH, *Topological spaces* (Prague – London – New York – Sydney, 1966).
- [3] Á. CSÁSZÁR, Syntopogene Gruppen I, *Math. Nachrichten*, **39** (1969), 1–20.
- [4] Á. CSÁSZÁR, Syntopogene Gruppen II, *Mathematica, Cluj* **13** (36) (1971), 25–50.
- [5] Á. CSÁSZÁR, *Grundlagen der allgemeinen Topologie* (Budapest – Leipzig, 1963).
- [6] M. D. GREEN, A syntopogenous characterization of a topological group, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **16** (1968), 457–460.
- [7] V. V. MASLOV, A contribution to the theory of semisyntopogenic spaces, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), 931–933.

¹¹ Vgl. [2], 19B.4.

SYNTOPOGENE GRUPPEN IV.

Von

ÁKOS CSÁSZÁR

I. Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 29. April 1970)

In [3] wurden unter anderem die ρ -stetigen Ordnungsstrukturen auf einer Gruppe untersucht. Die Aufgabe dieses Aufsatzes ist die Untersuchung der ι -stetigen Ordnungsstrukturen. Ähnlich wie die ρ -Stetigkeit hat auch die ι -Stetigkeit eine Reihe weiterer Eigenschaften zur Folge.

Es sei wie bisher E eine Gruppe mit Einselement e , \mathcal{R} bezeichne eine (vorläufig beliebige) Ordnungsstruktur auf E , und Ξ sei eine Filterschar (d.h. Ξ ist ein System von Filtern \mathfrak{U} in E mit $e \in U$ für $U \in \mathfrak{U}$ und mit der Eigenschaft, daß es zu $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in \Xi$ einen Filter $\mathfrak{U}_3 \in \Xi$ gibt mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_3$). Wir setzen noch

$$(1) \quad A <_{\vee} B \Leftrightarrow AV \subset B \quad (A, B \subset E, e \in V \subset E),$$

$$(2) \quad <_{\mathfrak{U}} = \bigcup \{ <_U : U \in \mathfrak{U} \} \quad (\mathfrak{U} \in \Xi),$$

$$(3) \quad \mathcal{R}_{\Xi} = \{ <_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \in \Xi \},$$

$$(4) \quad \mathfrak{U}_0 = \bigcup \{ \mathfrak{U} : \mathfrak{U} \in \Xi \},$$

$$(5) \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0} = \{ <_U : U \in \mathfrak{U}_0 \}.$$

Wir wissen, daß $<_{\vee}$ für $e \in V \subset E$ eine linksinvariante, biperfekte topogene Ordnung ist ([2], (1.1)), und \mathcal{R}_{Ξ} ist eine linksbiperfekte Ordnungsstruktur ([2], (3.18)). Offenbar ist \mathfrak{U}_0 ein Filter aus e enthaltenden Mengen, so daß $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}$ nach [2], (1.6) eine linksinvariante, biperfekte Ordnungsstruktur ist.

Aus der Formel

$$(6) \quad A <_{\vee}^* B \Leftrightarrow VA \subset B \quad (e \in V \subset E)$$

erhält man analogerweise die dualen Begriffe $<_{\mathfrak{U}}^*$, \mathcal{R}_{Ξ}^* und $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}^*$.

Mit der Bezeichnung

$$(7) \quad \mathfrak{U}(\prec) = \{U : e \prec U\}$$

ist $\mathfrak{U}(\prec)$ nach [3], (1.1) ein Filter, und

$$(8) \quad \mathcal{E}(\mathcal{R}) = \{\mathfrak{U}(\prec) : \prec \in \mathcal{R}\}$$

ist eine Filterschar im obigen Sinne. Wir setzen noch

$$(9) \quad \mathfrak{U}_0(\mathcal{R}) = \bigcup \{\mathfrak{U} : \mathfrak{U} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\}.$$

Es wird sich herausstellen, daß die ι -Stetigkeit von Ordnungsstrukturen in engem Zusammenhang mit dem Begriff der Totalbeschränktheit steht. Wir führen hier nur eine der gleichwertigen Definitionen der total beschränkten syntopogenen Struktur auf. Für eine topogene Ordnung \prec auf einer Menge E sei $\mathfrak{P}(\prec)$ das System der Teilmengen $P \subset E$ mit der Eigenschaft

$$A \prec B, A \cap P \neq \emptyset \Rightarrow P \subset B.$$

Nun heißt eine syntopogene Struktur \mathcal{S} auf E total beschränkt, wenn es für $\prec \in \mathcal{S}$ eine endliche Darstellung

$$E = \bigcup_1^n P_i$$

gibt mit $P_i \in \mathfrak{P}(\prec)$ ($i = 1, \dots, n$) (s. [4], (19.17)).

1. Charakterisierung der ι -stetigen Ordnungsstrukturen

Wir zeigen, daß die ι -Stetigkeit eine ziemlich starke Voraussetzung ist, die viele weitere Eigenschaften mit sich zieht.

(1.1) Ist \mathcal{R} eine ι -stetige Ordnungsstruktur, so erfüllt die Filterschar $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{R})$ die Bedingungen:

(1.2) Zu $\mathfrak{U} \in \mathcal{E}$ gibt es $\mathfrak{U}_1 \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft, daß für $U \in \mathfrak{U}$ immer $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ existiert mit $U_1^2 \subset U$,

(1.3) Zu $\mathfrak{U} \in \mathcal{E}$ gibt es $\mathfrak{U}_1 \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft, daß für $U \in \mathfrak{U}$ immer $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ existiert mit $U_1 \subset xUx^{-1}$ ($x \in E$).

BEMERKUNG. (1.2) fällt mit [3], (1.10) zusammen, und (1.3) hat die Bedingung [3], (1.16) zur Folge.

BEWEIS. Zu $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\prec) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ ($\prec \in \mathcal{R}$) sei $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}(\prec_1) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ ($\prec_1 \in \mathcal{R}$) mit

$$\pi^{-1}(\prec) \subset \prec_1 X \prec_1$$

gewählt (vgl. [1], (4.9)). Für $U \in \mathfrak{U}$ gilt dann wegen $e \prec U$ die Beziehung

$$(e, e) \in \pi^{-1}(e) (\prec_1 X \prec_1 \pi^{-1}(U),$$

d.h. es gibt Mengen C, D, C', D' mit

$$(e, e) \in C \times D, C' \times D' \subset \pi^{-1}(U), C <_1 C', D <_1 D'.$$

Wir setzen $U_1 = C' \cap D'$. Dann hat man

$$e \in C \cap D <_1 C' \cap D' = U_1,$$

also $U_1 \in \mathcal{U}_1$, und

$$U_1 \times U_1 \subset C' \times D' \subset \pi^{-1}(U),$$

also

$$U_1^2 = \pi(U_1 \times U_1) \subset U.$$

Es sei jetzt $\pi' : E \times E \times E \rightarrow E$ durch

$$\pi'(x, y, z) = \pi(\pi(x, y), z) = xyz$$

erklärt. Aus der $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}, \mathcal{R})$ -Stetigkeit von π und [4], (10.7), (11.4) und (11.15) folgt, daß π' $(\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}, \mathcal{R})$ -stetig ist. Zu $\mathcal{U} = \mathcal{U}(<_1) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ ($<_1 \in \mathcal{R}$) sei nun $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}(<_1) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ mit einer solchen Ordnung $<_1 \in \mathcal{R}$ gewählt, daß

$$\pi'^{-1}(<) \subset <_1 \times <_1 \times <_1.$$

Dann gilt für $U \in \mathcal{U}$ wegen $e < U$

$$\pi'^{-1}(e) (<_1 \times <_1 \times <_1) \pi'^{-1}(U).$$

Es sei

$$A = \{(x^{-1}, e, x) : x \in E\} \subset E \times E \times E.$$

Aus $A \subset \pi'^{-1}(e)$ folgt nun nach [4], (11.10)

$$A \subset \bigcup_1^n (B_i \times C_i \times D_i), \quad \bigcup_1^n B'_i \times C'_i \times D'_i \subset \pi'^{-1}(U),$$

$$B_i <_1 B'_i, \quad C_i <_1 C'_i, \quad D_i <_1 D'_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit geeigneten Mengen $B_i, C_i, D_i, B'_i, C'_i, D'_i$, und man kann

$$A \cap (B_i \times C_i \times D_i) \neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, n)$$

annehmen. Daraus folgt $e \in C_i <_1 C'_i$ für $i = 1, \dots, n$, somit

$$e <_1 U_1 = \bigcap_1^n C'_i, \quad U_1 \in \mathcal{U}_1.$$

Für $x \in E$ gilt dann $(x^{-1}, e, x) \in A$, also

$$x^{-1} \in B_i \subset B'_i, \quad x \in D_i \subset D'_i$$

für ein geeignetes i , d.h.

$$x^{-1} U_1 x \subset B'_i C'_i D'_i = \pi'(B'_i \times C'_i \times D'_i) \subset U,$$

und $U_1 \subset x U x^{-1}$. ■

Eine weitere wichtige Folgerung aus der ℓ -Stetigkeit ist die folgende:

(1.4) Ist $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_0(\mathcal{R})}$ eine total beschränkte, linksinvariante, biperfekte syntopogene Struktur.

BEWEIS. Wir wissen, daß $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_0(\mathcal{R})}$ eine linksinvariante, biperfekte Ordnungsstruktur ist. Sie ist auch idempotent, denn $\Xi(\mathcal{R})$ erfüllt (1.2) nach (1.1), und daraus folgt für $\mathbb{U}_0 = \mathbb{U}_0(\mathcal{R})$ die Bedingung

(1.5) Zu $U \in \mathbb{U}_0$ gibt es $U_1 \in \mathbb{U}_0$ mit $U_1^2 \subset U$.

Das ist aber genau [2], (1.16), so daß man [2], (1.15) anwenden darf.

Um noch einzusehen, daß $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_0}$ total beschränkt ist, sei $<_U \in \mathcal{R}_{\mathbb{U}_0}$ mit $U \in \mathbb{U}_0(\mathcal{R})$ gegeben, also $U \in \mathbb{U} \in \Xi(\mathcal{R})$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}(<)$, $< \in \mathcal{R}$. Zu $<$ gibt es eine Ordnung $<_1 \in \mathcal{R}$ mit

$$\pi^{-1}(<) \subset <_1 X_i <_1,$$

so daß

$$\pi^{-1}(e) (<_1 X_i <_1) \pi^{-1}(U)$$

aus $e < U$ folgt. Es gibt also Mengen A_i, B_i, A'_i, B'_i mit

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(e) &\subset \bigcup_1^n (A_i \times B_i), \quad \bigcup_1^n (A'_i \times B'_i) \subset \pi^{-1}(U), \\ A_i &<_1 A'_i, \quad B_i <_1 B'_i \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$P_i = A_i^{-1} \cap B_i \quad (i=1, \dots, n)$$

und zeigen

$$E = \bigcup_1^n P_i, \quad P_i \in \mathfrak{P}(<_U) \quad (i=1, \dots, n).$$

Für $x \in E$ existiert wegen $(x^{-1}, x) \in \pi^{-1}(e)$ tatsächlich ein i mit $(x^{-1}, x) \in A_i \times B_i$, d.h. $x \in A_i^{-1} \cap B_i = P_i$. Ist andererseits $C <_U D$ und $C \cap P_i \neq \emptyset$, z.B. $x \in C \cap P_i$, so gilt für $y \in P_i = A_i^{-1} \cap B_i$

$$y = x(x^{-1}y) \in xA_iB_i \subset xA'_iB'_i = x\pi(A'_i \times B'_i) \subset xU \subset CU \subset D,$$

also $P_i \subset D$, sobald $C \cap P_i \neq \emptyset$. Das ergibt $P_i \in \mathfrak{P}(<_U)$. ■

Als eine gewisse Art von Umkehrung können wir beweisen:

(1.6) Erfüllt eine Filterschar Ξ (1.2) und (1.3), und ist $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_0}$ total beschränkt, so ist \mathcal{R}_{Ξ} eine ℓ -stetige linksbiperfekte syntopogene Struktur.

BEWEIS. Aus [2], (3.18) sieht man, daß \mathcal{R}_{Ξ} eine linksbiperfekte Ordnungsstruktur ist, und [3], (1.9) zeigt, daß dieselbe auch idempotent ist. Weiterhin erfüllt \mathbb{U}_0 (1.5), so daß $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_0}$ nach [2], (1.15) eine syntopogene Struktur ist (damit ist die Annahme über $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_0}$ gerechtfertigt).

Zu $\mathfrak{U} \in \Xi$ sei jetzt $\mathfrak{U}_1 \in \Xi$ gemäß (1.2), zu \mathfrak{U}_1 ein Filter $\mathfrak{U}_2 \in \Xi$ gemäß (1.3), und zu \mathfrak{U}_2 ein weiterer Filter $\mathfrak{U}_3 \in \Xi$ wiederum nach (1.2) gewählt. Wir zeigen die Richtigkeit der Beziehung

$$\pi^{-1}(<_{\mathfrak{U}}) \subseteq <_{\mathfrak{U}_3} X <_{\mathfrak{U}_3}.$$

Aus $A <_{\mathfrak{U}} B$ folgt nämlich $A <_{\mathfrak{U}_3} B$ mit $U \in \mathfrak{U}$, d.h. $AU \subset B$. Es werde $U_1 \in \mathfrak{U}_1$ mit $U_1^2 \subset U$, dann $U_2 \in \mathfrak{U}_2$ mit

$$U_2 \subset \bigcap_{x \in E} xU_1 x^{-1},$$

schließlich $U_3 \in \mathfrak{U}_3$ mit $U_3^2 \subset U_2$ gewählt.

Nach Voraussetzung kann man

$$E = \bigcup_1^n P_i, \quad P_i \in \mathfrak{P}(<_{U_3}) \quad (i=1, \dots, n)$$

annehmen. Es gilt offenbar

$$\pi^{-1}(A) \subset \bigcup \{P_i \times P_j : (i, j) \in I\}$$

wobei I die Gesamtheit aller Indexpaare (i, j) mit

$$\pi^{-1}(A) \cap (P_i \times P_j) \neq \emptyset$$

bezeichnet. Für $(i, j) \in I$ gibt es daher $x \in P_i$, $y \in P_j$ mit $(x, y) \in \pi^{-1}(A)$, d.h. $xy \in A$. Daraus folgt

$$P_i \subset xU_3, \quad P_j \subset yU_3,$$

da $x <_{U_3} xU_3$, $y <_{U_3} yU_3$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} P_i U_3 P_j U_3 &\subset xU_3 U_3 yU_3 U_3 \subset xU_2 yU_2 = xy(y^{-1}U_2 y) (e^{-1}U_2 e) \subset \\ &\subset xyU_1 U_1 \subset xyU \subset AU \subset B. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung $Q_i = P_i U_3$ ($i = 1, \dots, n$) ergibt sich also

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(A) &\subset \bigcup \{P_i \times P_j : (i, j) \in I\}, \\ &\subset \bigcup \{Q_i \times Q_j : (i, j) \in I\} \subset \pi^{-1}(B), \end{aligned}$$

$P_i <_{U_3} Q_i$, d.h. $P_i <_{U_3} Q_i$ ($i = 1, \dots, n$). ■

Satz (1.6) liefert nun im wesentlichen alle ι -stetigen Ordnungsstrukturen:

(1.7) Ist \mathcal{R} eine ι -stetige Ordnungsstruktur, so gilt $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})}$; insbesondere ist dann \mathcal{R} idempotent.

Beweis. Für $< \in \mathcal{R}$ sei $<_1 \in \mathcal{R}$ mit

$$(1.8) \quad \pi^{-1}(<) \subseteq <_1 X <_1$$

gewählt. Wir zeigen

$$< \subseteq <_{\mathfrak{U}(<_1)}.$$

Ist in der Tat $A < B$, so gilt

$$\pi^{-1}(A) (<_1 \times <_1) \pi^{-1}(B).$$

Wir setzen

$$P = \{(x, e) : x \in A\} \subset \pi^{-1}(A).$$

Dann gilt

$$P \subset \bigcup_1^n (C_i \times D_i), \quad \bigcup_1^n (C'_i \times D'_i) \subset \pi^{-1}(B),$$

$$C_i <_1 C'_i, \quad D_i <_1 D'_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit geeigneten Mengen C_i, C'_i, D_i, D'_i und

$$P \cap (C_i \times D_i) \neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, n).$$

Da $e \in D_i$ für $i = 1, \dots, n$, ist offenbar

$$e <_1 \bigcap_1^n D'_i = U \in \mathfrak{U}(<_1) \in \mathcal{E}(\mathcal{R}).$$

Aus $x \in A$ folgt nun $x \in C_i \subset C'_i$ für ein i , also

$$xU \subset C'_i D'_i \subset B,$$

so daß $AU \subset B$, $A <_{U} B$, $A <_{\mathfrak{U}(<_1)} B$.

Die somit erwiesene Beziehung

$$< \subseteq <_{\mathfrak{U}(<_1)} \in \mathcal{R}_{\varepsilon(\mathcal{R})}$$

liefert

$$(I.9) \quad \mathcal{R} < \mathcal{R}_{\varepsilon(\mathcal{R})}.$$

Es sei nun umgekehrt $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(<) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ gegeben, und zu $< \in \mathcal{R}$ wiederum $<_1 \in \mathcal{R}$ mit (I.8) gewählt. Wir zeigen

$$<_{\mathfrak{U}(<)} \subseteq <_1.$$

In der Tat, aus $A <_{\mathfrak{U}} B$ folgt $A <_U B$ für eine Menge $U \in \mathfrak{U}$, d.h. $AU \subset B$, $e < U$. Daraus ergibt sich

$$\pi^{-1}(e) (<_1 \times <_1) \pi^{-1}(U),$$

also

$$\pi^{-1}(e) \subset \bigcup_1^n (C_i \times D_i), \quad \bigcup_1^n (C'_i \times D'_i) \subset \pi^{-1}(U),$$

$$C_i <_1 C'_i, \quad D_i <_1 D'_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Setzt man $P_i = C_i^{-1} \cap D_i$ ($i = 1, \dots, n$), so gilt wie im Beweis von (1.4)

$$E = \bigcup_1^n P_i,$$

also

$$A \subset \bigcup \{P_i : i \in I\},$$

wobei I die Menge der Indizes i mit $A \cap P_i \neq \emptyset$ bezeichnet. Für $i \in I$ sei also $x_i \in A \cap P_i$; dann ist

$$P_i \subset D_i <_1 D'_i = x_i x_i^{-1} D'_i \subset x_i C_i D'_i \subset x_i C'_i D'_i \subset x_i U \subset A U \subset B,$$

also

$$A \subset \bigcup \{P_i : i \in I\} <_1 B.$$

Somit ergibt sich

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\mathcal{R}) < \mathcal{R},$$

und zusammen mit (1.9)

$$(1.10) \quad \mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\mathcal{R}).$$

Nach (1.1) erfüllt $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{R})$ (1.2); daher ist $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ nach [3], (1.9) idempotent. Wegen (1.10) ist \mathcal{R} selbst idempotent. ▀

Nun sind wir in der Lage, die angekündigte Charakterisierung der l -stetigen Ordnungsstrukturen zu formulieren:

(1.11) *Für eine Ordnungsstruktur \mathcal{R} sind folgende Aussagen gleichwertig:*

- (a) \mathcal{R} ist l -stetig.
- (b) $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ erfüllt (1.2) und (1.3), $\mathcal{R}_{ll_a}(\mathcal{R})$ ist eine total beschränkte syntopogene Struktur, und $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}(\mathcal{R})$,
- (c) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, wobei die Filterschar \mathcal{E} (1.2) und (1.3) erfüllt, und \mathcal{R}_{ll_a} ist eine total beschränkte syntopogene Struktur,
- (d) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, wobei \mathcal{E} (1.3) erfüllt, \mathcal{R} ist idempotent, und \mathcal{R}_{ll_a} ist eine total beschränkte syntopogene Struktur.

Beweis. (a) \Rightarrow (b) folgt aus (1.1), (1.4) und (1.7).

(b) \Rightarrow (c) ist evident.

(c) \Leftrightarrow (d) ergibt sich aus [3], (1.9), da $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ nach [2], (3.18) immer linksbiperfekt ist.

(c) \Rightarrow (a) ist in (1.6) enthalten. ▀

2. Folgerungen

Um (1.11) auf biperfekte Ordnungsstrukturen anwenden zu können, sei es zuerst bemerkt:

(2.1) *Es sei \mathcal{R} eine linksinvariante, biperfekte Ordnungsstruktur. Für $< \in \mathcal{R}$ sei*

$$(2.2) \quad V(<) = \cap \{U : < \in U\} = \cap \mathfrak{U}(<),$$

$$(2.3) \quad \mathfrak{V} = \{V(<) : < \in \mathcal{R}\}$$

gesetzt. Dann besteht $\mathfrak{U}(<)$ aus allen Mengen U mit

$$V(<) \subset U \subset E,$$

und

$$(2.4) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathfrak{V}} = \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{R})}.$$

$\Xi = \Xi(\mathcal{R})$ erfüllt (1.2) bzw. (1.3) genau dann, wenn $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ (2.5) bzw. (2.6) erfüllt, wobei

(2.5) Zu $U \in \mathfrak{U}$ gibt es $U_1 \in \mathfrak{U}$ mit $U_1^2 \subset U$,

(2.6) Zu $U \in \mathfrak{U}$ gibt es $U_1 \in \mathfrak{U}$ mit $U_1 \subset xUx^{-1}$ für alle $x \in E$.

BEMERKUNG. (2.5) bzw. (2.6) ist mit [3], (3.12) bzw. [3], (3.19) identisch.

Beweis. Nach [2], (1.1) und (1.6) ist $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathfrak{V}}$, und die Beziehung

$$(2.7) \quad V(<) \in \mathfrak{U}(<), \quad <_{V(<)} = <_{\mathfrak{U}(<)} \quad (< \in \mathcal{R})$$

hat $\mathcal{R}_{\mathfrak{V}} = \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})}$ zur Folge. Aus (2.7) folgt weiter $\mathfrak{V} \sim \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$, also $\mathcal{R}_{\mathfrak{V}} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{R})}$. Offenbar folgt (2.5) aus (1.2), (2.6) aus (1.3). Ist umgekehrt (2.5) für $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ erfüllt, so gibt es für gegebenes $\mathfrak{U}(<) \in \Xi(\mathcal{R})$ ($< \in \mathcal{R}$) ein $U_1 \in \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ mit

$$U_1^2 \subset V(<);$$

es sei $U_1 \in \mathfrak{U}(<_1)$, $<_1 \in \mathcal{R}$ und $\mathfrak{U}(<_1) \in \Xi(\mathcal{R})$ dem Filter $\mathfrak{U}(<)$ zugeordnet. Dann gibt es zu $U \in \mathfrak{U}(<)$ eine Menge $U_1 \in \mathfrak{U}(<_1)$ mit

$$U_1^2 \subset V(<) \subset U,$$

d.h. (1.2) ist für $\Xi(\mathcal{R})$ erfüllt. Ähnlich sieht man, daß (1.3) aus (2.6) folgt. ■

Nun erhält man als Spezialfall von (1.11):

(2.8) Für eine Ordnungsstruktur \mathcal{R} sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) \mathcal{R} ist l -stetig und $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{ab}$,

(b) \mathcal{R} ist eine total beschränkte, gleichgradig translationsstetige syntopogene Struktur,

(c) \mathcal{R} ist eine total beschränkte, gleichgradig linksstetige syntopogene Struktur, und $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ erfüllt die Bedingung (2.6).

Beweis. (a) \Rightarrow (b). Nach [1], (4.8) ist \mathcal{R} gleichgradig translationsstetig, also $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{ab}$ nach [1], (5.14); man kann $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{ab}$ annehmen. Dann ist \mathcal{R} biperfekt und linksinvariant, somit gilt (2.4) nach (2.1). Aus (1.11) folgt nun, daß \mathcal{R} eine total beschränkte syntopogene Struktur ist.

(b) \Rightarrow (c). Nach [4], (19.13) ist $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{ab}$, und $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{ab}$ nach [1], (5.14). Wiederum kann $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{ab}$ angenommen werden, da aus $\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2$ offenbar $\mathfrak{U}_0(\mathcal{R}_1) = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R}_2)$ folgt. Nach (2.1) gilt dann (2.4), und $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ muß nach

[3], (3.18) die Bedingung [3], (3.19), d.h. (2.6) erfüllen; um [3], (3.18) anwenden zu können, muß man nur die Beziehung $\mathcal{U}_0(\mathcal{R}) = \mathcal{U}_0(\mathcal{R}^{ab})$ in Betracht nehmen.

(c) \Rightarrow (a). Wie oben ergibt sich $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{ab}$, und wir nehmen wiederum $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{ab}$ an. Nach (2.1) gilt dann (2.4), und (2.6) hat (1.3) für $E = E(\mathcal{R})$ zur Folge, so daß die Aussage (1.11) (d) gültig ist, woraus die t -Stetigkeit von \mathcal{R} folgt. ■

Insbesondere kann man behaupten:

(2.9) *Ist \mathcal{R} eine t -stetige Ordnungsstruktur, so ist auch $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})}$ t -stetig.*

BEWEIS. Nach (1.11) ist $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})}$ eine total beschränkte, biperfekte, linksinvariante (also gleichgradig linksstetige) syntopogene Struktur. Da $E(\mathcal{R})$ die Bedingung (1.3) erfüllt, muß $\mathcal{U}_0(\mathcal{R})$ offenbar (2.6) erfüllen, und man kann (2.8) wegen

$$\mathcal{U}_0(\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})}) = \mathcal{U}_0(\mathcal{R})$$

für $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})}$ statt \mathcal{R} anwenden. ■

Eine weitere unmittelbare Folge von (1.11) ist die folgende:

(2.10) *Ist \mathcal{R} eine t -stetige Ordnungsstruktur, so gilt*

$$(2.11) \quad \mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})} < \mathcal{R} < \mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})}^t.$$

BEWEIS. Die Beziehung

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})} < \mathcal{R}_E(\mathcal{R}) < \mathcal{R}_{\mathcal{U}_0(\mathcal{R})}^t$$

gilt für jede Ordnungsstruktur \mathcal{R} , und \mathcal{R} ist jetzt nach (1.11) mit $\mathcal{R}_E(\mathcal{R})$ äquivalent. ■

BEMERKUNG. Im allgemeinen gilt in (2.11) an keiner Seite Äquivalenz. Das wird von folgendem Beispiel gezeigt.

Es sei $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$ mit der Vektoraddition mod 2 als Gruppenoperation. Wir setzen

$$V(\delta, \varepsilon) = (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (0 < \delta < 1, 0 < \varepsilon < 1),$$

$$\mathfrak{B}(\delta) = \{V(\delta, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1\}.$$

Dann ist $\mathfrak{B}(\delta)$ ein Raster für $0 < \delta < 1$; wir bezeichnen mit $\mathfrak{U}(\delta)$ den von $\mathfrak{B}(\delta)$ erzeugten Filter.

$$\mathcal{E} = \{\mathfrak{U}(\delta) : 0 < \delta < 1\}$$

ist offenbar eine Filterschar, die (1.2) und (1.3) genügt, und zwar ist (1.3) wegen der Kommutativität von E automatisch erfüllt, in (1.2) aber kann man zu $\mathfrak{U}(\delta)$ immer $\mathfrak{U}(\delta/2)$ wählen, denn

$$V\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) + V\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset V(\delta, \varepsilon).$$

Der Filter \mathfrak{U}_0 wird vom Raster

$$\mathfrak{V} = \{V(\delta, \varepsilon) : 0 < \delta < 1, 0 < \varepsilon < 1\}$$

erzeugt, woraus sich leicht ergibt, daß die syntopogene Struktur $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{V}}$ total beschränkt ist, denn

$$(x, y) + V\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathfrak{P}(<_{V(\delta, \varepsilon)})$$

für $(x, y) \in E$, und E kann mit endlich vielen Mengen der Gestalt

$$(x, y) + V\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

überdeckt werden. Nach (1.11) ist also $\mathcal{R}_{\mathfrak{V}}$ -stetig, und es gilt weder $\mathcal{R}_{\mathfrak{V}} < \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}$ noch $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}^t < \mathcal{R}_{\mathfrak{V}}$.

Es ist leicht, (1.11) durch folgendes zu ergänzen:

(2.12) *Ist \mathcal{R} eine t -stetige Ordnungsstruktur, so ist*

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{V}}(\mathcal{R}) \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{V}}^*(\mathcal{R}),$$

ferner auch

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}(\mathcal{R}) \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}^*(\mathcal{R}).$$

BEWEIS. Nach (1.11) erfüllt $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ (1.3), und man sieht daraus, daß $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ sowohl [3], (1.22) als auch der dazu dualen Bedingung [3], (1.34) genügt. Aus [3], (1.21) folgt also

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{V}}(\mathcal{R}) \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{V}}^*(\mathcal{R}).$$

Ebenfalls aus (1.3) folgt noch, daß $\mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ die Beziehung (2.6), d.h. [3], (3.19) erfüllt, und

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}(\mathcal{R}) \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}^*(\mathcal{R})$$

ergibt sich aus [3], (3.18) mit Rücksicht auf $\mathfrak{U}_0(\mathcal{R}) = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R}^p)$. ■

Über die ϱ -Stetigkeit einer t -stetigen Ordnungsstruktur kann man folgendes behaupten:

(2.13) *Für eine t -stetige Ordnungsstruktur \mathcal{R} sind folgende Aussagen gleichwertig:*

- (a) \mathcal{R} ist ϱ -stetig,
- (b) \mathcal{R}^p ist ϱ -stetig,
- (c) $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^s$,
- (d) $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{R})$ erfüllt die Bedingung

(2.14) *Zu $U \in \mathfrak{E}$ gibt es $U_1 \in \mathfrak{E}$ mit der Eigenschaft, daß aus $U \in \mathfrak{U}$ immer $U^{-1} \in \mathfrak{U}_1$ folgt.*

BEMERKUNG. (2.14) ist mit [3], (1.24) identisch.

BEWEIS. Alles folgt aus [3], (1.23) mit Rücksicht auf die nach (2.12) gültige Beziehung $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{R})} \sim \mathcal{R}_{\Xi}^*(\mathcal{R})$. ▀

Daraus folgt nun leicht:

(2.15) Ist \mathcal{R} eine ℓ -stetige und ϱ -stetige Ordnungsstruktur, so ist $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{R})}$ ebenfalls ϱ -stetig, und

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{R})} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0}^s(\mathcal{R}).$$

BEWEIS. Aus (2.14) ergibt sich, daß $U \in \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ immer $U^{-1} \in \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ zur Folge hat, d.h. $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ erfüllt die Bedingung [3], (3.21). Nach (1.11) genügt $\Xi(\mathcal{R})$ der Bedingung (1.3), woraus sich noch (2.6) (also [3], (3.19)) für $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ ergibt. Daher folgt die Behauptung aus [3], (3.24). ▀

Es lohnt sich zu vermerken, daß man unter Annahme der Gültigkeit von [3], (3.19) und (3.21) für $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{R})$ die totale Beschränktheit von $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{R})}$ durch eine einfache Bedingung charakterisieren kann. Etwas allgemeiner gilt nämlich die folgende Behauptung:

(2.16) Es sei \mathfrak{B} ein Raster mit den Eigenschaften

- (a) $V \in \mathfrak{B} \Rightarrow e \in V$,
- (b) zu $V \in \mathfrak{B}$ gibt es $V_1 \in \mathfrak{B}$ mit $V^2 \subset V$,
- (c) zu $V \in \mathfrak{B}$ gibt es $V_1 \in \mathfrak{B}$ mit $V_1 \subset V^{-1}$.

Die (linksinvariante, biperfekte) syntopogene Struktur $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}$ ist genau dann total beschränkt, wenn es zu $V \in \mathfrak{B}$ endlich viele Punkte x_1, \dots, x_n von E gibt mit

$$E = \bigcup_1^n x_i V.$$

BEWEIS. Aus [2], (1.6) und (1.15) sieht man, daß $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}$ eine linksinvariante, biperfekte syntopogene Struktur ist. Wenn nun $\mathcal{R}_{\mathfrak{B}}$ total beschränkt ist, so gibt es zu $V \in \mathfrak{B}$ eine Darstellung

$$E = \bigcup_1^n P_i$$

mit $P_i \in \mathfrak{B}(<_V)$ für $i = 1, \dots, n$; natürlich kann man $P_i \neq \emptyset$ annehmen. Für $x_j \in P_i$ folgt nun $x_i <_V x_j V$, also $P_i \subset x_j V$.

Es sei umgekehrt $V \in \mathfrak{B}$ gegeben. Wir wählen $V_1 \in \mathfrak{B}$ mit $V_1^2 \subset V$, $V_2 \in \mathfrak{B}$ mit $V_2 \subset V_1^{-1}$ und $V_3 \in \mathfrak{B}$ mit $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Ist nun

$$E = \bigcup_1^n x_i V_3,$$

so muß man nur bedenken, daß $x_i V_3 \mathfrak{B}(<_V)$ ist. In der Tat, aus $A <_V B$, $A \cap x_i V_3 \neq \emptyset$ folgt $a \in A \cap x_i V_3$, also $a = x_i v$ mit $v \in V_3$, $x_i = av^{-1}$, und

$$x_i V_3 \subset a V_3^{-1} V_3 \subset a V_1 V_1 \subset a V \subset A V \subset B. ▀$$

Zum Schluß sei noch der Fall der einfachen, ℓ -stetigen Ordnungsstrukturen behandelt:

(2.17) Für eine einfache Ordnungsstruktur \mathcal{B} sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{B} ist t -stetig,
- (b) $\mathcal{B} = \mathcal{S}^t$ mit einer total beschränkten, gleichgradig translationsstetigen syntopogenen Struktur \mathcal{S} ,
- (c) $\mathcal{B} = \mathcal{S}^t$ mit einer total beschränkten, translationsinvarianten syntopogenen Struktur \mathcal{S} ,
- (d) $\mathcal{B} = \mathcal{R}^t$ mit einer t -stetigen, biperfekten Ordnungsstruktur \mathcal{R} .

BEWEIS. (a) \Rightarrow (b). Mit der Bezeichnung $\mathcal{B} = \{\prec\}$ besteht $\Xi(\mathcal{B})$ aus dem einzigen Filter $\mathfrak{U}(\prec) = \mathfrak{U}_0(\mathcal{B})$. Nach (1.11) ist $\mathcal{B} \sim \mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{B})}$, und man hat offenbar

$$\mathcal{R}_{\Xi(\mathcal{B})} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}^t,$$

somit

$$\mathcal{B} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}^t.$$

Weiterhin ist $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}$ eine total beschränkte syntopogene Struktur, und $\Xi(\mathcal{B})$ erfüllt (1.3), also $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0(\mathcal{B})$ erfüllt (2.6), d.h. [3], (3.19). Somit ist $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}$ gleichgradig translationsstetig ([3], (3.18)), und wir können $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}$ setzen.

(b) \Rightarrow (c). Mit \mathcal{S} ist $\mathcal{S}^{\text{so}} \sim \mathcal{S}$ ([1], (5.21)) ebenfalls eine total beschränkte syntopogene Struktur, und sogar ist sie translationsinvariant ([1], (5.20)).

(c) \Rightarrow (d). Ist \mathcal{S} eine total beschränkte, translationsinvariante syntopogene Struktur, so ist nach (2.8) $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}^b$ t -stetig, so daß $\mathcal{R} = \mathcal{S}^b$ gesetzt werden darf.

(d) \Rightarrow (a). Aus der $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}, \mathcal{R})$ -Stetigkeit von π folgt ihre $((\mathcal{R} \times \mathcal{R})^t, \mathcal{R}^t)$ -Stetigkeit nach [4], (10.12), d.h. die $(\mathcal{R}^t \times \mathcal{R}^t, \mathcal{R}^t)$ -Stetigkeit von π nach [4], (11.24). ■

(2.18) Für eine t -stetige, einfache Ordnungsstruktur \mathcal{B} sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) \mathcal{B} ist ϱ -stetig,
- (b) \mathcal{B}^p ist ϱ -stetig,
- (c) $\mathcal{B} = \mathcal{B}^s$,
- (d) $\mathcal{B} = \mathcal{S}^t$ mit einer ϱ -stetigen, total beschränkten, translationsinvarianten syntopogenen Struktur \mathcal{S} ,
- (e) $\mathcal{B} = \mathcal{S}^t$ mit einer total beschränkten, translationsinvarianten, symmetrischen syntopogenen Struktur \mathcal{S} ,
- (f) $\mathcal{B} = \mathcal{R}^t$ mit einer t -stetigen, symmetrischen, biperfekten Ordnungsstruktur \mathcal{R} ,
- (g) $\mathcal{B} = \mathcal{R}^t$ mit einer t -stetigen und ϱ -stetigen, biperfekten Ordnungsstruktur \mathcal{R} .

BEWEIS. (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) ergibt sich aus (2.13).

(a) \Rightarrow (d). Nach (2.15) ist $\mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}$ ϱ -stetig, und wir sahen im Beweis von (2.17), daß $\mathcal{B} = \mathcal{S}^t$ mit einer translationsinvarianten, total beschränkten syntopogenen Struktur \mathcal{S} , wobei $\mathcal{S} \sim \mathcal{R}_{\mathfrak{U}_0(\mathcal{B})}$.

(d) \Rightarrow (g). Nach (2.8) kann $\mathcal{R} = \mathcal{S}^b$ gesetzt werden.

(g) \Rightarrow (f). Nach (2.13) ist mit \mathcal{R} auch $\mathcal{R}^{sb} \sim \mathcal{R}$ t -stetig.

(f) \Rightarrow (e). Nach (2.8) ist \mathcal{R} eine total beschränkte, symmetrische und gleichgradig translationsstetige syntopogene Struktur, so daß $\mathcal{R}^{obs} \sim \mathcal{R}$ ([1], (5.21)) ebenfalls eine total beschränkte, symmetrische syntopogene Struktur und nach [1], (5.17) sogar translationsinvariant ist.

(e) \Rightarrow (c) ist trivial. ■

Literatur

- [1] Á. CSÁSZÁR, Syntopogene Gruppen I., *Math. Nachrichten*, 39 (1969), 1–20.
- [2] Á. CSÁSZÁR, Syntopogene Gruppen II. *Mathematica*, Cluj 13 (36) (1971), 25–50.
- [3] Á. CSÁSZÁR, Syntopogene Gruppen III, *Annales Univ. Sci. Budapest Sectio Math.*, 14 (1971), 23–52.
- [4] Á. CSÁSZÁR, *Grundlagen der allgemeinen Topologie* (Budapest – Leipzig, 1963).

ON GROUPS ADMITTING A SCATTERED ORDERING*

By

ANNE C. MOREL

Department of Mathematics, University of Washington

(Received July 13, 1970)

This paper is concerned with groups admitting a scattered linear order, i.e., a linear order with no dense suborder. Such groups will be referred to as *SO*-groups. The class of *SO*-groups is a subclass of the class of groups admitting a discrete ordering: Abelian discretely ordered groups have been studied in [10] and [13]. In [9], it is shown that an Abelian group \mathbb{G} admits a scattered ordering if and only if \mathbb{G} is free Abelian. In this note, we show that there exist non-Abelian *SO*-groups; in fact, a free nilpotent group with arbitrarily many generators is an *SO*-group. The structure of *SO*-groups is investigated. It is proved that every *SO*-group is an *N*-group, consequently is locally nilpotent, and hence is an *O*^{*}-group.

Notation and definitions explained in [9] (as opposed to notation and definitions mentioned in [9] but therein referred back to other sources for meaning) will not be repeated here. Also, familiar notions of the theory of ordered groups that are discussed in [1] will not be defined here. An *ordered group* will be considered as an ordered four-tuple

$$\mathfrak{OG} = (G, \cdot, -, \leq);$$

the unit element of \mathbb{G} will be written as e . If m is a cardinal, then \mathfrak{FA}_m denotes the free Abelian group with m generators and $(^m)\mathbb{F}$ the free group with m generators. A group $\mathbb{G} = (G, \cdot, -)$ is an *N*-group, or *satisfies the normalizer condition*, if for every proper subgroup $H = (H, \cdot, -)$, the set H is properly included in $\{g : g \in G \text{ and } g^{-1}Hg = H\}$. If $g, h \in G$, by the commutator $[g, h]$ is meant $ghg^{-1}h^{-1}$. The *center* of the group G is, of course,

$$\{a : a \in G \text{ and } [a, g] = e \text{ for all } g \in G\}.$$

* This research was supported in part by National Science Foundation grant GP-12189.

The set above will be called $\text{cen}(\mathfrak{G})$, while the subgroup $(\text{cen}(\mathfrak{G}), \cdot, ^{-})$ will be denoted by $\text{Cen}(\mathfrak{G})$. For any group, we put $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}$ and $\mathfrak{G}_{n+1} = [\mathfrak{G}_n, \mathfrak{G}]$ for all $n \geq 0$. The *free nilpotent group of class p with m generators*, where $p \geq 0$, is the group ${}^{(m)}\mathfrak{G}_p / {}^{(m)}\mathfrak{F}_p$.

The order type of the relation \leq will be denoted by $\tau(\leq)$. If $a \leq b$, then (a, b) denotes the open interval with endpoints a and b . The symbol \cong will be used for isomorphism between relations as well as isomorphism between groups. If α, β are the order types of R and S respectively, and if R is isomorphic to a subrelation of S , we write $\alpha \mathcal{L} \beta$; the negation is written $\alpha \bar{\mathcal{L}} \beta$. An ordering relation R is *one-point homogeneous*, if for every x, y in the domain of R , there is an automorphism f of R such that $f(x) = y$. For any set N , the symbol $N \times N$ denotes the Cartesian product of N by itself. If R is a relation, by $R(N)$ we mean $R \cap (N \times N)$. The symbol ω denotes the order type of the natural numbers in their usual order. Let α be the order type of the relation R ; then α^* is the type of the inverse of R . The notions of sums of order types over an ordinal and of products of order types will be assumed; for relevant definitions see [7].

It was shown in [8] that if \leq is a scattered linear ordering of the group \mathfrak{G} , then the order type of \leq is $(\omega^* + 1 + \omega)_0^\varphi$, for some (not necessarily unique) ordinal φ , i.e., \leq is the order type of all φ -termed sequences of integers that are almost everywhere zero, ordered antilexicographically.

LEMMA 1. Suppose $\mathfrak{OG} = (G, \cdot, ^{-}, \leq)$, where $\tau(\leq) = (\omega^* + \omega) \cdot \pi$ for some order type $\pi \neq 0$. Then \mathfrak{OG} has an ordered subgroup $\mathfrak{OH} = (H, \cdot, ^{-}, \leq_H)$ with the following properties:

- (i) $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{A}_1$.
- (ii) $H \subseteq \text{cen}(\mathfrak{G})$.
- (iii) \mathfrak{OH} is a convex subgroup of \mathfrak{OG} .

PROOF. Since $\tau(\leq) = (\omega^* + \omega) \cdot \pi$, it is easily seen that there exists an element $a \in G$ with the properties

$$(1) \quad e < a,$$

and

$$(2) \quad \text{There is no } x \in G \text{ such that } e < x < a.$$

Put

$$H = \{a^n : n \text{ is an integer}\}.$$

Clearly $\mathfrak{OH} = (H, \cdot, ^{-}, \leq_H)$ is a convex subgroup of \mathfrak{OG} and satisfies (i).

Now assume that (ii) is false. Then there is a $c \in G$ and an integer n such that $[a^n, c] \neq e$ and hence $[a, c] \neq e$. For definiteness, assume that

$$(3) \quad e < ca < ac.$$

Then by (1) and (3),

$$e < cac^{-1} < a,$$

in contradiction to (2).

An obvious consequence of Lemma 1 is that no discretely ordered group is centerless.

THEOREM 2. *If \mathfrak{G} is a free nilpotent group, then \mathfrak{G} is an SO-group. In particular, the free nilpotent group of class 2 with two generators admits the ordering $(\omega^* + \omega)^q$.*

PROOF. Recall that the free nilpotent group of class p with m generators is $(^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p)$. The lemma will be proved by induction on p . First, we need the statements (1)–(5) below.

(1) $\tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{A}_m$ admits the ordering $(\omega^* + 1 + \omega)_0^q$, where q is any ordinal of cardinality m .

$$(2) \quad (^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1}) \cong \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{A}_n \text{ for some cardinal } n.$$

$$(3) \quad (^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p) \cong ((^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1}) / (^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1})).$$

$$(4) \quad (^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1}) \text{ is a subgroup of } \text{Cen}((^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1})).$$

(5) If the group $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ admits an ordering of type π , it \mathfrak{H} is a subgroup of $\text{Cen}(\mathfrak{G})$, and if \mathfrak{H} admits an ordering of type θ , then \mathfrak{G} admits an ordering of type $\theta \cdot \pi$.

The statement (1) is proved in [9], p. 206, Theorem 10 (i); (2) was proved by WITT and is stated in [6], p. 41; (3) is familiar; (4) is proved in [5], p. 151, Corollary 10.2.1; (5) is a variant of [2], p. 94, Theorem 4.

If $p=0$, then the free group with m generators of class p is simply the one-element group, which admits the order $(\omega^* + \omega)^0$. Now assume that $(^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p)$ is an SO-group. Put

$$\mathfrak{G} = (^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1});$$

$$\mathfrak{H} = (^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_p / ^{(m)}\tilde{\mathfrak{F}}_{p+1}).$$

By (2) and (1), one obtains

(6) \mathfrak{H} admits the order $(\omega^* + 1 + \omega)_0^\theta$ for some θ ; while from (3) and the inductive hypothesis one gets

(7) $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ admits the order $(\omega^* + 1 + \omega)_0^\pi$ for some π .

Now using (4), (5), (6), (7) we see that \mathfrak{G} admits the ordering $(\omega^* + 1 + \omega)_0^{\theta \cdot \pi}$, and the lemma is proved.

To verify the special case, note that

$${}^{(2)}\tilde{\mathfrak{F}}_0 / {}^{(2)}\tilde{\mathfrak{F}}_1 \cong \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{A}_2,$$

and

$${}^{(2)}\tilde{\mathfrak{F}}_1 / {}^{(2)}\tilde{\mathfrak{F}}_2 \cong \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{A}_1.$$

THEOREM 3.

(i) If $\mathcal{D}\mathfrak{G} = (G, \cdot, \tau, \leq)$, where $\tau(\leq) = \omega^* + \omega$ or $\tau(\leq) = (\omega^* + \omega)^2$, then $\mathfrak{G} \cong \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{A}_1$ or $\mathfrak{G} \cong \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{A}_2$.

(ii) If φ is an ordinal with $3 \leq \varphi$, then there exists a non-Abelian group \mathfrak{G} such that \mathfrak{G} admits the order $(\omega^* + 1 + \omega)_0^\varphi$.

PROOF. Clearly, if \mathfrak{G} admits the order $\omega^* + \omega$, then $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{FA}_1$. Now suppose that

$$(1) \quad \mathfrak{OG} = (G, \cdot, ^-, \leq), \text{ where } \tau(\leq) = (\omega^* + \omega)^2.$$

By Lemma 1, there exists a convex ordered subgroup $\mathfrak{O}\mathfrak{H} = (H, \cdot, ^-, \leq_H)$ of \mathfrak{OG} such that

$$(2) \quad \mathfrak{H} \cong \mathfrak{FA}_1, \text{ and } H \subseteq \text{cen}(\mathfrak{G}).$$

We note that

$$(3) \quad \text{For each } a \in G, a/H \text{ is an interval of } \leq.$$

Now put

$$(4) \quad a/H \leq' b/H \text{ if } a/H = b/H \text{ or } a/H \text{ precedes } b/H.$$

By (1), (2), (3), (4), we get

$$(5) \quad \tau(\leq') = \omega^* + \omega.$$

It is easy to check that $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ admits the order $\omega^* + \omega$; hence

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \cong \mathfrak{FA}_1.$$

Using (3), one notes that \mathfrak{G} is a central extension of \mathfrak{FA}_1 by \mathfrak{FA}_1 ; therefore $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{FA}_2$.

Suppose that φ is an ordinal with $3 \leq \varphi$. Then for some φ' ,

$$\varphi = 3 + \varphi'.$$

Let m be the cardinality of φ' . By (1) of Theorem 2, \mathfrak{FA}_m admits the ordering $(\omega^* + 1 + \omega)_0^{\varphi'}$. Now let \mathfrak{G} be the direct product of the free nilpotent group ${}^{(2)}\mathfrak{F}/{}^{(2)}\mathfrak{F}_2$ by \mathfrak{FA}_m . Using Theorem 2, we see that \mathfrak{G} admits the ordering

$$(\omega^* + \omega)^3 \cdot (\omega^* + 1 + \omega)_0^{\varphi'}.$$

Now, using the last equation of p. 203 of [8], we conclude that the non-Abelian group \mathfrak{G} admits the ordering $(\omega^* + 1 + \omega)_0^{\varphi}$.

The structure of SO -groups will now be examined. In order to do so, we need a rather detailed investigation of the order structure.

LEMMA 4. Let $\mathfrak{OG} = (G, \cdot, ^-, \leq)$ be an ordered group, let $a, b, c \in G$. Then the intervals $\leq \langle(a, b)\rangle$, $\leq \langle(ac, bc)\rangle$, and $\leq \langle(ca, cb)\rangle$ are isomorphic.

PROOF. Obvious. Lemma 3 will usually be used without explicit reference.

Lemma 7 below was employed without proof in [9]; instead of continuing in this rather dubious practice, we give a sketchy proof. Lemmas 5 and 6 are preliminary to Lemma 7.

LEMMA 5.

(i) Let $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ be order types. If $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, then either
 (a) There is a type ε such that $\alpha = \gamma + \varepsilon$ and $\delta = \varepsilon + \beta$,

or

(b) There is a type ε such that $\gamma = \alpha + \varepsilon$ and $\delta = \varepsilon + \beta$.

(ii) If α is a scattered, then $(\alpha + \alpha) \not\leq \alpha$.

(iii) Suppose $\alpha, \beta \neq 0$. Then $\alpha + \beta = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\#$ if and only if there is a $\lambda < \varphi$ such that

$$\alpha = \left(\sum_{\lambda \leq i < \varphi} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] \right)^*,$$

$$\beta = \sum_{\lambda \leq i < \varphi} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega].$$

(iv) If $\alpha = \beta + \alpha + \gamma$, then for some type ε , $\alpha = \beta \cdot \omega + \varepsilon + \gamma \cdot \omega^*$.

PROOF. Part (i) is elementary. A proof of (ii) can be found in [3], p. 519, Lemma 1.4. Part (iii) follows from [12], p. 16, Theorem 4. A proof of (iv) is given in [11], p. 22, Theorem 1.37.

By [8], p. 213, Theorem, every relation R of type $(\omega^* + 1 + \omega)_0^\#$ is one-point homogeneous. Suppose $\mathfrak{OG} = (G, \cdot, \neg, \leq)$, with $\tau(\leq) = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\#$. Then we can put

$$e = \langle 0, \dots, 0, \dots \rangle$$

and consider each $g \in G$ as a φ -termed sequence of integers that is almost always 0. Let $\mu < \varphi$. The element g satisfying the conditions:

$$g_\mu = 1; g_i = 0 \text{ for } i < \varphi \text{ and } i \neq \mu,$$

will be written as $g_{(\mu)}$. Moreover, if $g \in G, g \neq e$, we put

$$M(g) = \text{Max} \{i : i < \varphi \text{ and } g_i \neq 0\},$$

and put

$$M(e) = -1.$$

LEMMA 6. Suppose $\mathfrak{OG} = (G, \cdot, \neg, \leq)$, where $\tau(\leq) = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\#$, suppose $g, g' \in G$ and $g < g'$. Let μ be the largest ordinal such that $g_\mu \neq g'_\mu$. Then the order type of $\preceq \langle (g, g') \rangle$ is

$$\begin{aligned} & \sum_{i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] + (\omega^* + 1 + \omega)_0^\# \cdot ((g'_\mu - g_\mu) - 1) + \\ & + \left(\sum_{i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] \right)^*. \end{aligned}$$

PROOF. The proof follows easily from Lemma 5 (iii).

For brevity the order type above will be written as $(\mu; n)$, where $n = (g'_\mu - g_\mu) - 1$.

LEMMA 7. If $(\mu; n) = (\zeta; p)$, then $\mu = \zeta$ and $n = p$.

PROOF. First assume $\mu < \zeta$. Put

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega], \\ \beta &= (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot n + (\sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega])^*, \\ (1) \quad \gamma &= \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega], \\ \delta &= (\omega^* + 1 + \omega)_0^\zeta \cdot p + (\sum_{i<\zeta} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega])^*. \end{aligned}$$

By hypothesis,

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Suppose Lemma 5 (i) (a) holds, i.e.,

$$(2) \quad \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] = \sum_{i<\zeta} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] + \varepsilon \text{ for some } \varepsilon.$$

Note that

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{i<\zeta} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] &= \\ \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] + (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot \omega + \sum_{\mu < i < \zeta} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega]. \end{aligned}$$

By Lemma 5 (iii),

$$(4) \quad (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu = (\sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega])^* + \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega].$$

Using (2), (3), (4) successively, one obtains

$$(\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot \omega \not\leq \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] \not\leq (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu,$$

and hence

$$(\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot 2 \not\leq (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu,$$

in contradiction to Lemma 5 (ii). When Lemma 5 (i) (b) holds, a rather similar argument also arrives at a contradiction to Lemma 5 (ii).

Now suppose $\mu = \zeta$ and $0 \leq n < p$. Let

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega + (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot n], \\ \beta &= (\sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega])^*, \\ (5) \quad \gamma &= \sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] + (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot n, \\ \delta &= (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot (p - n) + (\sum_{i<\mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega])^*. \end{aligned}$$

We need to consider two cases:

$$(6) \quad \alpha = \gamma + \varepsilon \text{ and } \delta = \varepsilon + \beta \text{ for some } \varepsilon \neq 0;$$

$$(7) \quad \gamma = \alpha + \varepsilon \text{ and } \beta = \varepsilon + \delta \text{ for some } \varepsilon.$$

Suppose (6) holds; using (5), the second equation of (6), and Lemma 5 (iii), one obtains

$$(8) \quad \varepsilon = \left(\sum_{\lambda \leq i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] \right)^* + \varkappa$$

for some \varkappa and some $\lambda < \mu$.

From (6) and (8), it follows that

$$\begin{aligned} \sum_{i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] + (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot n &= \\ \sum_{i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] + (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot n &= \left(\sum_{\lambda \leq i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] \right)^* + \varkappa \end{aligned}$$

for some $\lambda < \mu$.

Using the above identity and Lemma 5 (iv), we readily obtain

$$(9) \quad \left(\sum_{i < \mu} [(\omega^* + 1 + \omega)_0^i \cdot \omega] \right)^* \cdot \omega^* \not\ll (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu \cdot (n+1);$$

however, one can easily show, using Lemma 5 (ii), (iii), that (9) is impossible. Finally, the second equation of (7) is clearly false.

LEMMA 8. Let $\mathfrak{D}\mathfrak{G} = (G, \cdot, ^-, \leq)$, where $\tau(\leq) = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\mu$; let $\mu < \varphi$. Then

$$\tau(\leq \langle (e, g_{(\mu)}^m) \rangle) = (\mu; m-1) \text{ for all integers } m \neq 0.$$

PROOF. By Lemma 6,

$$(1) \quad \tau(\leq \langle (e, g_{(\mu)}) \rangle) = (\mu; 0);$$

hence (i) holds for $m=1$. Now assume that (i) holds for some positive m . Note that

$$(2) \quad \tau(\leq \langle (e, g_{(\mu)}) \rangle) = \tau(\leq \langle (g_{(\mu)}^m, g_{(\mu)}^{m+1}) \rangle).$$

By (1), (2) and Lemma 7,

$$(3) \quad (g_{(\mu)}^m)_\mu \neq (g_{(\mu)}^{m+1})_\mu,$$

and

$$(4) \quad (g_{(\mu)}^m)_i = (g_{(\mu)}^{m+1})_i \text{ for } \mu < i < \varphi.$$

By the inductive hypothesis and Lemma 7,

$$(5) \quad (g_{(\mu)}^m)_i = 0 \text{ for } \mu < i < \varphi,$$

and

$$(6) \quad (g_{(\mu)}^m)_\mu = m-1.$$

From (4) and (5),

$$(7) \quad (g_{(\mu)}^{m+1})_i = 0 \text{ for } \mu < i < \varphi.$$

From (1), (2), (3), (6), we obtain

$$(8) \quad (g_{(\mu)}^{m+1})_\mu = m.$$

Now by (7), (8), and Lemma 6, (i) holds for $m+1$. One can easily check that (i) also holds for negative m .

Let $\mathfrak{D}\mathfrak{G} = (G, \cdot, -, \leq)$, with $\tau(\leq) = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\varphi$. For each $\theta \leq \varphi$, we define

$$H_\theta = \{g : g \in G \text{ and } g_i = 0 \text{ for all } i \text{ with } \theta \leq i < \varphi\}.$$

THEOREM 9. Let $0 \leq \theta < \varphi$. Then $\mathfrak{D}\mathfrak{H}_\theta = (H_\theta, \cdot, -, \leq_{H_\theta})$ is a convex normal subgroup of $\mathfrak{D}\mathfrak{G} = (G, \cdot, -, \leq)$.

PROOF. The fact that $\mathfrak{D}\mathfrak{H}_\theta$ is a convex subgroup when \mathfrak{G} is Abelian was proved in [9], p. 201ff, Lemma 5. The proof is applicable with no essential change. The normality of \mathfrak{H}_θ follows easily from Lemmas 6 and 7. (In [4], p. 258, Lemma, it is shown that every convex subgroup of a locally nilpotent O -group is a normal subgroup. By Corollary 12 below, which does not make use of Theorem 9, every SO -group is locally nilpotent.)

THEOREM 10. Let $\mathfrak{D}\mathfrak{G} = (G, \cdot, -, \leq)$, where $\tau(\leq) = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\varphi$. Then

(i) \mathfrak{G} is generated by $\{g_{(\mu)} : 0 \leq \mu < \varphi\}$.

(ii) If $g \in G$ and $g \neq e$, then g is uniquely representable in the form

$$g_{(\mu_1)}^{m_1} \cdots g_{(\mu_n)}^{m_n},$$

where $\mu_1 < \dots < \mu_n$ and none of the m_i 's is zero.

PROOF. We prove by induction on m that

$$(I) \quad \text{For } 1 \leq \mu \leq \varphi, H_\mu \text{ is generated by } \{g_{(\mu)} : i < \mu\}.$$

Obviously (I) holds for $m=1$; now assume that (I) holds for all $i \leq \mu$ and suppose

$$g \in H_{\mu+1} - H_\mu.$$

By Lemmas 6, 7, and 8, there exists an m such that

$$(2) \quad (g_{(\mu)}^m)_i = g_i.$$

Using (2), and Lemmas 6 and 7, we easily conclude that

$$g = h(g_{(\mu)})^m \text{ where } h \in H_\pi \text{ for some } \pi \leq \mu,$$

and hence, by the inductive hypothesis, (I) holds for $\mu+1$. There is no problem in extending (I) when μ is a limit ordinal.

The representation (ii) follows from a simple induction using (I), Lemma 7 and Lemma 8. Then unicity is a consequence of (i) and the obvious inequality:

$$M(gh) \leq \max(M(g), M(h)).$$

THEOREM 11. Every SO-group is an N-group.

PROOF. Let $\mathfrak{OG} = (G, \cdot, -, \leq)$, where $\tau(\leq) = (\omega^* + 1 + \omega)_0^\varphi$.

Suppose $\mathfrak{H} = (H, \cdot, -, \leq_H)$ is a subgroup of \mathfrak{G} with $H \subset G$. In order to show that \mathfrak{G} satisfies the normalizer condition, we need to find a $g \in G - H$ satisfying the following conditions:

- (1) For every $h \in H$, $g^{-1}hg \in H$;
- (2) For every $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

Since \mathfrak{H} is a proper subgroup of \mathfrak{G} , we can pick the smallest $\varrho < \varphi$ such that

$$H_\varrho \subseteq H.$$

Obviously, $\varrho \neq 0$. Choose a $g \in H_\varrho - H$. Now for $h \in H$,

$$(3) \quad ghg^{-1} = [g, h]h;$$

Using Lemmas 4, 6, 7, and deleting the trivial case $h = e$, we obtain

$$(4) \quad M([g, h]) < \min(M(g), M(h)).$$

Now by (3), (4) and the fact that $[g, h] \in H_\zeta$ for some $\zeta < \varrho$, we obtain (1). Similarly, we obtain (2).

COROLLARY 12. Every SO-group is locally nilpotent.

PROOF. It was proved by PLOTKIN, see [6], p. 224, Theorem, that every N-group is locally nilpotent.

Note that Corollary 12 becomes false if *nilpotent* is substituted therein for *locally nilpotent*. For instance, the (weak) direct product of the free nilpotent groups with two generators of class n , $n = 1, 2, 3, \dots$, is, from Theorem 2, an SO-group; clearly this group is not nilpotent.

COROLLARY 13. Every SO-group is an O^* -group.

PROOF. MAL'CEV proved (see [1], p. 66, Satz 17) that every locally nilpotent torsion-free group is an O^* -group. Now apply Corollary 12.

We conclude with a question. It is possible to find a reasonable group-theoretical characterization of SO-groups?

References

- [1] FUCHS, L., *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.
- [2] FUCHS, L., *On orderable groups*, Proceedings of the International Conference on the Theory of Groups. Gordon and Breach, New York – London – Paris 1967, 89 – 98.
- [3] GINSBURG, S., Some remarks on order types and decompositions of sets, *Trans. AMS*, 74 (1953), 514 – 535.

- [4] GRAHAM, G. P., Full Orders and Their Families of Convex Subgroups on Locally Nilpotent Groups, *J. Algebra*, 8 (1968), 257–261.
- [5] HALL, M. Jr., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1964.
- [6] KUROSH, A. G., *The Theory of Groups*, Vol. II, Chelsea, New York, 1956.
- [7] MOREL, A. C., On the arithmetic of order types, *Trans. AMS*, 92 (1959), 48–71.
- [8] MOREL, A. C. A class of relation types isomorphic to the ordinals, *Michigan Math. J.*, 12 (1965), 203–215.
- [9] MOREL, A. C., Structure and order structure in Abelian groups, *Colloq. Math.* 19 (1968), 199–209.
- [10] ROBINSON, A. and ZAKON, E., Elementary properties of ordered Abelian groups, *Trans. AMS*, 92 (1959), 48–71.
- [11] TARSKI, A., *Ordinal Algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
- [12] VENKATARAMAN, R., Symmetric ordered sets, *Math. Z.*, 79 (1962), 10–20.
- [13] ZAKON, E., Generalized archimedean groups, *Trans. AMS*, 99 (1961), 21–40.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУММ ВИДА $\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j t)$

Г. А. МИСЯВИЧУС

Государственный Университет, Вильнюс

(Поступило 12. 08. 1970)

§1. Формулировка результатов

Каждое вещественное число интервала $(0, 1)$ единственным образом разлагается в цепную дробь

$$t = [0; a_1(t), a_2(t) \dots] = [a_2(t), a_1(t) \dots],$$

где все $a_j(t)$ — натуральные числа, являющиеся функциями от t . Пусть Tt — преобразование отрезка $(0, 1)$ в себя, задаваемое соотношением

$$Tt = T[a_1(t), a_2(t) \dots] = [a_2(t), a_3(t) \dots],$$

что эквивалентно

$$Tt = \left\{ \frac{1}{t} \right\}$$

(фигурные скобки означают дробную часть). Обозначим $\text{mes} \{ \cdot \}$ меру множества тех $t \in (0, 1)$ для которых выполнены условия, указанные в скобках. Положим

$$S_n = S_{on} = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ f(T^j t) - \int_0^1 f(T^j t) dt \right\}, \quad S_{kl} = \sum_{j=k}^{l-1} \left\{ f(T^j t) - \int_0^1 f(T^j t) dt \right\} \\ (1 \leq k \leq l \leq n)$$

$$B_n^2 = DS_n, \quad Z_n = \frac{S_n}{B_n}, \quad \text{где } DS_n = \int_0^1 (S_n(t) - MS_n)^2 dt.$$

Пусть, далее

$$F_n(x) = \text{mes} \left\{ \frac{S_n(t)}{B_n} < x \right\}, \quad \varphi_S(\tau) = \int_0^1 e^{itS(t)} dt.$$

И. А. ИБРАГИМОВЫМ выяснены условия, при которых функции распределения $F_n(x)$ стремятся к нормальному закону. В работах Д. А. МОСКВИНА и автора оцениваются остаточные члены в предельных соотношениях. В настоящей работе найдены асимптотические разложения для $F_n(x)$. Попутно получена также оценка остаточного члена, лучше чем в [5].

Сформулируем наши теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Для некоторого натурального $s \geq 3$

$$(1.1) \quad \int_0^1 |f(t)|^s dt < \infty.$$

2. Для любого $h > 0$ выполнено неравенство

$$(1.2) \quad \int_0^1 |f(t+h) - f(t)|^s dt \leq c_1 h^{\alpha s},$$

где c_1 и $\alpha > 0$ некоторые положительные постоянные.

3.

$$(1.3) \quad DS_n \rightarrow \infty.$$

4. Существует такое $\delta > 0$, что для любых $k < l$, $|l-k| \leq \bar{c}_1 \log n$ мера множества значений S_{kl} большие δ .

Тогда

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{r=1}^{s-3} Q_{rn}(x) L_{sn}^{\frac{r}{s-2}} + \theta_s L_{sn} + \theta'_s \log n \cdot e^{-\theta''_s B_n},$$

в случае $s=3$ сумму будем считать претой. Здесь

$$L_{rn} = \frac{\log_n^{r-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 |f(T^k t) - \int_0^1 (T^k t) dt|^r dt}{B_n^r}$$

$Q_{rn}(x)$ — полиномы степени $3r$, с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами*,

$\Phi(x)$ — функция распределения нормального закона.

Здесь и в дальнейшем $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, c, A, B$ с номерами или без номеров, означают абсолютные или зависящие от s константы.

* Явные выражения для коэффициентов этих полиномов можно получить таким же способом, как это сделано в теореме 7 работы [1]

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия (1.1), (1.2) и (1.3) предыдущей теоремы, то

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{c_0 c_s \log^{s-2} n}{\sqrt{n}},$$

где для константы c_s справедлива оценка

$$|c_s| \leq 2 \int_0^1 |f(t)|^s dt.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (1.2) и (1.3) теоремы 1. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия

$$(1.4) \quad |f(t)| \leq c_2 |\log t| + \bar{c}_2,$$

2. Существует функция $\varepsilon_n \rightarrow 0$, такая, что $\varepsilon_n B_n \rightarrow \infty$, для которой: а)

$$(1.5) \quad \int_{|t| > \varepsilon_n} |\varphi_{S_n}(t)| dt \leq \bar{L}_{sn} \cdot \varepsilon_n,$$

б) при любом наборе $1 = k_1 \leq l_1 \leq \dots \leq l_i \leq k_i \leq \dots \leq k_{N_n} \leq l_{N_n} = n$ где $l_i - k_i \leq c_3 \log n$,

$$(1.6) \quad \omega_n = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^{N_n} \int_{|x| > \frac{1}{\varepsilon_n}} x^2 dF_{S_{k_i l_i}}(x) \rightarrow 0.$$

Тогда

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{r=1}^{s-3} Q_{rn}(x) \bar{L}_{r+2, n} + \Theta \bar{L}_{sn} + \\ + c' \bar{L}_{3n} \exp \{-c'' \bar{L}_{3n}^{-2} (1 - \omega_n)\}.$$

Относительно полиномов $Q_{rn}(x)$ и суммы в случае $s=3$ остается в силе определения теоремы 1.

Здесь

$$(1.7) \quad \bar{L}_{rn} = \left(\frac{\log^2 n}{B_n} \right)^{r-2}.$$

Теорема 3 покрывается теоремой 1. Ради сокращения объема приведем лишь доказательство теоремы 3, так как общий план доказательства такой же и в случае теоремы 1. Теорема 2 получается по ходу доказательства теоремы 1.

§2. Свойства элементов цепных дробей.

Введем в рассмотрение два вероятностных пространства $\{T, F, m\}$ и $\{T, F, \mu\}$ где $T = (0, 1)$, F — σ -алгебра лебеговских множеств, μ -мера Гаусса, определяемая формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dt}{1+t}.$$

В отношении этих пространств последовательность $\{a_j(t)\}$ станет последовательностью случайных величин. В работе [5] автора показано, используя результаты И. А. ИБРАГИМОВА [9] и П. СЮСА [10], что последовательность $\{a_j(t)\}$ удовлетворяет условиям равномерного сильного перемешивания по отношению к обеим пространствам: для всех $A \in F_{1,k}$, $B \in F_{k+n,\infty}$

$$(2.1) \quad \sup_{A, B} \sup_k |m(AB) - m(A)m(B)| \leq \psi(n)m(A)m(B)$$

где $\psi(n) \leq A_1 e^{-\alpha_1 n}$. Через F_{ab} обозначается минимальная σ -алгебра множеств из F порожденная множествами (событиями) вида:

$$\{a_{l_1}(t) = i_1, \dots, a_{l_s}(t) = i_s\}, \quad a \leq l_1 \leq \dots \leq l_s \leq b.$$

Функцию $\psi(n)$ в неравенстве (2.1) будем называть „коэффициентом перемешивания“. По отношению к мере μ также имеет место неравенство, аналогичное неравенству (2.1), причем „коэффициент перемешивания“ убывает экспоненциально. Степень близости мер μ и m оценивается с помощью неравенства: для $A \in F_{n,\infty}$

$$(2.2) \quad |\mu(A) - m(A)| \leq D e^{-\delta_1 n}.$$

Как показано ИБРАГИМОВЫМ [9], по отношению к мере μ величины $a_j(t)$ стационарны. Моменты и дисперсии случайных величин по отношению к этой мере будем обозначать соответственно M_μ и D_μ . В дальнейшем нам понадобятся следующие оценки: для любой случайной величины ζ имеет место

$$(2.3) \quad M_\mu(\zeta - M_\mu \zeta)^2 \leq M_\mu(\zeta - M_\mu \zeta)^2 \leq \frac{1}{\log 2} M(\zeta - M_\mu \zeta)^2,$$

$$M(\zeta - M_\mu \zeta)^2 \leq M(\zeta - M_\mu \zeta)^2 \leq 2M_\mu(\zeta - M_\mu \zeta)^2.$$

Из свойств непрерывных дробей выведем следующее утверждение:

ЛЕММА 1. Для элементов цепной дроби имеет место

$$\sup_{0 \leq j \leq n} \sup_{\substack{A \in F_{0,j}, \\ C \in F_{j+k,n}, \\ B \in F_{j,j+k}}} |m(C/AB) - m(C/B)| \leq \chi(k) = B_1 e^{-\beta_1 k}.$$

Здесь $m(A/B)$ -условная мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как σ алгебры F_{ij} порожденные функциями, принимающие лишь целочисленные значения, то достаточно доказать справедливость соотношения

$$(2.4) \quad \left| \frac{\operatorname{mes} \{a_1 = i_1, \dots, a_n = i_n\}}{\operatorname{mes} \{a_1 = i_1, \dots, a_{j+k} = i_{j+k}\}} - \frac{\operatorname{mes} \{a_{j+1} = i_{j+1}, \dots, a_n = i_n\}}{\operatorname{mes} \{a_{j+1} = i_{j+1}, \dots, a_{j+k} = i_{j+k}\}} \right| \leq \tilde{A} \varrho^k$$

причем константы в правой части неравенства не зависят от j, k и n , $\varrho < 1$.

Докажем справедливость неравенства

$$(2.5) \quad \left| \frac{\operatorname{mes} \{a_1 = i_1, \dots, a_n = i_n\}}{\operatorname{mes} \{a_1 = i_1, \dots, a_{j+k} = i_{j+k}\}} - \frac{\operatorname{mes} \{a_1 = i_1, \dots, a_j = i_j, a_{j+1} = i_{j+1}, a_n = i_n\}}{\operatorname{mes} \{a_1 = i_1, \dots, a_j = i_j, a_{j+1} = i_{j+1}, \dots, a_{j+k} = i_{j+k}\}} \right| \leq \tilde{A}_1 \varrho^k.$$

Обозначим, как обычно $\frac{p_n}{q_n}$ — n -тую подходящую дробь, r_n — остаток цепной дроби.

Интервал $I_2 = E \left(\frac{1}{i_1 \dots i_n} \dots n \right)$ состоит из точек интервала $I_1 = \left(\frac{1}{i_1 \dots i_{k+j}} \dots k+j \right)$, для которых выполнено неравенство

$$S_1 = [i_{j+k+1}; i_{j+k+2}, \dots, i_n] \leq r_{j+k+1} \leq [i_{j+k+1}; i_{j+k+2}, \dots, i_n + 1] = S_2.$$

Таким образом, концами интервала I_2 будут точки

$$(2.6) \quad \frac{p_{k+j} S_1 + p_{k+j-1}}{q_{k+j} S_1 + q_{k+j-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_{k+j} S_2 + p_{k+j-1}}{q_{k+j} S_2 + q_{k+j-1}}.$$

Подставляя в выражения (2.6) $\tilde{p}_{k+j-1}, \dots, \tilde{q}_{k+j}$ т.е. подходящие дроби, соответствующие интервалам

$$J_2 = E \left\{ \frac{1}{i_1 \dots i_p i_{j+1} \dots i_n} \dots j+1 \dots n \right\}, \quad J_1 = E \left\{ \frac{1}{i_1 \dots i_p i_{j+1} \dots i_{j+k}} \dots j+k \right\}$$

найдем конечные точки этих интервалов. Длины интервалов I_1, I_2 соответственно равны

$$\frac{1}{q_{j+k}(q_{j+k} + q_{j+k-1})} \quad \text{и} \quad \frac{|S_1 - S_2|}{(q_{j+k} S_1 + q_{j+k-1})(q_{j+k} S_2 + q_{j+k-1})}.$$

Подставляя сюда $\hat{p}_{j+k-1}, \dots, \hat{q}_{j+k}$ получаем выражения для длии интервалов J_1, J_2 . Принимая во внимание, что

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \dots]$$

а также неравенства

$$\left| z - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad \text{и} \quad q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$$

убеждаемся в справедливости неравенства (2.5) с константами $\tilde{A}_1 < 4$, $\tilde{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Умножая обе части этого неравенства на $\text{mes } \{a_1 = l_1, \dots, a_j = l_j, a_{j+1}, \dots, l_{j+1}, a_n = l_n\}$ и суммируя по l_1, \dots, l_j получим неравенство (2.4).

Лемма доказана.

§3. Основные леммы.

Следуя [9], функции $f(T^j t)$ будем аппроксимировать величинами $f([a_j, \dots, a_{j+k}])$. К случайным величинам такого вида применима разработанная В. А. СТАТУЛЯВИЧУСОМ теория суммирования слабозависимых случайных величин. Условие (1.2) обеспечивает нам необходимую точность аппроксимации.

Введем обозначения

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \zeta_j &= f(T^j t) - \int_0^1 f(T^j t) dt, \\ \eta_j^k &= f([a_j, \dots, a_{j+k}]) - \int_0^1 ([a_j, \dots, a_{j+k}]) dt, \quad \zeta_j^k = \zeta_j - \eta_j^k. \end{aligned}$$

$g_s(z)$ — производящая функция случайной величины s , $F_r(s)$ — r -ый семинивариант. Смысл обозначений S_n, S'_{lm}, B'_n, Z'_n , которые относятся к величинам η_j^k очевиден.

Оценим погрешность, которая возникает при замене S_n на S'_{lm} а также получим необходимые оценки для дисперсий.

ЛЕММА 2. Имеют место неравенства

$$(3.2) \quad I. |DS_{lm} - DS'_{lm}| \leq c_4 e^{-\lambda_1 k} (m-l)$$

$$(3.3) \quad II. C_b(m-l) \leq DS_{lm} \leq c_6(m-l).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как величины η_j^k зависят лишь от $k+1$ величины $a_j \dots a_{j+k}$, то последовательность $\{\eta_j^k\}$ удовлетворяет усло-

вию равномерного сильного перемешивания, причем из (2.1) следует, что выполнено неравенство

$$(3.4) \quad \sup_{A \in F_{1, l}} \sup_{\substack{(i) \\ B \in F_{l+m_i}(\eta)}} |m(AB) - m(A)m(B)| \leq \psi_n(m)m(A)m(B)$$

где F_{ab} — σ -алгебра, порожденная последовательностью $\{\eta_j^k\}$, а коэффициент перемешивания удовлетворяет неравенству

$$(3.5) \quad \psi_n(m) \leq \begin{cases} 1, & m \leq k \\ A_1 e^{-\alpha_1(m-k)}, & m > k. \end{cases}$$

Заметим, далее, что из (1.2) если воспользоваться неравенством Ляпунова для моментов и следующим элементарным неравенством из теории цепных дробей

$$|T^{j/l} - [a_j \dots a_{j+k}]| \leq \frac{1}{2^k},$$

вытекает оценка для моментов $M|\xi_j^k|^u$, $u = 1, 2, \dots, s$:

$$(3.6) \quad M|\xi_j^k|^u = \left| \int_0^1 f(T^{j/l}) - \int_0^1 f(T^{j/l}) dt - \left(f([a_j, a_{j+1}, \dots]) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^1 f([a_j, a_{j+1}, \dots]) dt \right) \right|^u dt \leq c_7 e^{-\kappa_2 k u}.$$

Из него, в частности получаем, имея ввиду $M\xi_j = 0$, что

$$(3.7) \quad |M\eta_j^k| \leq c_8 e^{-\kappa_3 k}.$$

Мы воспользуемся следующим фактом:

Пусть случайные величины a_1, a_2, \dots удовлетворяют условию

$$P\{((a_1, \dots, a_k) \in A) \cap ((a_{k+n} \dots, a_{k+n+s}) \in B)\} - \\ - P\{(a_1, \dots, a_k) \in A\} P\{(a_{k+n} \dots, a_{k+n+s}) \in B\} \leq \varphi(n) P\{(a_1 \dots, a_n) \in A\}$$

где $\varphi(n) \rightarrow 0$ для всех k, s и всех boreлевских множеств A и B . Пусть случайная величина $\zeta = \zeta(a_1, \dots, a_n)$ а случайная величина $\eta = \eta(a_{k+n}, a_{k+n+1})$ и пусть $M\zeta^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$. Тогда

$$(3.8) \quad |M\zeta\eta - M\zeta M\eta| \leq 2\sqrt{\varphi(n)}\sqrt{M\zeta^2 M\eta^2}.$$

Это утверждение доказано в [9].

Из (3.4), (3.6) и (3.8), аналогично [9] стр. 448 получаем

$$(3.9) \quad |M\xi_j \xi_{j+l}| = |M(\eta_j^{l/2} + \xi_j^{l/2})(\eta_{j+l}^{l/2} + \xi_{j+l}^{l/2})| \leq c_9 e^{-\kappa_2 \frac{l}{2}}.$$

Оценим также $R_{ij}^{(k)} = M\xi_i^k \xi_{i+j}^k$. Для случая $k < \frac{j}{2}$ применим неравенства (3.6), (3.8) и (3.9):

$$\begin{aligned} |R_{ij}^k| &= |M\xi_i^k \xi_{i+j} - M\xi_i^k \eta_{i+j}^k - M\eta_{i+j}^k \xi_{i+j} + M\eta_{i+j}^k| \leq |M\xi_i^k \xi_{i+j}| + \\ &+ |M\eta_{i+j}^k \xi_{i+j}| + |M\xi_i^k \eta_{i+j}^k| + |M\eta_{i+j}^k \xi_{i+j}| \leq c_{10} e^{-\lambda_3 \frac{j}{2}}. \end{aligned}$$

(3.10)

В случае $k \geq \frac{j}{2}$ последнее соотношение также имеет место в силу неравенства (3.6). Из этого соотношения вместе с (3.6) получаем:

$$(3.11) \quad |R_{ij}^k| \leq \min(c_7 e^{-2\lambda_2 k}, c_{10} e^{-\lambda_3 \frac{j}{2}}).$$

Оценим теперь $M(S_n - S'_n)^2$. Будем иметь

$$\begin{aligned} M(S_n - S'_n)^2 &= \sum_{i=1}^n R_{ii}^{(k)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} R_{ij}^{(k)} = \sum_{i=1}^n R_{ii}^{(k)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k R_{ij}^{(k)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-i} R_{ij}^{(k)} \leq nc_7 e^{-2\lambda_2 k} + nc_7 k e^{-2\lambda_2 k} + c_{10} n \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda_3 \frac{j}{2}} \leq nc_{11} e^{-\lambda_3 k}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения, при помощи неравенств Минковского и (3.7) получаем

$$(3.12) \quad |DS_n - DS'_n| \leq nc_{12} e^{-\lambda_3 k}.$$

Этим доказано справедливость утверждения леммы, так как в силу независимости оценки (3.11) от i мы можем вместо суммы S_n брать S_{lm} .

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Легко видеть, что для случайных величин ξ_j по отношению к мере μ остаются верными оценки (3.4), (3.6), (3.7) и (3.8). Имея в виду стационарность ξ_j по отношению к мере μ представим дисперсию в виде

$$\begin{aligned} D_\mu S_n &= nM_\mu(\zeta_0 - M_\mu \zeta_0)^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) M(\zeta_0 - \zeta M_0)(\zeta_j - M_\mu \zeta_j) = \\ &= \sigma_\mu^2 n + c_{13} + o(1) \end{aligned}$$

где

$$\sigma_\mu = M_\mu(\zeta_0 - M_\mu \zeta_0)^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} M(\zeta_0 - M_\mu \zeta_0)(\zeta_j - M_\mu \zeta_j) < \infty,$$

$$|c_{13}| = 2 \sum_{j=1}^{\infty} j M(\zeta_0 - M_\mu \zeta_0)(\zeta_j - M_\mu \zeta_j) < \infty.$$

Константа σ_μ не равна нулю в силу $D_\mu S_n \rightarrow \infty$, что вытекает из условия (1.3) теоремы и неравенств (2.3). Из этих же неравенств и соотношения (3.13) вытекает второе утверждение леммы для суммы S_n . Для суммы S_{lm} изменения в рассуждениях очевидны.

Лемма доказана.

Введем „урезанные” случайные величины

$$(3.14) \quad \bar{\eta}_j^k = \begin{cases} \eta_j^k, & |\eta_j^k| < j \log n \\ 0, & |\eta_j^k| > j \log n \end{cases}$$

Обозначения S''_m , Z''_n , B''_n и S''_{lm} относятся к $\bar{\eta}_j^k - M\bar{\eta}_j^k$.

ЛЕММА 3. Имеет место оценка

$$M(S'_{lm} - (S''_{lm} - MS''_{lm}))^2 \leq \frac{c_{14}}{n^{\gamma_1}} + A_2 n e^{-x_3 k}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем в силу определения величин $\bar{\eta}_j^k$, оценки (3.7) и условия (1.4) наложенного на функцию $f(t)$:

$$\begin{aligned} |M\bar{\eta}_j^k| &= \left| \int_{|\eta_j^k| < j \log n} f([a_j, \dots, a_{j+k}]) \right| \leq c_8 e^{-x_3 k} + \\ &+ \left| \int_{|\eta_j^k| > j \log n} \log([a_j; a_{j+1}, \dots, a_{j+k}]) dt \right| \leq 2 \int_{\log(a_j+1) > j \log n} \log(a_{j+1}) dt + c_8 e^{-x_3 k}, \\ &\quad (j = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Известно, что мера множества точек, в которых некоторый определенный элемент цепной дроби имеет данное значение q , не превышает $\frac{2}{q^2}$ ([6], §12). Поэтому последний интеграл, при достаточно большом, но фиксированном k , оценивается остатком ряда

$$\sum_{l=\frac{n^\gamma}{10}}^{\infty} \frac{2 \log(l+1)}{l^2} \leq \frac{1}{n^{\gamma_0 \gamma}}, \quad 0 \leq \gamma_0 < 1.$$

Окончательно получаем

$$(3.16) \quad |M\bar{\eta}_j^k| \leq \frac{1}{n^{\gamma_1}} + c_8 e^{-x_3 k}.$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что

$$(3.17) \quad M(\eta_j^k - (\bar{\eta}_j^k - M\bar{\eta}_j^k))^2 \leq \frac{c_{14}}{n^{x_2}} + c_{15} e^{-x_1 k}.$$

Отсюда, проводя те же выкладки, что и при доказательстве I части леммы 2, получаем утверждение леммы, причем $\gamma_1 > \frac{\gamma}{10}$.

Случайные величины $\tilde{\eta}_{ij}^k$ измеримы относительно F_{jk} , поэтому из леммы 1 получаем

$$\sup_{0 \leq t \leq n} \sup_{\substack{A \in F_{0,t}(\tilde{\eta}) \\ B \in F_{t,t+m}(\tilde{\eta}) \\ C \in F_{t+m,n}(\tilde{\eta})}} |m(C/AB) - m(C/B)| \leq \chi_{\pi}(m)$$

где

$$(3.18) \quad \chi_{\pi}(m) \leq \begin{cases} 1, & m \leq k, \\ B_1 e^{-\beta_1(m-k)}, & m > k. \end{cases}$$

Соотношения (3.4) и (3.18) означают, что величины $\tilde{\eta}_{ij}^k$ удовлетворяют условию RM (условию „марковской регулярности“) введенному В. СТАТУЛЯВИЧУСОМ ([2] гл. III).

ЛЕММА 4. Для любого $s \geq 3$ в интервале

$$|t| \leq \frac{1}{2H_2} \cdot \bar{L}_{3n}^{-1}$$

имеет место следующее асимптотическое разложение для характеристической функции

$$(3.19) \quad f_{z_n} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{s-3} P_{rn}(it) \bar{L}_{r+2,n} + \bar{\Theta}_s(|t|^s + |t|^{3(s-2)} L_{sn}) \right) + \\ + \frac{\Theta_1 |t|}{B_n^{s+1}}.$$

Здесь P_{rn} является многочленом степени $3r$ с равномерно относительно n ограниченными коэффициентами, $\bar{L}_{r,n}$ определено в теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в определении величин η_{ij}^k

$$(3.19*) \quad k = k_0 \log n$$

где k_0 -константа, которую подберем позже. Неравенствам (3.4) и (3.18) можно придать следующую форму

$$\psi_{\eta}(m) \leq A_2 e^{-\frac{\alpha_2 m}{k_0 \log n}}, \quad \chi_{\pi}(m) \leq B_2 e^{-\frac{\beta_2 m}{k_0 \log n}},$$

так что „коэффициент эргодичности“ равен $\frac{1}{k_0 \log n}$. Для оценки сечений инвариантов суммы S_n'' достаточно воспроизвести рассуждения леммы 7 в [1] для случая случайных величин, удовлетворяющих условию RM .

Согласно этой лемме в нашем случае имеет место следующая оценка:

$$(3.20) \quad |\Gamma_r\{S_n''\}| \leq k! H_1 H_2^{r-2} \log_n^{2(r-2)} D S_n''.$$

Подробное доказательство этого неравенства для слабозависимых случайных величин, удовлетворяющих условию RM приведено в [2] гл. III.

Воспользуемся теперь выкладками леммы 9 в [1]. Пусть $A_n = \frac{B_n}{H_2 \log^2 n}$. Заметим, что если в (3.19*) и (3.14) подобрать $\gamma > \frac{10s}{\gamma_1}$, $k_0 = \max \left(\frac{s}{\lambda_1}, \frac{s}{\lambda_6} \right)$, то при помощи неравенства Минковского можно получить

$$(3.21) \quad |B_n^2 - D S_n''| \leq \frac{C_{15}}{n^s} \leq \frac{C_{16}}{B_n^{s+1}}.$$

Согласно оценке (3.20) функция $\log \varphi_{Z_n''}(z)$, $\varphi_{Z_n''}(z) = M e^{z''_n}$ аналитична в круге $|z| \leq \Delta_n$. Имея в виду (3.20) и (3.21), находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log \varphi_{Z_n''}(z) &= \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\Gamma_k(S_n'') \bar{Z}^{k-s}}{B_n^k (k-s)!} = \Theta \sum_{k=s}^{\infty} \frac{k! H_3 H_2^{r-2} \log_n^{2(r-2)}}{B_n^{k-2} (k-s)!} = \\ &= - \frac{S! \Theta H_3}{A_n^{s-2} \left(1 - \frac{|z|}{\Delta_n} \right)^{s+1}}. \end{aligned}$$

В интервале $|z| \leq \frac{1}{2} \Delta_n$ имеет место

$$\left| \frac{d^s}{dz^s} \log \varphi_{Z_n''}(z) \right| \leq \frac{S! \Theta H}{A_n^{s-2}},$$

так что в интервале

$$|t| \leq \frac{1}{2H_2} \bar{L}_{3n}^{-1}$$

имеем

$$(3.22) \quad \log \varphi_{Z_n''}(t) = \sum_{k=2}^{s-1} \frac{\Gamma_k(S_n'')}{k!} \left(\frac{it}{B_n} \right)^k + \theta_s \bar{L}_{sn} |t|^s$$

$$|\theta_s| \leq 2^{s+1} H_1 H_2^{s-2}.$$

Оценки

$$\frac{P_2\{S_n''\}}{B_n^2} = 1 + \frac{c_{17}}{B_n^2}$$

и

$$\frac{P_r\{S_n''\}}{B_n^r} \leq \frac{r! H_1 H_2^{r-2} \log_n^{2(r-2)} D S_n''}{B_n^r} \leq \frac{r! H_3 H_2^{r-2} \log_n^{2(r-2)} B_n^2}{B_n^r} \leq k! H_1 H_2^{r-2} \bar{L}_{rn}$$
(3.23)

позволяют повторить выкладки теоремы из [3], согласно которой получаем асимптотическое разложение

$$(3.24) \quad \varphi_{z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{s-3} \bar{P}_{rn}(it) \bar{L}_{r+2,n} + \Theta_s(|t|^s + |t|^{3(s-2)}) \bar{L}_{sn} \right)$$

причем из (3.23) следует равномерная ограниченность коэффициентов многочленов $P_{rn}(it)$ относительно n . Представим $S_n = S_n'' + S_n'''$. Согласно леммам 3 и 4 получим оценку

$$M|S_n'''|^2 \leq \frac{C_{16}}{B_n^{2(s+1)}}$$

поэтому

$$f_{z_n}(t) = f_{z_n''}(t) + \Theta \frac{|t| M S_n'''}{B_n^{s+1}}.$$

Последнее соотношение вместе с (3.24) дает (3.19)

§4. Доказательство теоремы 3.

Будем следовать схеме доказательства теоремы 7 в [1]. Пусть

$$h_{s-1,n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{s-3} P_{rn}(it) \bar{L}_{r+2,n} \right).$$

Согласно теореме Ессеена ([8], теорема 1) для разности функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ с характеристическими функциями $f(t)$ и $g(t)$, $|G'(x)| < A$ для любого $T > 0$ имеет место неравенство

$$(4.1) \quad |F(x) - G(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{24}{\pi} \frac{A}{T}$$

где

$$\varepsilon = \int_{-T}^T \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt.$$

В неравенстве (4.1) положим

$$F(x) = \Phi(x) + -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=1}^{s-3} Q_{sn}(x) \tilde{L}_{s+2,n},$$

$$T = \overline{L}_{sn}^{-1}.$$

Имеем

$$\varepsilon = \int_{|t| = \overline{L}_{sn}^{-1}} \frac{|\varphi_{zn}(t) - h_{s-1,n}(t)|}{|t|} dt \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|t| < A} \frac{|\varphi_{zn}(t) - h_{s-1,n}(t)|}{|t|} dt, \\ I_2 &= \int_{|t| > A} \frac{|h_{s-1,n}(t)|}{|t|} dt, \quad I_3 = \int_{A < |t| < B} \frac{|\varphi_{zn}(t)|}{|t|} dt, \\ I_4 &= \int_{B < |t| < \infty} \frac{|\varphi_{zn}(t)|}{|t|} dt, \end{aligned}$$

и

$$A = -\frac{1}{2H_2} \overline{L}_{3n}^{-1}, \quad B = B_n \varepsilon_n,$$

ε_n -из условий (1.5), (1.6).

Из леммы 4 и условия (1.6) теоремы находим, что

$$I_1 + I_2 + I_4 \leq \Theta_s \overline{L}_{sn}.$$

Оценим интеграл I_3 . Для этого найдем оценку характеристической функции $\varphi_{zn}''(t)$ в интервале $|t| < B_n \varepsilon_n$. Ввиду (3.18) и (3.5) величины $\bar{\gamma}_{ij}^k$ в первом приближении можно рассматривать как связанные в сложную цепь Маркова.

Подберем целые числа $1 \leq r_0 \leq \dots \leq r_{N_n} = n$ такие, что

$$(4.2) \quad r_{i+1} = r_i + k_1 \log n.$$

Далее положим

$$Y_i^{(n)} = S_{r_{i-1}, r_i} F_{r_{i-1}, r_i}^{(n)} = F_i^{(n)}.$$

$$F(x/F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}) = \text{mes } \{Y_i^{(n)} < x/F_{i-1}^{(n)} \times F_{i+1}^{(n)}\}, \quad i = 2, \dots, N_n - 1.$$

Применив лемму 12 В. СТАТУЛЯВИЧУСА [1] точно так, как это делается в работе РЯУБЫ [7], при любом наборе целых чисел

$$(4.3) \quad 0 \leq k_0 < l_0 < k_1 < \dots < k_s < l_s = N_n$$

получим, что

$$(4.4) \quad |\varphi_{S_n}(t)| \leq \sum_{i=1}^{N_n} \psi_n(r_i - r_{i-1}) + \exp \left\{ - \sum_{i=1}^s Q_{k_i l_i}(t) + \sum_{i=0}^{s-1} \zeta_i(r_{k_{i+1}} - r_{l_i}) \right\}.$$

Здесь

$$Q_{kl}(t) = M \left\{ \int \int \sin^2 \frac{x-y}{2} dF_{kl}(x/F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}) \times dF_{kl}(y/F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}) \right\},$$

$$F_{kl}(x/F_k^{(n)} \times F_l^{(n)}) = \text{mes} \{ \tilde{S}_{kl} < x/F_k^{(n)} \times F_l^{(n)} \},$$

$$\tilde{S}_{k_l l_l} = \sum_{j=k_l+1}^{l_l-1} Y_j,$$

Далее

$$Q_{k_l l_l}(t) \geq \frac{t^2}{2} M \int \int_{|x-y| \geq \frac{\pi}{|t|}} (x-y)^2 dF_{k_l l_l}(x/F_{k_l}^{(n)} \times F_{l_l}^{(n)}) \times dF_{k_l l_l}(y/F_{k_l}^{(n)} \times F_{l_l}^{(n)}),$$

$$R_{k_l l_l}(t) = M \int \int_{|x-y| > \frac{\pi}{|t|}} (x-y)^2 dF_{k_l l_l}(x/F_{k_l}^{(n)} \times F_{l_l}^{(n)}) \times dF_{k_l l_l}(y/F_{k_l}^{(n)} \times F_{l_l}^{(n)}) \leq$$

$$(4.5) \quad \leq 8 M \int_{|x| > \frac{\pi}{2|t|}} x^2 dF_{k_l l_l}(x/F_{k_l}^{(n)} \times F_{l_l}^{(n)}) = 8 \int_{|x| > \frac{\pi}{2|t|}} x^2 dF_{r_{k_l l_l}}''.$$

Из этих соотношений следует

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^m Q_{k_i l_i}(t) \geq \frac{t^2}{\pi^2} \left\{ \sum_{i=1}^m M D \{ \tilde{S}_{k_i l_i} | F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \} - \sum_{i=1}^m R_{k_i l_i}(t) \right\} = \\ = \frac{t^2}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m D \tilde{S}_{k_i l_i} - \sum_{i=1}^m D M \{ \tilde{S}_{k_i l_i} | F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \} - \sum_{i=1}^m R_{k_i l_i}(t) \right\}.$$

Пусть теперь в (4.2) $l_i = k_i + \tilde{k}_1 \log n$, $k_{i+1} = l_i + 2$.

Тогда имеет место

$$(4.7) \quad DM \{ \tilde{S}_{k_i l_i} | F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \} = M \{ M \{ S_{k_i l_i} | F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \} - M \tilde{S}_{k_i l_i} \}^2 \leq \\ \leq C_{17}^2 \gamma^2 k_0^2 \log^2 n,$$

так как в силу (3.5)

$$(4.8*) \quad |M \{ S_{k_i l_i} | F_{k_i}^{(n)} \times F_{l_i}^{(n)} \} - M \tilde{S}_{k_i l_i}| \leq C_{17} \gamma k_0 \log n.$$

Вспомнив леммы 2,3 получаем

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^m Q_{k_i l_i}(t) \geq \frac{t^2}{2} \left\{ m C_{18} \log^2 n - \sum_{i=1}^m R_{k_i l_i}(t) \right\}$$

если выбрать k_1 из неравенства

$$(4.9) \quad C_5 k_1^2 > k_0 \gamma^2 C_{17}.$$

Рассуждая совершенно так же, как и в лемме 2, покажем, используя (1.2)

$$(4.10) \quad \left| \int_{|x|>a} x^2 dF_{S_{r_{k_l} r_{l_l}}}(x) - \int_{|x|>a} x^2 dF''_{r_{k_l} r_{l_l}}(x) \right| \leq A_4 (r_{l_l} - r_{k_l}) e^{-\lambda_6 k} + \frac{C_{18}}{n^{\gamma_1}}.$$

Из (4.5), (4.10) и (3.3) наконец получаем, при выборе константы (4.9), что в интервале $|t| < \varepsilon_n$

$$(4.11) \quad \sum_{i=1}^m Q_{k_i l_i}(t) \geq \frac{t^2}{2} C_{19} B_n (1 - \omega_n).$$

Учитывая подборы (4.2), (4.3) вспомнив определения $\psi_n(m)$ и $\chi_n(m)$ оценку разности $S_n - S'_n$ из (3.3) вместе с (4.11) получаем, при $|t| < \varepsilon_n$

$$|\varphi_{S_n}(t)| \leq \exp \{-C_{20} t^2 B_n^2 (1 - \omega_n)\} + \frac{\Theta_1 |t| + C_{19}}{B_n^{s+1}}.$$

Отсюда

$$I_3 \leq C' \bar{L}_{3n} \exp \{-C'' \bar{L}_{3n}^{-2} (1 - \omega_n)\} + C_{20} \bar{L}_{sn}.$$

Теорема доказана.

В процессе работы над этой задачей большую помощь оказали советы и замечания проф. д-р П. ТУРАНА и проф. д-р. И. КАТАЙ, которым автор выражает глубокую признательность.

Литература

- [1] В. А. Статулявичус, Пределевые теоремы для сумм случайных величин связанных в цепь Маркова, I-II, Литовский математ. сборник, 9 (1969) № 2-3.
- [2] В. А. Статулявичус, Докторская диссертация, Вильнюс, 1967.
- [3] В. А. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Литовский математ. сборник, 2 (1962) № 2.

- [4] В. А. СТАТУЛЕВИЧУС, Об уточнениях предельных теорем для слабозависимых случайных величин, *Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математ. статистике*, Вильнюс, 1962.
- [5] Г. А. Мисявичус, Оценка остаточного члена в предельных теоремах для функций от параметров цепных дробей, *Литовский математ. сборник*, 10 (1970), № 2.
- [6] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Москва, 1961.
- [7] Б. РЯУВА, О предельных теоремах для слабозависимых случайных величин, *Литовский математ. сборник*, 3 (1963), № 1.
- [8] Б. В. ГНЕДЕНКО, А. Н. КОЛМОГОРОВ, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, М-Л, 1949.
- [9] И. А. НБРАГИМОВ, Ю. В. ЛИННИК, *Независимые и стационарно связанные величины*, Москва, 1965.
- [10] P. SZÜSZ, Über einen Kusminischen Satz. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 12 (1961).
- [11] V. A. STATULEVIČIUS, On large deviations. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 6 (1966).

ON THE CONNECTION BETWEEN THE HULL-KERNEL AND WEAK-STAR TOPOLOGIES

By

Z. VARGA

II. Department of Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received September 26, 1970)

We shall be concerned in this paper with the comparability of the hull-kernel (briefly h-k) and the weak-star topologies in the case of some noncommutative algebras and at the same time we give conditions for these topologies to be Hausdorff. In connection with an interesting example of G. W. MACKEY we give a simple topological condition for some non-commutative C^* -algebras to be completely regular.

On an algebra we always mean an algebra over the complex field. Σ denotes the set of all maximal modular two-sided ideals of the algebra, and the set of all primitive ideals is denoted by H . In the case of topological algebras we denote the set of all open neighborhoods of zero by \mathfrak{M} . For the algebraic concepts used in the paper without definitions see e.g. [3].

It is well-known [3] that on an arbitrary set of prime ideals the Jacobson (hull-kernel) topology can be introduced which always gives rise to a T_0 space. (Further on the set consisting of all h-k open sets is denoted by Q .) The h-k topology on the structure space $/I$ is quite often compact (e.g. if the algebra has an identity) or locally compact (e.g. in the case of C^* -algebras), but it is rarely Hausdorff (even for C^* -algebras). For any topological algebra on an arbitrary ideal set the so-called weak-star topology can be introduced which allows to convert the subdirect representations into useful topological structure theorems. The suitable general constructions with several applications may be found in [1]. We present this construction here only for the special case used in our investigations:

Let B be an arbitrary ideal set of any locally convex Hausdorff topological algebra A and $E = \bigcap_{b \in B} A/b$ which denotes the disjoint union of these factor algebras. Consider the following surjective mapping: $p : E \rightarrow B$ with $p(x) = b$ for $x \in A/b$.

For any $a \in A$ the mapping $a \rightarrow \hat{a}$ with $\hat{a}(b) = a + b$, $b \in B$ gives a subdirecte representation $A \rightarrow \hat{A}$ of the algebra A . Let $N(p)$ be the topology on E generated by the subbasic open sets

$$U'(\hat{a}) = \{x \in E \mid x \in \hat{a}(p(x)) + U\}, \quad a \in A, \quad U \in \mathfrak{M}.$$

The coarsest topology Q^* on B in which for any $a \in A$ the function $\hat{a} : (B, Q^*) \rightarrow (E, N(p))$ is continuous we call the weak-star topology on B . A typical subbasic open set for Q^* is of the form $\hat{a}^{-1}(U'(\hat{a})), a \in A, U \in \mathfrak{M}$. ([1]; Theorem II, Corollary 1 and 2 to Theorem II.) It can be shown that Q^* is the finest topology on B which makes p continuous ([1]; Chapter I, 2.22).

The $N(p)$ and Q^* topologies and a suitable uniform structure on \hat{A} may be deduced in natural manner from the usual uniformity of the additive structure of A , therefore the mapping $p : (E, N(p)) \rightarrow (B, Q^*)$ is called the canonical uniform field of the pair (A, B) ([1]; Chapter I).

Examples show that the topologies Q and Q^* mentioned above are in general not comparable [1]. In the following theorem we give a sufficient condition for the comparability of these topologies, by means of the inner structure of the canonical uniform field. It is obvious from the above construction that for any $a \in A$ $\hat{a}(B)$ is homeomorphic with (B, Q^*) in the relative topology of $\hat{a}(B)$ in $(E, N(p))$, therefore (B, Q^*) may be regarded as a subspace of $(E, N(p))$ e.g. under the mapping $\hat{a}(b)$. Let B be any prime ideal set of A .

THEOREM 1. If (B, Q^*) is a closed subspace in $(E, N(p))$ then $Q \subset Q^*$, i.e. the identical mapping $1_B : (B, Q^*) \rightarrow (B, Q)$ is continuous.

PROOF. It is obviously sufficient to show that for an arbitrary $M \subset A$ the set $h(M) = \{b \in B \mid b \supset M\}$ is weak-star closed. Let $b_0 \notin h(M)$ any point in B . It follows that there exists an $a_0 \in M$ with $a_0 \notin b_0$ i.e. $\hat{a}_0(b_0) \neq 0$. According to the condition, $\hat{a}(B)$ is closed in E , thus $\hat{a}_0(b_0)$ has an $N(p)$ open neighborhood V in E with $V \cap \hat{a}(B) = \emptyset$, consequently $\hat{a}_0(b) \neq \hat{a}(b), b \in \hat{a}^{-1}(V) = W$. But $W \cap h(M) = \emptyset$, since for an arbitrary $a \in M$ $\hat{a}(b) = \hat{a}(b), b \in h(M)$. Because of continuity of $\hat{a}_0(b)$ W is a weak-star open neighborhood of b_0 therefore $B \times M \in Q^*$ thus $Q \subset Q^*$.

Further on we give conditions for the comparability of the weak-star and h-k topology in connection with their Hausdorffness.

An algebra is said to be completely regular [4] if

(1) \mathcal{E} is h-k Hausdorff

(2) For any $m \in \mathcal{E}$ there exists a h-k neighborhood W of m for which the ideal $\cap W$ is modular.

For algebras with an identity (2) is satisfied with $W := \mathcal{E}$ thus the complete regularity is equivalent with (1).

A locally convex Hausdorff topological algebra is said to be weak-star regular if \mathcal{E} is Hausdorff in the weak-star topology. Sufficient conditions for the weak-star regularity may be found in [1]; Chapter I, 2.26.

THEOREM 2. Let A be a weak-star regular algebra with an identity having the following property: for any $a \in A$ and $U \in \mathfrak{M}$ the set $\{m \in \Xi \mid a \in m + U\}$ is h-k compact. Then A is completely regular if and only if $(\Xi, Q^*) = (\Xi, Q)$.

PROOF. Since in an algebra with an identity any ideal is modular, from the fact that Q^* is Hausdorff it follows obviously the complete regularity of A .

To prove the necessity first we show that $Q^* \subset Q$. To this end we consider an arbitrary weak-star subbasic open set:

$$G = \{m \in \Xi \mid a \in m + U\}, a \in A, U \in \mathfrak{M}.$$

Then $\Xi \setminus G = \{m \in \Xi \mid a \notin m + U\}$ being h-k compact, by the Hausdorffness it is h-k closed thus $G \in Q$ consequently $Q^* \subset Q$.

For an algebra with an identity Ξ is h-k compact ([3]; Corollary 2.6.5). Because of $Q^* \subset Q$ the identical mapping $1_{\Xi} : (\Xi, Q) \rightarrow (\Xi, Q^*)$ is a continuous bijection of a compact space onto a Hausdorff one, consequently it is a homeomorphism i.e. $Q^* = Q$.

REMARK. An algebra has the property of compactness assumed in Theorem 2, e.g. if (A, Ξ) is a C -algebra ([1]; Chapter III, 5.6). C -algebras are natural generalizations of C^* -algebras from point of view of Gelfand-Naimark type theorems for the noncommutative case. Thus e.g. for a C^* -algebra (A, Ξ) is a C -algebra if $H = \Xi$.

We note that the same result as in Theorem 2. can be obtained for H in connection with its Hausdorffness.

A sufficient condition for the structure space of an arbitrary C^* -algebra to be Hausdorff, reads as follows.

THEOREM 3. For any C^* -algebra, if $Q^* \subset Q$ on H then H is h-k Hausdorff.

PROOF. For an arbitrary $a \in A$ the function $\|\hat{a}(m)\| : (H, Q) \rightarrow R$ is upper semicontinuous on H . ([3]; Theorem 4.9.17.) Since the set $\{m \in H \mid \|\hat{a}(m)\| < \epsilon\}$ is weak-star open for any $\epsilon > 0$, thus by the condition it is h-k open at the same time. Thus for each $a \in A$ $\|\hat{a}(m)\|$ is lower semicontinuous on (H, Q) therefore it is continuous. Thus according to [3]; Theorem 4.9.19 H is h-k Hausdorff.

It is easy to see from Theorem 3 that for any C^* -algebra with $H = \Xi$ the condition $Q^* = Q$ implies the weak-star regularity. In [1]; Chapter III. Example 9.2 $H = \Xi$ is weak-star Hausdorff and $Q \subset Q^*$ but $Q \neq Q^*$. This example shows that this condition is not necessary.

By means of Theorem 3, if we omit the condition of weak-star regularity in Theorem 2, it remains true in the following modified version:

THEOREM 4. A C^* -algebra A with an identity which satisfies the condition $H = \Xi$, is completely regular if and only if $Q^* \subset Q$.

We note without proof that Theorem 4 can be generalized for normed (A, Ξ) C -algebras having the following property:

$$\{m \in \Xi \mid \|\hat{a}(m)\| > \epsilon\} \in Q, a \in A, \epsilon > 0.$$

G. W. MACKEY has given an example (see e.g. [3] p. 82) for a C^* -algebra with an identity with $\|f\| = \infty$, but which is not completely regular. Under the assumption $\|f\| = \infty$, Theorem 4 gives a necessary and sufficient condition for the complete regularity.

References

- [1] J. DAUNIS and K. H. HOFMANN, Representation of rings by sections, *Memoirs of Amer. Math. Soc.* No. 83. 1968.
- [2] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 219–255.
- [3] C. E. RICKART, *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand, Princeton N. J., 1960.
- [4] A. B. WILCOX, Some structure theorems for a class of Banach algebras, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 177–192.

DIFFERENTIABLE APPROXIMATIONS OF CONTINUOUS CROSS SECTIONS

By

F. SZIGETI

H. Department of Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received October 15, 1970)

An important application of the theory of bundles is to decide, whether or not there exists a differentiable tensor field or vector field on a differentiable manifold. The main result of this paper is that a continuous tensor-field can be approximated arbitrarily in a certain sense by a differentiable one.

First we mention two theorems which will be quoted below.

THEOREM 1. Let A_1, A_2 be non-empty closed disjoint subsets of a separable Hilbert-space H . Then there exists a C^∞ function ψ such that

$$\begin{aligned}\psi(x) &= 0 \quad \text{if} \quad x \in A_1 \\ \psi(x) &= 1 \quad \text{if} \quad x \in A_2 \quad \text{and} \\ 0 \leq \psi(x) &\leq 1 \quad \text{for each } x \in H.\end{aligned}$$

THEOREM 2. Let a separable Hilbert-space H be the coordinate-space of a C^p -manifold X . If X is paracompact then there exists a C^p -partition of unity.

The proofs of J. JR. EELLS (published in [1]) apply an idea of Dieudonné, an idea which helps to prove that an arbitrary metric space is paracompact.

Now we define the concept of a bundle. We denote it by (E, π, X) , where E is the bundle space, π the projection, X is the base space. (E, π, X) satisfies the following conditions.

Vb 1. π maps E continuously onto X , and $\pi^{-1}(x)$ is topologically-linearly isomorphic with a Banach space B_i for every $x \in X$.

The set $\{(U_i, \tau_i), i \in I\}$ is said to be a trivialization if the sets U_i provide an open covering of X and τ_i is a topological mapping of $\pi^{-1}(U_i)$ onto $U_i \times B_i$.

Vb 2. The following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\pi} & U_i \times B_i \\ \pi \searrow & & \downarrow p_{i1}^r \\ & & U_i \end{array}$$

Vb 3. $\tau_i(x) : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times B_i$ is a topological-linear isomorphism. There is a natural isomorphism between $\{x\} \times B_i$ and B_i ; $(x, b) \mapsto b$. We construct a map τ_{ix} such that

$$\begin{array}{ccc} \tau_{ix} : \pi^{-1}(x) & \longrightarrow & B_i \\ \tau_i(x) \searrow & & \swarrow \\ & & \{x\} \times B_i \end{array}$$

It follows that $\tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1} \in L(B, B)$ is a topological-linear automorphism of B ($\tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1} \in \text{Laut}(B)$, $B_i \cong B_j \cong B$). Consider the map $x \mapsto \tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}$ defined in $U_i \cap U_j$. We assume that this is a morphism (i.e. it is continuous if X is a topological space, and it is p -times differentiable if X is a C^p -manifold).

Two trivializations are equivalent if the maps

$$x \mapsto \tau_{fx} \circ \tau_{ix}^{-1} (\in \text{Lis}(B_i, B_f))$$

are morphisms (for $x \in U_f \cap U_i$). This is an equivalence relation. We define the bundle structure on (E, π, X) as an equivalence-class of trivializations.

For a C^p manifold X ($p \geq 1$) the tangent-fibre $T(X)$ is a vector bundle. A continuous map $z : X \rightarrow E$ is called a cross-section if $\pi \circ z = id_X$.

Let X be a C^p manifold, and consider the map $x \mapsto \tau_{ix} \circ \tau_{jx}^{-1}$ which is a C^p morphism on $U_i \cap U_j$. Let $\{V_j, q_j\}; j \in J\}$ be a C^p -atlas on X . Then $\{(\pi^{-1}(V_j \cap U_i), (q_j \times id_B) \circ \tau_i); i \in I, j \in J\}$ is a C^p -atlas for E . If we take equivalent atlases and trivializations then we get equivalent C^p atlases on E . Hence the bundle-structure induces a manifold structure on E .

If a cross-section $z : X \rightarrow E$ is a C^p -morphism, we say that z is a C_p -cross-section.

Let M_B denote a set of norms in a fixed Banach space B such that B is a Banach-space with respect to any of these norms, and if $\|\cdot\|_z \in M_B$ then there exists a constant K_z such that

$$\|x\|_z \leq K_z \|x\| \quad \text{for every } x \in B.$$

We remark that the equivalence of the two norms $\|\cdot\|_z$ and $\|\cdot\|$ follows from the closed graph theorem. Introduce a metric in M_B

$$(1) \quad d(\|\cdot\|_z, \|\cdot\|_p) = \sup_{x \in G_1(B)} \left| \frac{\|x\|_z^2 - \|x\|_p^2}{\|x\|_z + \|x\|_p} \right|$$

where

$$G_1(B) = \{x : x \in B, \|x\| \leq 1\}.$$

If $B = H$ is a Hilbert-space then M contains the set of positive definite continuous operators. We have a natural distance: $A, B \in M$ $\varrho(A, B) = \|A - B\|$. We show that this coincides with (1).

$$\begin{aligned}\|x\|_A &= \sqrt{\langle Ax, x \rangle}, \|x\|_B = \sqrt{\langle Bx, x \rangle} \\ \varrho(\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B) &= \sup_{x \in G_1(H)} \left| \frac{\|x\|_A^2 - \|x\|_B^2}{\|x\|_A \|x\|_B} \right| = \sup_{x \in G_1(H)} \left| \frac{\langle Ax, x \rangle - \langle Bx, x \rangle}{\langle Ax, x \rangle} \right| = \\ &= \sup_{x \in G_1(H)} \left| \langle (A - B)x, x \rangle \right| = \|A - B\|\end{aligned}$$

since $A - B$ is selfadjoint. It is well-known that for self-adjoint operators $\|A\| = \sup_{x \in G_1(H)} \langle Ax, x \rangle$.

We further assume that, the spaces $\pi^{-1}(x)$ are topologically-linearly equivalent with B . Hence $\pi^{-1}(x)$ is metrizable by any of the norms in the Banach-space B . Suppose this metric is given for every $x \in X$, and the following axioms are satisfied:

MET. 1. For any trivializations (U_i, τ_i) in $x \in X$

$$(\|\cdot\| \circ \tau_i^{-1}) = \|\tau_i^{-1} \cdot \|\|_x \in M_B.$$

MET. 2. The map $x \mapsto \|\tau_i^{-1} \cdot \|\|_x = \|\cdot\|_x \circ \tau_i^{-1}$ mapping U_i into M is continuous.

In certain cases it is easy to prove that there exists a metric. For example let X be a paracompact C^p -manifold, whose coordinate-neighbourhoods are taken from a separable Hilbert-space H , and $E = T(X)$. Then $B = H$, and there exists a Riemannian metric ([1.]), and this clearly gives a metric in the above sense, as well.

After this introduction let us tackle our real problem: the differentiable approximations. Let X be a C^p -manifold, let its coordinate neighbourhoods be taken from a separable Hilbert-space, and (E, π, X) be a vector-bundle. We have seen that E is a C^p manifold.

THEOREM 3. Suppose that there are given a metric $\|\cdot\|_x$ on E , a section $f : X \rightarrow E$, and an arbitrary real number, $\varepsilon > 0$.

If f is C^p differentiable in an open neighbourhood of $A \subset X$ where A is closed, then there exists a C^p -cross section $g : X \rightarrow E$ such that

$$\begin{aligned}\|f(x) - g(x)\|_x &< \varepsilon \quad \text{for all } x \in X \quad \text{and} \\ f(x) &= g(x) \quad \text{for } x \in A.\end{aligned}$$

If $A = \emptyset$ we get that any cross-section f can be approximated by a C^p -cross-section g_ε so that $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ where ε is arbitrarily small.

To prove our assertion we need the following lemma.

LEMMA. There exists a trivialization $\{(V_i, \tau_i); i \in I\}$ and an atlas $\{(V_j, \varphi_j); j \in J\}$ for $x \in X$ $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ is an open subset of the Hilbert-

PROOF. Choose a trivialization $\{(V_i, \tau_i); i \in I\}$ for (E, π, X) and an atlas $\{(V_j, \varphi_j); j \in J\}$ for $x \in X$ $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ is an open subset of the Hilbert-

space H and together with $\varphi_j(x)$ it contains also a spherical neighbourhood G_x of this point. Introduce the following notations:

$$\tau_x = \tau_i | \varphi_j^{-1}(G_x) \quad \hat{\varphi}_x = \varphi_j | \varphi_j^{-1}(G_x)$$

and $\varphi_j^{-1}(G_x) = \tilde{U}_x = \tilde{V}_x$. Clearly $\{(\tilde{V}_x, \tau_x)\}$ and $\{(\tilde{V}_x, \hat{\varphi}_x)\}$ are trivialization and atlas, respectively, and $\tau_x(\tilde{U}_x) \subset H$ is an open r -ball. Apply successively the maps;

$$\xi : y \mapsto \frac{1}{r} (y - x) \quad \text{and} \quad \eta : v \mapsto \frac{v}{(1 - \|v\|^2)^{1/2}}.$$

Both ξ and η are C^∞ -isomorphisms (see [1.] p. 106). The map $\eta \circ \xi \circ \varphi_j$ provides the desired coordinate system. Having accomplished this procedure for every $x \in X$, we clearly get an atlas. The lemma is proved.

PROOF OF THEOREM 3. We consider only such special trivializations and atlases in the future. First we prove the theorem for $\pi^{-1}(U_i)$. Let

$$(2) \quad \zeta_x(y) = \|f(y) - \tau_i^{-1}(y)(y, \tau_{ix}(f(x)))\|_y$$

be a function of real values on U_i . $\zeta_x(y)$ is continuous and $\zeta_x(x) = 0$. Choose a neighbourhood V_x of x , such that $\zeta_x(y) < \epsilon$ for $y \in V_x$. Having chosen the neighbourhood V_x for every $x \in U_i$, select a locally finite refinement $\{W_x\}$ of this system. (X is paracompact!). Let $\{\psi_x\}$ be the corresponding partition of unity. Thus:

$$\gamma_x \geq 0, \quad \text{support } \psi_x \subset W_x, \sum_{x \in U_i} \psi_x(y) = 1.$$

Let us put

$$(3) \quad h_i(y) = \sum_{x \in U_i} \psi_x(y) \tau_i^{-1}(y)(y, \tau_{ix}(f(x)))$$

$\psi_x(y) \tau_i^{-1}(y)(y, \tau_{ix}(f(x)))$ is a C^p -morphism in the variable y for every $x \in U_i$. The sum (3) has a finite number of summands because of the locally finiteness. So this sum remains a C^p -morphism. Furthermore

$$\begin{aligned} \|h_i(y) - f(y)\|_y &= \left\| \sum_{x \in U_i} \psi_x(y) \tau_i^{-1}(y)(y, \tau_{ix}(f(x))) - \sum_{x \in U_i} \psi_x(y) f(y) \right\|_y \\ &\leq \sum_{x \in U_i} \psi_x(y) \|f(y) - \tau_i^{-1}(y)(y, \tau_{ix}(f(x)))\|_y < \epsilon. \end{aligned}$$

If $U_i \cap A$ is empty or $U_i \subset A$, we have

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \begin{cases} h_i(x), & \text{if } x \in U_i \\ 0 & \text{if } x \notin U_i \end{cases} \quad \text{or} \\ g_i(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in U_i \\ 0 & \text{if } x \notin U_i \end{cases} \quad \text{respectively.} \end{aligned}$$

If $A \cap U_i \neq \emptyset$ and $U_i \not\subset A$ then there exists an open neighbourhood Z of A such that f is a C^p section over Z and $U_i \setminus Z = \emptyset$. Take into account that $\varphi_i(U_i) = H$. So $\varphi_i(A \cap U_i) \subset H$ is closed and $\varphi_i(Z \cap U_i) \subset H$ is open, so the complement of this latter is also closed. But the relation $\varphi_i(A \cap U_i) \subset \varphi_i(Z \cap U_i)$ implies that the two closed sets just mentioned are disjoint. Separate them by a C^∞ -function according to Theorem 1: $k(x) = 1$ if $x \in \varphi_i(A \cap U_i)$ and $k(x) = 0$ if $x \notin \varphi_i(Z \cap U_i)$.

Let k^* denote the composition $k^* = k \circ \varphi_i$.

We define

$$(4) \quad g_i(x) = \begin{cases} k^*(x)f(x) + (1 - k^*(x))h_i(x) & \text{if } x \in U_i \\ 0 & \text{if } x \notin U_i \end{cases}$$

g_i/U_i is a C^p -cross-section and it satisfies to the inequality:

$\|g_i(x) - f(x)\|_x = \|k^*(x)f(x) + (1 - k^*(x))h_i(x) - f(x)\|_x = \| (1 - k^*) (h_i - f) \|_x = \| (1 - k^*) \| \|h_i - f\|_x < \varepsilon$ if $x \in U_i$. $\{U_i, i \in I\}$ be an open covering of X and choose a locally finite refinement of it, say $\{V_i, i \in I\}$. Thus there exists a partition of unity, $\{\psi_i\}$ such that $\text{supp } \psi_i \subset V_i$.

Then $\sum_{i \in I} \psi_i(x)g_i(x) = g(x)$ is a C^p -morphism, and it is a cross-section of (E, π, X) and satisfying the following equation:

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\|_x &= \left\| \sum_{i \in I} \psi_i(x)f(x) - \sum_{i \in I} \psi_i(x)g_i(x) \right\|_x = \\ &= \sum_{i \in I_1} \psi_i(x) \|f(x) - g_i(x)\|_x + \sum_{i \in I_2 = I \setminus I_1} \psi_i(x) \|f(x) - g_i(x)\|_x, \end{aligned}$$

where I_1 denotes the finite set of indices, where $\psi_i(x) \neq 0$. But for these indices $\|f(x) - g_i(x)\|_x < \varepsilon$, thus the first sum is less than ε . The second sum is identically zero (every term of it is zero). Then we have $\|f(x) - g(x)\|_x < \varepsilon$ for every $x \in X$. Let us prove that $f(x) = g(x)$ if $x \in A$. The definition of the mappings $g_i(x)$ implies that for $x \in U_i \cap A$ we have $f(x) = g_i(x)$.

Thus we have

$$g(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x)g_i(x) = \sum_{i \in I_1} \psi_i(x)g_i(x) + \sum_{i \in I_2} \psi_i(x)g_i(x) = \sum_{i \in I_1} \psi_i(x)f(x) = f(x)$$

where I_1 has the same meaning as above. The theorem is proved.

In the second part of this paper we discuss some applications of Theorem 3 for Riemannian manifolds. Let X be a C^{p+1} manifold, its tangent-bundle is a C^p manifold. We pose the question what other bundles on x are of type C^p . We shall use the concept of differentiable functors.

Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ be subcategories of the category of Banach-spaces.

$$\lambda : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$$

denotes a bifunctor which is co-and contra-variant. We say that λ is a C^p -functor if:

$$\lambda : L(E', E) \times L(F, F') \rightarrow L(\lambda(E, F), \lambda(E', F'))$$

is a C^p -morphism. It follows that:

$$\lambda(\varphi, \psi) : U \rightarrow L(\lambda(E, F), \lambda(E', F'))$$

is also a C^p -morphism, if the functions φ, ψ are C^p -morphisms on the C^p -manifold U :

$$\varphi : U \rightarrow L(E', E), \psi : U \rightarrow L(F, F').$$

THEOREM 4. Let λ be a C^p functor and (E, π_E, x) (F, π_F, X) be vector bundles on the C^p -manifold X . Assume that $E \in \mathfrak{A}$, $F \in \mathfrak{B}$. Then the set

$$\lambda_X(E, F) = \bigcup_{x \in X} \lambda(\pi_E^{-1}(x), \pi_F^{-1}(x))$$

can be furnished with a bundle structure. Moreover if $f : E_1 \rightarrow E$, $g : F \rightarrow F_1$ are C^p -morphisms between bundles, then the maps $\lambda_X(f, g) : \lambda(E, F) \rightarrow \lambda(E_1, F_1)$ defined by the equation $\lambda_X(f, g)_x = \lambda(f_x, g_x)$, is also a C^p -morphism between the corresponding two bundles. (E_1, F_1 are bundles on X .) It is also true that if

$$E|_U = U \times E, F|_U \cong U \times F$$

(i.e. the restrictions to some neighbourhood are trivial), then

$$\lambda_U(E|_U, F|_U) = \lambda_U(E, F)|_U \cong U \times \lambda(E, F).$$

For the proof see [1], p. 47–48.

$L_s^q(E, F)$ denotes the space of $q+s$ -linear functions. The variables must be taken q -times from E and s -times from F^* . We turn this space into a Banach space by using the norm:

$$\|l\|_{L_s^q} = \sup_{\substack{u_i \in G_1(E) \\ v_j \in G_1(F^*)}} |l(u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_s)|.$$

Consider a pair of bounded linear operators $A : E_1 \rightarrow E, B : F \rightarrow F_1$. Let an operator $L_s^q(A, B) : L_s^q(E, F) \rightarrow L_s^q(E', F')$ correspond to this pair so that L_s^q is a functor. Firstly we consider the case $q=1, s=0$. $L_0^1(E, F) = E^*$ holds obviously, moreover $L_0^1(A, B) = A^*$ where A^* is defined as follows: $(A^*l)u = l(Au)$, where $l(Au)$ lies in E_1^* . It is easy to see, that $A^* : E^* \rightarrow E_1^*$ is continuous and linear, and L_0^1 is a contravariant functor.

Let now q, s be arbitrary. $L_s^q(A, B)$ is defined as follows:

$$[L_s^q(A, B)l](u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_s) = l(Au_1, \dots, Au_q, B^*v_1, \dots, B^*v_s).$$

If $A_1 : E_2 \rightarrow E_1, B_1 = F_1 \rightarrow F_2$ than

$$L_s^q(AA_1, B_1B) = L_s^q(A_1, B_1) \cdot L_s^q(A, B)$$

i.e. L_s^q is a bifunctor co- and contravariant in its first and second variable, respectively. Taking into account the continuity and linearity of L_s^q we get the following lemma.

LEMMA 1. The map L_s^q is a C^∞ bifunctor.

Let now E be an arbitrary vector bundle on X . Applying Theorem 4 with the functor L_s^q and bundles E, E we get a tensor-bundle $L_s^q(E)$. $L_s^q(E)$ is a C^n -manifold as well. A C^p -tensor-field is a C^p -cross-section of this latter bundle.

First let us denote the norm in the conjugate space E^* of a Banach space E (with a norm $\|\cdot\|_x \in M_E$) by

$$\|l\|_*^* = \|l\|_{L_s^q(x, \beta)} = \sup_{\|U\|_x \leq 1; u \in E} |l(u)|.$$

If q, s are integers, then let us denote the norm of the space $L_s^q(E, F)$ (the Banach spaces E, F with norms $\|\cdot\|_x \in M_E$, $\|\cdot\|_\beta \in M_F$ respectively) by

$$\|l\|_{L_s^q(x, \beta)} = \sup_{\begin{subarray}{l} \|u_i\|_x \leq 1; u_i \in E \\ \|v_j\|_\beta \leq 1; v_j \in F \end{subarray}} |l(u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_s)|.$$

It is obvious, that the norm $\|\cdot\|_{L_s^q(x, \beta)}$ is in $M_{L_s^q(E, F)}$ and if the following inequalities are satisfied:

$$k_x \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_x \leq K_x \|\cdot\|,$$

$$k_\beta \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\beta \leq K_\beta \|\cdot\|,$$

then the inequality

$$(5) \quad k_x^q k_\beta^s \|\cdot\|_{L_s^q}^q \leq \|\cdot\|_{L_s^q(x, \beta)}^q \leq K_x^q K_\beta^s \|\cdot\|_{L_s^q}^q$$

also holds.

LEMMA 2. The map

$$L_s^q : M_E \times M_F \rightarrow M_{L_s^q(E, F)}$$

is continuous.

PROOF. Let us assume, that $\|\cdot\|_{x_1}, \|\cdot\|_{x_2} \in M_E$, $\|\cdot\|_{\beta_1}, \|\cdot\|_{\beta_2} \in M_F$ and $d(\|\cdot\|_{x_1}, \|\cdot\|_{x_2}) < \delta$, $d(\|\cdot\|_{\beta_1}, \|\cdot\|_{\beta_2}) < \delta$. It is obviously satisfied:

$$1 + \frac{\delta}{\|u\|_{x_2}^2} \geq \frac{\|u\|_{x_1}^2}{\|u\|_{x_2}^2} \geq 1 - \frac{\delta}{\|u\|_{x_2}^2}$$

if $u \in E$, so from (5) one concludes

$$(6) \quad \|u\|_{x_2} \sqrt{1 + \frac{\delta}{k_{x_2}^2}} \geq \|u\|_{x_1} \geq \|u\|_{x_2} \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{x_2}^2}},$$

and similarly:

$$(7) \quad \|u\|_{\beta_2} \sqrt{1 + \frac{\delta}{k_{\beta_2}^2}} \geq \|u\|_{\beta_1} \geq \|u\|_{\beta_2} \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}}.$$

We consider the following six sets:

$$U = \left\{ u : u \in E, \|u\|_{\alpha_1} \leq \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{\alpha_2}^2}} \right\},$$

$$V = \{u : u \in E, \|u\|_{\alpha_2} \leq 1\},$$

$$W = \left\{ u : u \in E, \|u\|_{\alpha_1} \leq \sqrt{1 + \frac{\delta}{k_{\alpha_2}^2}} \right\},$$

$$U' = \left\{ u : u \in F, \|u\|_{\beta_1} \leq \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \right\},$$

$$V' = \{u : u \in F, \|u\|_{\beta_2} \leq 1\},$$

$$W' = \left\{ u : u \in F, \|u\|_{\beta_1} \leq \sqrt{1 + \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \right\}.$$

it follows from (6) and (7) :

$$U \subset V \subset W \quad \text{and} \quad U' \subset V' \subset W'.$$

Let us suppose now that l is in F^* .

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \|l\|_{\beta_2}^* &= \sup_{u \in W} |l(u)| \geq \sup_{u \in V} |l(u)| = \|l\|_{\beta_2}^* \geq \sup_{u \in U} |l(u)| = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \|l\|_{\beta_1}^*, \end{aligned}$$

so

$$(8) \quad \sqrt{1 + \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \|l\|_{\beta_1}^* \geq \|l\|_{\beta_2}^* \geq \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \|l\|_{\beta_1}^*.$$

If we denote

$$U^* = \left\{ l : l \in F^*, \|l\|_{\beta_1}^* \leq \sqrt{1 - \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \right\},$$

$$V^* = \{l : l \in F^*, \|l\|_{\beta_2}^* \leq 1\},$$

$$W^* = \left\{ l : l \in F^*, \|l\|_{\beta_1}^* \leq \sqrt{1 + \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}} \right\}$$

then we have $U^* \subset V^* \subset W^*$ resulting from (8).

Suppose now, that l is in $L_s^q(E, F)$:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\delta}{k_{\alpha_2}^2}\right)^{q_{\beta_2}} \left(1 - \frac{\delta}{k_{\beta_2}^2}\right)^{s_{\beta_2}} \|l\|_{L_s^q(\alpha_1, \beta_1)} = \sup_{\substack{u_i \in W \\ v_j \in V^*}} |l(u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_s)| \geq \\ & \geq \sup_{\substack{u_i \in V \\ v_j \in V^*}} |l(u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_s)| = \|l\|_{L_s^q(\alpha_2, \beta_2)} \geq \sup_{\substack{u_i \in V \\ v_j \in V^*}} |l(u_1, \dots, u_q v_1, \dots, v_s)| = \\ & = \left(1 - \frac{\delta}{K_{\alpha_2}^2}\right)^{q_{\beta_2}} \left(1 + \frac{\delta}{K_{\beta_2}^2}\right)^{s_{\beta_2}} \|l\|_{L_s^q(\alpha_1, \beta_1)}, \end{aligned}$$

so we have

$$(9) \quad \left| \|l\|_{L_s^q(\alpha_2, \beta_2)}^2 - \|l\|_{L_s^q(\alpha_1, \beta_1)}^2 \right| \leq O(\delta) \|l\|_{L_s^q(\alpha_1, \beta_1)} = O(\delta) \|l\|_{L_s^q}.$$

The inequality

$$d(\| \cdot \|_{L_s^q(\alpha_1, \beta_2)}, \| \cdot \|_{L_s^q(\alpha_2, \beta_2)}) < O(\delta)$$

obviously follows from (9) which means the continuity of the map:

$$L_s^q : M_E \times M_F \rightarrow M_{L_s^q(E, F)}.$$

LEMMA 3. Let $\|\cdot\|_{E_X}$, $\|\cdot\|_{F_X}$ be metrics on the bundles E , F respectively. Then

$$\| \cdot \|_{L_s^q(E, F)_X} = L_s^q(\|\cdot\|_{E_X}, \|\cdot\|_{F_X}) = \| \cdot \|_{L_s^q(\|\cdot\|_{E_X}, \|\cdot\|_{F_X})}.$$

is a metric on the bundle $L_s^q(E, F)$.

PROOF. If (U, τ) and (U, δ) are trivializations of the bundles E , F respectively, then $(U, L_s^q(\tau^{-1}, \delta))$ is trivialization of the bundle $L_s^q(E, F)$. We have to prove the equality:

$$\| \cdot \|_{L_s^q(E, F)} \circ L_s^q(\tau_x, \delta_x^{-1}) = L_s^q(\|\cdot\|_{E_X} \circ \tau_x^{-1}, \|\cdot\|_{F_X} \circ \delta_x^{-1})$$

but it is obviously true. Now, Met 1., trivially satisfied, while Met 2., is implied in Lemma 2, and (7).

Now it follows

THEOREM 5. Let X be a paracompact C^{p+1} -manifold, whose coordinate neighbourhoods are isomorphic with open neighbourhoods of a separable Hilbert-space H . Let E, F be identical with $T(X)$. Then there exists an $L_s^q(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_X)$ metric on $L_s^q(T(X))$, which corresponds to some Riemannian-metric $\|\cdot\|_X$ on $T(X)$. The existence of this latter is well-known.

Moreover let f be a continuous cross-section of this tensor-bundle, which is differentiable on some open neighbourhood of a closed set A . Then there exists for every $\varepsilon > 0$ a C^p -cross-section $g(x)$, which satisfies:

$$\|f(x) - g(x)\|_{L_s^q(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_X)} < \varepsilon$$

and $f(x) = g(x)$ if $x \in A$.

The proof is obvious from Theorem 3 and Lemma 3.

REMARK. If we take for A the empty set we obtain that every continuous cross-section can be approximated arbitrarily and uniformly in a metric by a differentiable one.

Bibliography

- [1] LANG, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*, New-York, London, 1962.
- [2] STEENROD, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, New Jersey, 1951.

ON THE NUMBER OF HALVING LINES

By

L. LOVÁSZ

Eötvös Loránd University, Budapest

(Received October 19, 1970)

SIMMONS raised the following question: Let S be a set of $2n$ points in general position in the plane. A line going through two points of S will be called a *halving line* if there are $n-1$ points on both sides of it. What is the maximum number of halving lines if n is given? STRAUS has constructed a set which determines $c \cdot n \log n$ halving lines. In this paper we are going to show that, on the other hand,

THEOREM. *A set S of $2n$ points determines at most $2n\sqrt{2n}$ halving lines.*

The proof will be based on a lemma which seems to be interesting for its own sake too. To state the lemma we need some definitions. If e is an oriented line in the plane, let e^* denote the same line with the converse orientation. If T is a set of points then let $\tilde{T}(e)$ denote the set of those points of T which lie on the (open) right-hand side of e . Put $\tilde{T}(e) = \min \{|\tilde{T}(e)|, |\tilde{T}(e^*)|\}$. Thus e is a halving line if and only if it contains two points of S and has $|S(e)| = n-1$ (or $\tilde{S}(e) = n-1$). A segment joining two points of S is a *halving segment* if its line is a halving line.

LEMMA. *Let e be a line which contains no point of S ; then e intersects exactly $\tilde{S}(e)$ halving segments.*

PROOF. Put $T = S(e)$ and assume that $|T| = \tilde{S}(e)$, i.e. $|S(e)| \leq |S(e^*)|$. We may assume that e is not parallel to any of the lines joining two points of S . Therefore, there exists a line f_0 containing one point P_0 of S which is parallel to e , has the same orientation and for which $|S(f_0)| = n$. Obviously, $S(e) \subseteq S(f_0)$. Let f be an oriented line moving in the plane as follows. The starting position of f is f_0 , f rotates around P_0 till it reaches another point P_1 of S ; thereafter f rotates around P_1 till it reaches a point P_2 of S etc. (rotation always means rotation in the positive sense). Let f_{φ_i} denote that position of f which forms an angle φ with f_0 . Let $0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_r < \pi$ be those angles for which f_{φ_i} contains two points of S (in fact, f_{φ_i} contains P_i and P_{i+1} ; the points P_0, \dots, P_{r+1} are not necessarily different). A value

On $q \in \pi$ different from q_1, \dots, q_ℓ , will be called an *intermediate value*. We now investigate $|S(f_{q_i})|$ and $|T(f_{q_i})|$ in the "neighbourhood" of a value q_i . We distinguish some cases:

(a) if f_{q_i} is oriented from P_i to P_{i+1} then

$$S(f_{q_i-\epsilon}) = S(f_{q_i+\epsilon}) = S(f_{q_i}), T(f_{q_i-\epsilon}) = T(f_{q_i+\epsilon}) = T(f_{q_i});$$

(b) if f_{q_i} is oriented from P_{i+1} to P_i and $P_i, P_{i+1} \in S - T$ then

$$|S(f_{q_i-\epsilon})| = |S(f_{q_i+\epsilon})| = |S(f_{q_i})| + 1, T(f_{q_i-\epsilon}) = T(f_{q_i+\epsilon}) = T(f_{q_i});$$

(c) if f_{q_i} is oriented from P_{i+1} to P_i and $P_i, P_{i+1} \in T$ then

$$|S(f_{q_i-\epsilon})| = |S(f_{q_i+\epsilon})| = |S(f_{q_i})| + 1, |T(f_{q_i-\epsilon})| = |T(f_{q_i+\epsilon})| = |T(f_{q_i})| + 1;$$

(d) if f_{q_i} is oriented from P_{i+1} to P_i and $P_i \in S - T, P_{i+1} \in T$ then

$$|S(f_{q_i-\epsilon})| = |S(f_{q_i+\epsilon})| = |S(f_{q_i})| + 1, |T(f_{q_i-\epsilon})| = |T(f_{q_i+\epsilon})| + 1 = |T(f_{q_i})| + 1.$$

(ϵ is understood to be sufficiently small; note that the case when $P_i \in T, P_{i+1} \in S - T$ always belongs to the case (a)).

Now we can make some observations:

If g is an intermediate value then $|S(f_g)| = n$. f_{q_i} is a halving line if and only if f_{q_i} is oriented from P_{i+1} to P_i . Here we complete this with the remark that every halving line is form f_{q_i} ; for if g is a halving line and f_g is parallel to g then $|S(g)| = n - 1$, $|S(f_g)| \geq n$, $S(g) \subseteq S(f_g)$ which implies that $g = f_g$. For the intermediate values $|T(f_g)|$ is non-increasing, and it decreases by one in a position f_{q_i} if and only if $P_i P_{i+1}$ is a halving segment cutting e . Since $|T(f_0)| = \tilde{S}(e)$, $|T(f_n)| = 0$, these observations prove the Lemma.

PROOF OF THE THEOREM. Let $e_1, e_2, \dots, e_{2n-1}$ be parallel lines cutting the plane into strips containing one point of S ; i.e. let $|S(e_i)| = i$. Consider those halving segments which cut less than $\sqrt{\frac{n}{2}}$ such lines; their number

is obviously $\leq n\sqrt{2n}$. On the other hand, the number of intersections of the e_i -s and the halving segments is

$$1 + 2 + \dots + n - 1 + n + n - 1 + \dots + 1 = n^2$$

by the Lemma, hence there are at most $n^2 / \sqrt{\frac{n}{2}} = n\sqrt{2n}$ halving seg-

ments having $\geq \sqrt{\frac{n}{2}}$ intersections with the e_i -s. This proves the Theorem.

We remark that the Lemma characterizes the halving segments in the following sense: *Let a system of segments joining two points of a finite set S be given such that any line e containing no point of S intersects exactly $\tilde{S}(e)$ segments. Then $|S|$ is even and the given segments are the halving segments.* We omit details.

A REMARK ON SEMIGROUPS THAT ARE SEMILATTICES OF GROUPS

By

S. LAJOS

Department of Mathematics, K. Marx University of Economics, Budapest

(Received November 4, 1970)

Let S be a semigroup. Following the notation and terminology of A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON [1] we shall say that S is a semilattice of groups if it is the set-theoretical union of a set $\{G_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ of mutually disjoint subgroups G_α :

$$(1) \quad S = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

such that, for every α, β in Λ the products $G_\alpha G_\beta$ and $G_\beta G_\alpha$ are both contained in the same G_γ ($\gamma \in \Lambda$). The structure of semigroups which are semilattices of groups was described by A. H. CLIFFORD. Recently some ideal theoretical characterizations of semigroups which are semilattices of groups were obtained by the author (see [2], [3], [4], [6]). For example, a semigroup S is a semilattice of groups if and only if the relation

$$(2) \quad L \cap R = LR$$

holds for any left ideal L and any right ideal R of S . The author also proved that a semigroup S is a semilattice of groups if and only if it is a regular duo semigroup [5].

In this note we prove some further criteria for an arbitrary semigroup to be a semilattice of groups. Our first criterion reads as follows.

THEOREM 1. *A semigroup S is a semilattice of groups if and only if the relation*

$$(3) \quad L \cap R = LSR$$

holds for every left ideal L and every right ideal R of S .

PROOF. Necessity. Let S be a semigroup which is a semilattice of groups. It is known that every one-sided ideal of S is two-sided and S is regular (cf. [1] vol. I). This implies the relation

$$(4) \quad SI = I = IS$$

for any ideal I of S . Hence

$$(5) \quad I_1 \cap I_2 = I_1 S \cap S I_2 = I_1 S^2 I_2 = I_1 S I_2$$

for any couple of (two-sided) ideals I_1, I_2 of S , i.e. the condition (3) holds.

Sufficiency. Let S be a semigroup with property (3) for any left ideal L and for any right ideal R of S . Then (3) implies that $L=LS^2$ and $R=S^2R$ for any left ideal L and any right ideal R of S , respectively. Therefore S is a duo semigroup. Hence every quasi-ideal of S is also a two-sided ideal.¹ Finally (3) implies

$$(6) \quad ISI = I$$

for any (two-sided) ideal I of S . This guarantees that S is regular (cf. LUH [7]). Thus S is a regular duo semigroup, that is, S is a semilattice of groups.

Theorem 1 is completely proved.

The following theorems can be proved analogously.

THEOREM 2. *A semigroup S is a semilattice of groups if and only if the relation*

$$(7) \quad B \cap L = LSB$$

holds for every bi-ideal B and every left ideal L of S .

THEOREM 3. *A semigroup S is a semilattice of groups if and only if the relation*

$$(8) \quad B \cap R = BSR$$

holds for any bi-ideal B and any right ideal R of S .

REMARK. Theorem 2 and Theorem 3 remain true with quasi-ideal instead of bi-ideal.

References

- [1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*, I - II. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1961 and 1967.
- [2] S. LAJOS, Note on semigroups which are semilattices of groups, *Proc. Japan Acad.*, **44** (1968), 805 - 806.
- [3] S. LAJOS, On semilattices of groups, *Proc. Japan Acad.*, **45** (1969), 383 - 384.
- [4] S. LAJOS, Characterizations of semigroups that are semilattices of groups (In Hungarian) *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **19** (1969), 113 - 115.
- [5] S. LAJOS, Notes on regular semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **46** (1970), 253 - 254.
- [6] S. LAJOS, On a class of inverse semigroups, *Algebra Seminar Report, University of California, Davis*, **3** (1969), 39 - 43.
- [7] J. LUH, A characterization of regular rings, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 741 - 742.

¹ See [1] vol. 1, p. 85. A semigroup S is said to be *duo* if every one-sided ideal of S is two-sided.

NEW PROOF AND EXTENSION OF THE FUNCTIONAL EQUATION OF LERCH'S ZETA-FUNCTION

By

M. MIKOLÁS

Math. Department of the Techn. University, Budapest

(Received December 30, 1970)

1. Introduction

A few years ago, in [7] a new simple proof has been given for the classical functional equation of the function $\zeta(s)$ of RIEMANN, avoiding the application of deeper methods of the theory of functions and yielding simultaneously a more general formula of HURWITZ [3]

$$(1.1) \quad \zeta(1-s, x) = 2\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-s} \cos\left(2n\pi x - \frac{\pi s}{2}\right) \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Here the first term results by analytic continuation with respect to s of the series

$$(1.2) \quad \zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1, 0 < x \leq 1).$$

The function $\zeta(s, x)$ has an only singularity in the s -plane viz. a simple pole at $s=1$ with residue 1, and it is connected with $\zeta(s)$ by $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$, $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1) \zeta(s)$. (Remark that (1.1) can be found in the literature only with the restriction $\operatorname{Re} s > 1$).¹

In what follows we want to show that a famous relation for the so-called LERCH zeta-function, which is defined for $\operatorname{Re} s > 0$, x and ω real, $x \neq 0, -1, \dots$ and ω not-integer by

$$(1.3) \quad \zeta(s; x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(n\omega)}{(x+n)^s}, \quad e(z) = e^{2\pi iz},$$

¹ Throughout this paper, any complex power is to be taken with its principal value.

² Cf. e.g. [9], p. 36–37 and [10], p. 266–267. For the general importance of the Hurwitz zeta-function in the analytic theory of numbers we refer to [4], Ch. I–3.

can be deduced much more quickly in the same manner. The functional equation in question:

$$(1.4) \quad \zeta(1-s; x, \omega) = \frac{I(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e\left(x(1-\omega) - \frac{s}{4}\right) \zeta(s; 1-\omega, x) + \right. \\ \left. + e\left(\frac{s}{4} - x\omega\right) \zeta(s; \omega, -x) \right\} \\ (0 < \operatorname{Re} s < 1, x \text{ and } \omega \text{ not int.})$$

is apparently equivalent to the formula

$$(1.5) \quad \zeta(1-s; x, \omega) = I(s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2\pi i(k-\omega)]^{-s} e(x(k-\omega)),$$

and has been established in [5] on the lines of Riemann's original considerations, i.e. by using a complicated contour integral representation for $\zeta(s; x, \omega)$. Since the series (1.3) converges, contrasted with (1.2), also in the critical strip $0 < \operatorname{Re} s < 1$, and (1.1) is (together with Riemann's functional equation for $x=1$ or $x=\frac{1}{2}$) an immediate consequence of (1.4) — (1.5) when $\omega \rightarrow 0$, the verification below seems to provide the easiest, "natural" way to the main property of $\zeta(s)$.

As an application, we deduce simply the corresponding facts for the bilateral series

$$(1.6) \quad Z(s; x, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x+n|^{-s} e(n\omega) \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

whose significance in the theory of Dirichlet's L -functions, cyclotomy and close connection with theta-functions as well as with some problems of geometry of numbers have been studied by LIPSCHITZ [6] and EPSTEIN [1], respectively. In (1.6) x and ω are real parameters without restriction; the prime beside the summation sign means, however, that for $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ the term with $n=-x$ is to be omitted.

Further applications of the method, which is based upon a general transformation principle for Fourier integrals, will be given elsewhere.

2. Proof of (1.4) — (1.5) and some consequences

The series (1.3) is absolutely convergent for $\operatorname{Re} s > 1$, $x \neq 0, -1, \dots$ and for every real ω . Since obviously $\zeta(s; x+1, \omega) = e(-\omega) [\zeta(s; x, \omega) - x^{-s}]$ and $\zeta(s; x, \omega+1) = \zeta(s; x, \omega)$, we suppose in the following that $0 < x < 1$, $0 < \omega < 1$.

Taking any fixed $\epsilon > 0$, $\varrho > 1$, partial summation and elementary estimation show that (1.3) converges uniformly concerning the variable s in the domain $\operatorname{Re} s \geq \epsilon$, $|s| \leq \varrho$. Hence $\zeta(s; x, \omega)$ exists and is holomorphic also in the half-plane $\operatorname{Re} s > 0$ for arbitrary x and ω in consideration, so that it suffices to verify (1.5) for $0 < s < 1$.

Now, the complex Fourier coefficients of $\zeta(1-s; x, \omega)e(x\omega)$ as a function of x over the interval $(0, 1)$ are:

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 \zeta(1-s; x, \omega) e(x(\omega - k)) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{s-1} e((t-n)(\omega - k) + n\omega) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t^{s-1} e(t(\omega - k)) dt = I(s) [2\pi i(k - \omega)]^{-s} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned}$$

the inversion of integration and summation being justified by dominated convergence. The corresponding Fourier expansion represents the function for all $x \in (0, 1)$, because the uniform convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} (x+n)^{-s} e(n\omega)$ in $0 < x < 1$ (for fixed s and ω) implies the differentiability of $\zeta(s; x, \omega)$ there. Thus we have

$$e(x\omega) \zeta(1-s; x, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e(kx) = I(s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2\pi i(k - \omega)]^{-s} e(kx),$$

or by writing $[2\pi i(k - \omega)]^{-s} = (2\pi)^{-s} e(-s/4) (k - \omega)^{-s}$ ($k > 0$) and $[2\pi i(k - \omega)]^{-s} = (2\pi)^{-s} e(s/4) (n + \omega)^{-s}$ ($k = -n \neq 0$), and separating the Fourier series in two parts, the relation (1.4). Qu. e. d.

Let us registrate Lerch's functional equation also in the form:

$$(2.1) \quad \begin{cases} e(x\omega) \zeta(1-s; x, \omega) - \int_0^1 \zeta(1-s; x, \omega) e(x\omega) dx = \\ = \frac{I(s)}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e\left(nx - \frac{s}{4}\right) (n - \omega)^{-s} + e\left(\frac{s}{4} - nx\right) (n + \omega)^{-s} \right]. \end{cases}$$

Hence (1.1) follows for $\omega \rightarrow +0$ at once.

As far as the special case $\omega = \frac{1}{2}$ is concerned, we have for $0 < \operatorname{Re} s < 1$ on the one hand

$$(2.2) \quad \zeta\left(s; x, \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+n)^{-s} = 2^{1-s} \zeta\left(s, \frac{x}{2}\right) - \zeta(s, x),$$

and on the other hand by (1.5):

$$\begin{aligned}\zeta\left(s, x, \frac{1}{2}\right) &= I(1-s)(\pi i)^{s-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2k-1)^{s-1} e^{(2k-1)i\pi x} \\ &= 2I(1-s)\pi^{s-1} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{s-1} \sin\left[(2m+1)\pi x + \frac{\pi s}{2}\right].\end{aligned}$$

Therefore replacing s by $1-s$:

$$\begin{aligned}(2.3) \quad 2^{-s} \zeta\left(1-s, \frac{x}{2}\right) - \zeta(1-s, x) &= \\ &= 2I(s)\pi^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-s} \cos\left[(2m+1)\pi x - \frac{\pi s}{2}\right],\end{aligned}$$

which reduces as $x \rightarrow 1-0$ to Riemann's functional equation:

$$(2.4) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} I(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s).$$

Note that (1.4) realizes the analytic continuation of the Lerch zeta-function into the half-plane $\operatorname{Re} s \geq 0$, so that $\zeta(s; x, \omega)$ is plainly an *entire* function of s , whenever ω is not an integer. Otherwise $\zeta(s; x, \omega)$ degenerates to $\zeta(s, x)$ which is, as mentioned, a *meromorphic* function of s . The corresponding properties of the associated functions

$$(2.5) \quad \begin{cases} \xi(s; x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi\omega}{(x+n)^s} = \frac{1}{2} [\zeta(s; x, \omega) + \zeta(s; x, -\omega)] \\ \eta(s; x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi\omega}{(x+n)^s} = \frac{1}{2i} [\zeta(s; x, \omega) - \zeta(s; x, -\omega)] \end{cases}$$

can be obtained easily.

3. Connection with the generalized zeta-functions of Lipschitz and Epstein

The Laurent series (1.6) converges absolutely for $\operatorname{Re} s > 1$ and for arbitrary real x and ω . Its sum $Z(s; x, \omega)$, the so-called zeta-function of Lipschitz, is closely connected with $\zeta(s; x, \omega)$, namely we have for $0 < x < 1$

$$(3.1) \quad \begin{cases} Z(s; x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s} e(n\omega) + \sum_{n=0}^{\infty} (n-x)^{-s} e(-n\omega) = \\ = \zeta(s; x, \omega) + e(-\omega) \cdot \zeta(s; 1-x, -\omega), \end{cases}$$

and this relation holds by analytic continuation everywhere in the s -plane.

Therefore the functional equation of $Z(s; x, \omega)$, deduced in [6] and [1] by means of contour integration, theory of residues or by properties of theta-functions, is a simple corollary of (1.4).

In fact, putting in (1.4) $1-x, -\omega$ instead of x and ω resp., we get by addition and considering (3.1) at once:

$$(3.2) \quad e(x\omega) Z(1-s; x, \omega) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi s}{2} \cdot Z(s; \omega, -x),$$

the desired result. Since by definition $Z(s; 0, \omega) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cos(2n\pi\omega)$ ($\operatorname{Re} s > 1$) and in particular $Z(s; 0, 0) = 2\zeta(s)$, (3.2) is again a generalization of (2.4).

By well-known properties of the gamma-function, the functional equation (3.2) may be written also in the form:

$$(3.3) \quad e(x\omega) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z(s; x, \omega) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) Z(1-s; \omega, -x),$$

or introducing the notation

(3.4)

$$H(s; x, \omega) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \left[e\left(\frac{x\omega}{2}\right) Z(s; x, \omega) + e\left(-\frac{x\omega}{2}\right) Z(s; \omega, -x) \right],$$

it is equivalent to

$$(3.5) \quad H(1-s; x, \omega) = H(s; x, \omega).$$

The meaning of (3.5) may also be expressed in saying that

$$(3.6) \quad \Theta(t) = H\left(\frac{1}{2} + it; x, \omega\right)$$

is an even function of t : a counterpart and extension of Riemann's Ξ -function.

The relations (3.2)–(3.3) evidence that $Z(s; x, \omega)$ vanishes for $s = -2, -4, \dots$ identically with respect to x and ω , moreover also $Z(0; x, \omega) \equiv 0$ if ω is not an integer. By (3.5) it may be conjectured that all the points of the strip $0 < \operatorname{Re} s < 1$, where $Z(s; x, \omega) = 0$ identically for x, ω , lie on the line $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$; this being a far-reaching generalization of Riemann's hypothesis.

Finally we remind of the fact that (1.6) is a special case of Epstein's zeta-functions, which are defined in [1] by multiple complex trigonometric

series with certain powers of quadratic forms in place of $|x+n| = [(x+n)^2]^{1/2}$, and satisfy functional equations analogous to (3.2).³ Remark that all these relations as well as a number of associated properties can be got in elementary way by the appropriate version of the above Fourier method.

References

- [1] P. EPSTEIN, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen I-II, *Math. Ann.*, 56 (1903), 615–644; 63 (1907), 205–216.
- [2] A. ERDÉLYI, *Higher transcendental functions*, Vol. III. (New York–Toronto–London, 1955).
- [3] A. HURWITZ, Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s) = \sum (D/n)n^{-s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 27 (1882), 86–101.
- [4] E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Vol. II. (Leipzig, 1927).
- [5] M. LERCH, Note sur la fonction $\tilde{\Lambda}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2k\pi ix}/(w+k)^s$, *Acta Math.*, 11 (1887), 19–24.
- [6] R. LIPSCHITZ, Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, *J. f. reine u. angew. Math.*, 105 (1889), 127–156.
- [7] M. MIKOLÁS, A simple proof of the functional equation for the Riemann zeta-function and a formula of Hurwitz, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 261–263.
- [8] C. L. SIEGEL, Contributions to the theory of Dirichlet L -series and the Epstein zeta-functions, *Ann. of Math.* (2) 44 (1943), 143–172.
- [9] E. C. TITCHMARSH, *The theory of the Riemann zeta-function* (Oxford, 1951).
- [10] E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *Modern analysis*, 4. edition (Cambridge, 1952).

³ For more recent investigations on the subject see [2], Ch. XVII, and [8] too.

ON THE VECTOR SOLUTION OF THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

By

RAHMI IBRAHIM IBRAHIM ABDEL KARIM

Cairo University, Faculty of Science, Mathematical Department

(Received December 15, 1970)

§ 1. Introduction

We shall deal with the system of differential equations

$$(a) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

where $\mathbf{A}(t)$ denotes an $n \times n$ continuous matrix of period p and $\mathbf{f}(t)$ is a continuous periodic vector of n components of the same period p

$$(1) \quad \mathbf{A}(t+p) = \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{f}(t+p) = \mathbf{f}(t).$$

The corresponding homogeneous and adjoint systems are

$$(b) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

and

$$(c) \quad \mathbf{z}' = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{z}$$

respectively. Here \mathbf{A}^T denotes the transposed matrix of \mathbf{A} . Let $\mathbf{Y}(t)$ be a fundamental matrix solution of (b), such that the constant matrix $\mathbf{P} = \mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t+p)$ has the form $\mathbf{P} = e^{\mathbf{K}p}$, where \mathbf{K} is in the Jordan canonical normal form

$$(2) \quad \mathbf{K} := \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & \\ & \mathbf{K}_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad \mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \alpha_r & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r \end{bmatrix} \quad (r = 1, 2, \dots, s)$$

and let the submatrices \mathbf{K}_r be of order m_r . Obviously the fundamental matrix solution $\mathbf{Y}(t)$ satisfies the system of differential equations in the matrix form

$$(B) \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}.$$

It is well known, that $\mathbf{Y}(t)$ can be written in the form

$$(3) \quad \mathbf{Y}(t) = \Phi(t)e^{\mathbf{K}t}, \quad \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

where the matrix $\Phi(t)$ is p -periodic and \mathbf{K} is in the Jordan normal form (2). The corresponding fundamental matrix solution of (c) is (see [1], § 3.2 or [2], § 1.4)

$$(4) \quad \mathbf{Z}(t) = (\mathbf{Y}^{-1}(t))^T = \Psi(t)e^{-\mathbf{K}^T t} \text{ with } (\Phi^{-1})^T = \Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n).$$

Referring to [3], there corresponds to each submatrix \mathbf{K}_r of \mathbf{K} with the eigenvalue $\alpha_r = 0$ exactly one p -periodic solution $\mathbf{y}_{(r)}(t) = \varphi_{(r)}(t)$ of (b), and similarly one p -periodic solution $\mathbf{z}_{[r]}(t) = \psi_{[r]}(t)$ of (c) with

$$(5) \quad (r) = m_1 + m_2 + \dots + m_{r-1} + 1, \quad [r] = m_1 + m_2 + \dots + m_r.$$

It is comfortable to write $\mathbf{Y}(t)$ in the form

$$(6) \quad \mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)) = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_s)$$

with

$$\mathbf{Y}_r = (\mathbf{y}_{(r)}, \mathbf{y}_{(r)+1}, \dots, \mathbf{y}_{[r]}),$$

where \mathbf{Y}_r is a rectangular matrix of type $n \times m_r$. Similarly we can write the other matrices $\mathbf{Z}(t)$, $\Phi(t)$ and $\Psi(t)$. Thus referring to (3) and (4), it follows that

$$(7) \quad \mathbf{Y}_r(t) = \Phi_r(t)e^{\mathbf{K}_r t}, \quad \mathbf{Z}_r(t) = \Psi_r(t)e^{-\mathbf{K}_r^T t}.$$

Using the method of variation of constants, the solution of (a) can be written in the form

$$\mathbf{x}(t) = \sum_1^n \mathbf{y}_\mu(t) c_\mu(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}(t) = \mathbf{Y}(t) \left(\int_0^t \mathbf{Z}^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{c}(0) \right).$$

It is convenient to write the vector solution $\mathbf{x}(t)$ as the sum of s vector components

$$(8) \quad \mathbf{x}(t) = \sum_1^s \mathbf{r}_x(t)$$

with

$$(9) \quad \mathbf{r}_x(t) = \sum_{(r)}^{|r|} \mathbf{x}_\mu(t) = \sum_{(r)}^{|r|} \mathbf{y}_\mu(t) c_\mu(t) = \mathbf{Y}_r(t) \left(\int_0^t \mathbf{Z}_r^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{c}_r(0) \right),$$

where

$$(10) \quad \mathbf{c}_r^T = (c_{(r)}, c_{(r)+1}, \dots, c_{[r]}).$$

In this paper we prove that the vector components $\mathbf{r}_x(t)$ of the solution $\mathbf{x}(t)$ of (a), which are formed from the vectors $\mathbf{x}_\mu(t)$ by the relation (9), are solutions of certain systems of differential equations. We study the asymptotic behaviour of the vector solutions $\mathbf{r}_x(t)$ as well as the whole so-

lution $\mathbf{x}(t)$ of (a) by using elementary methods. Theorems on the matrix $\mathbf{K} = \frac{1}{p} \log [(\mathbf{Y}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t+p))]$, which plays a decisive role in the study of the behaviour of the solution $\mathbf{x}(t)$ of (a), are also included.

§2. The vector solutions ${}^r\mathbf{x}(t)$

On the vectors ${}^r\mathbf{x}(t)$ we prove the following

THEOREM 1. *The vectors ${}^r\mathbf{x}(t)$, which are defined in (9) are solutions of the systems of differential equations*

$$(11) \quad {}^r\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t){}^r\mathbf{x} + {}^r\mathbf{f}(t), \quad r = 1, 2, \dots, s$$

with

$$(12) \quad {}^r\mathbf{f}(t) = \Phi_r(t)\mathbf{b}_r(t) = \Phi_r(t)\psi_r^T(t)\mathbf{f}(t).$$

We need the following

LEMMA 1. By means of the transformation

$$(13) \quad \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t)$$

with $\Phi(t)$ from (3), the system of differential equations (a) can be reduced to the system of differential equations with constant coefficients

$$(14) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{b}(t)$$

with

$$(15) \quad \mathbf{b}(t) = \psi^T(t)\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{b}(t+p) = \mathbf{b}(t).$$

PROOF. Substituting from (13) in the differential equations (a) and making use of (4) and (15), we get

$$\mathbf{u}' = \Phi^{-1}(\mathbf{A}\Phi - \Phi')\mathbf{u} + \mathbf{b}.$$

It remains only to show that the matrix, which is premultiplied by \mathbf{u} , is equal to \mathbf{K} , i.e.

$$(16) \quad \Phi' = \mathbf{A}\Phi - \Phi\mathbf{K}.$$

By virtue of (3) and the differential equation (b), we obtain

$$\Phi^{-1}(\mathbf{A}\Phi - \Phi') = \Phi^{-1}(\mathbf{A}\Phi - \mathbf{A}\Phi e^{Kt}e^{-Kt} + \Phi e^{Kt}e^{-Kt}\mathbf{K}) = \mathbf{K}.$$

REMARK. The system of differential equations (14) can be subdivided into the s independent systems

$$(17) \quad \mathbf{u}'_r = \mathbf{K}_r\mathbf{u}_r + \mathbf{b}_r, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

where m_r is the dimension of each vector. Here we have

$$(18) \quad \mathbf{u}^T = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s) \text{ with } \mathbf{u}_r^T = (u_{(r)}, u_{(r)+1}, \dots, u_{[r]})$$

and (see (15))

$$(19) \quad \mathbf{b}_r = \Psi_r^T \mathbf{f}.$$

Referring to (13) and (9), we obtain

$$(20) \quad {}^r \mathbf{x} = \Phi_r \mathbf{u}_r.$$

PROOF OF THEOREM 1. Differentiating (20) under consideration of (17), we obtain

$${}^r \mathbf{x}' = \Phi'_r \mathbf{u}_r + \Phi_r (\mathbf{K}_r \mathbf{u}_r + \mathbf{b}_r) = (\Phi'_r + \Phi_r \mathbf{K}_r) \mathbf{u}_r + \Phi_r \mathbf{b}_r.$$

Referring to (16), it can be easily shown, that

$$\Phi'_r + \Phi_r \mathbf{K}_r = \mathbf{A} \Phi_r.$$

Thus we have

$${}^r \mathbf{x}' = \mathbf{A} \Phi_r \mathbf{u}_r + \Phi_r \mathbf{b}_r.$$

By virtue of (19) and (20), we obtain the required relations (11) and (12).

§3. The matrix \mathbf{K}

The general way to obtain the matrix $\mathbf{K} = \frac{1}{p} \log \mathbf{P} = \frac{1}{p} \log [Y^{-1}(t)Y(t+p)]$, as it is described in [3], is in general laborious. That this goes in certain special cases without trouble is shown in the following

THEOREM 2. *If the periodic matrix $\mathbf{A}(t)$ of period p is commutative with its integral from 0 to t , i.e. if the relation*

$$(21) \quad \mathbf{A}(t) \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{A}(t)$$

holds identically in t , then it follows with

$$(22) \quad \mathbf{K}^\circ = \frac{1}{p} \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau,$$

that

$$(23) \quad \mathbf{P} = e^{\mathbf{K}^\circ p}.$$

To this belongs the fundamental matrix solution

$$(24) \quad \mathbf{Y}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = \Phi^\circ(t) e^{\mathbf{K}^\circ t}$$

with the periodic matrix of period p

$$(25) \quad \Phi^o(t) = e^{0 \int_0^t (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{K}^o) d\tau}.$$

PROOF. In the following the two following formulas, which can be proved by means of the series expansion of the exponential function, will be used ([4], §8&[5], §10.9)

$$(26) \quad e^{\mathbf{B} + \mathbf{C}} = e^{\mathbf{B}} \cdot e^{\mathbf{C}}, \quad \text{if } \mathbf{BC} = \mathbf{CB};$$

$$(27) \quad (e^{\mathbf{B}(t)})' = e^{\mathbf{B}(t)} \cdot \mathbf{B}'(t) = \mathbf{B}'(t) \cdot e^{\mathbf{B}(t)} \quad \text{if } \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{BB}'.$$

Obviously it follows from (27), that $\mathbf{Y}(t)$ in equation (24) is a fundamental matrix solution of the system (B). The constant matrix \mathbf{P} is

$$(28) \quad \mathbf{P} = \mathbf{Y}^{-1}(0) \mathbf{Y}(p) = e^{0 \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau},$$

from which with (22) the relation (23) follows. It remains only to prove that, the matrix $\Phi^o(t)$ in (24) can be written in the form (25). Evidently $\Phi^o(t)$ has the period p , since from (22) it is $\int_0^p (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{K}^o) d\tau = \mathbf{0}$. The relations (24) and (25) lead to the identity

$$(29) \quad e^{0 \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = e^{0 \int_0^t (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{K}^o) d\tau} \cdot e^{\mathbf{K}^o t},$$

if it is proved, that the relation

$$(30) \quad \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau \cdot \int_0^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma = \int_0^t \mathbf{A}(\sigma) d\sigma \cdot \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau$$

is valid. Since it is true for $t=0$, then the relation (30) follows by differentiating it w. r. t. t from the commutative law

$$(31) \quad \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau.$$

Now to prove the validity of (31), we compute from (1) and (21)

$$\mathbf{A}(t) \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau = \mathbf{A}(t+p) \int_0^{t+p} \mathbf{A}(\tau) d\tau - \mathbf{A}(t) \int_p^{t+p} \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_0^p \mathbf{A}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{A}(t).$$

Thus (30) and (29) are proved.

By means of canonical transformation (see e.g. [4], [6] or [7]), the matrix (22) can be brought to the Jordan canonical normal form (2) and moreover, such that the succession of the eigenvalues $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ is the same. Thus we obtain a matrix \mathbf{K}^* , which is related to the matrix \mathbf{K} in (2) by the relation $e^{\mathbf{K}^*} = \mathbf{p} = e^{\mathbf{K}P}$. The corresponding eigenvalues of these matrices are equal while the relation between the eigenvalues of \mathbf{K} and \mathbf{K}^* is clear from the equation

$$(32) \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & & \\ & \mathbf{E}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{E}_s \end{bmatrix} \text{ with } \mathbf{E}_r = n_r \cdot \frac{2\pi i}{p} \mathbf{I}_r,$$

where n_r is an integral number and \mathbf{I}_r is the unit matrix of order m_r .

Thus we obtain

COROLLARY 1. By means of canonical transformation, the matrix \mathbf{K}^* in (22) can be transformed to the matrix \mathbf{K}^* , which is related to \mathbf{K} by the relation (32), such that \mathbf{K} can be calculated.

THEOREM 3. *The assumption (21) in Theorem 2 can be replaced by the more powerful one*

$$(33) \quad \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(\tau) = \mathbf{A}(\tau) \cdot \mathbf{A}(t)$$

with arbitrary t and τ .

PROOF. There is only to show, that the relation (21) (with arbitrary lower limit) follows from (33). It is

$$\mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \mathbf{A}(t) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \mathbf{A}(t).$$

§4. The asymptotic behaviour of the vector solution $\mathbf{x}(t)$

LEMMA 2. Let $v(t)$ be an arbitrary periodic function of period p . Then

$$(34) \quad \int_0^t v(\tau) d\tau = v_1(t) + kt,$$

where $v_1(t)$ is periodic of period p , and k is the constant

$$(35) \quad k = \frac{1}{p} \int_0^p v(\tau) d\tau$$

PROOF. It is

$$\int_0^t v(\tau) d\tau = v_1(t) + kt \quad \text{with} \quad v_1(t) = \int_0^t (v(\tau) - k) d\tau.$$

By virtue of (35), it follows that

$$v_1(p) = \int_0^p (v(\tau) - k) d\tau = 0 = v_1(0).$$

LEMMA 3. Let $\mathbf{v}_r^T(t) = (v_{[r]}, v_{[r]+1}, \dots, v_{[r]})$ be an arbitrary periodic vector of period p , having m_r components, such that its m_r -th component satisfies the relation

$$(36) \quad \int_0^p v_{[r]}(\tau) d\tau \neq 0,$$

and let

$$(37) \quad \mathbf{D}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

be a matrix of rank $m_r - 1$ with $m_r = [r] - (r) + 1$. Then the relation

$$(38) \quad \int_0^t e^{\mathbf{D}_r(t-\tau)} \mathbf{v}_r(\tau) d\tau = \mathbf{w}_r(t) + \begin{bmatrix} r(t) \\ r'(t) \\ \vdots \\ r^{(m_r-1)}(t) \end{bmatrix},$$

holds, where $\mathbf{w}_r(t)$ is an m_r -dimensional periodic vector of period p , and $r(t)$ is a polynomial of degree m_r .

PROOF. Using the fact that $\mathbf{D}_r^r = \mathbf{0}$ for $r \geq m_r$, we get

$$(39) \quad \int_0^t e^{\mathbf{D}_r(t-\tau)} \mathbf{v}_{[r]}(\tau) d\tau = \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} v_{[r]} \\ \vdots \\ v_{[r]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{[r]+1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (t-\tau) + \dots + \begin{bmatrix} v_{[r]} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{(t-\tau)^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \right\} d\tau.$$

By virtue of Lemma 2, we obtain for fixed γ and $\sigma = 0, 1, \dots, m_r - 1$

$$\int_0^t v_r^{(\sigma)}(\tau) d\tau = v_r^{(\sigma+1)}(t) + k_r^{(\sigma+1)} \cdot t \text{ with } v_r^{(0)} = v_r,$$

where $v_r^{(\sigma+1)}$ is p -periodic and

$$(40) \quad k_r^{(\sigma+1)} = \frac{1}{p} \int_0^p v_r^{(\sigma)}(\tau) d\tau.$$

By using partial differentiation, the occurring integrals in (39) can be successively calculated for fixed γ and $\sigma = 0, 1, \dots, m_r - 1$

$$(41) \quad \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\sigma}}{\sigma!} v_r(\tau) d\tau = v_r^{(\sigma+1)}(t) + \sum_{\mu=1}^{\sigma+1} k_r^{(\mu)} \frac{t^{\sigma+2-\mu}}{(\sigma+2-\mu)!}.$$

Substituting from (41) in (39) and arranging the sum of the vectors, we obtain

$$(42) \quad \int_0^t e^{D_r(t-\tau)} v_r(\tau) d\tau = \left[\begin{array}{l} \sum_{\mu=0}^{m_r-1} v_{(r)+\mu}^{(\mu+1)} \\ \vdots \\ v_{(r)+\mu}^{(m_r+\mu)} - \sum_{\mu=0}^{m_r-1} k_{(r)+\mu}^{(\mu+1)} \\ \vdots \\ v_{(r)+\mu}^{(m_r-1)} - \sum_{\mu=1}^{m_r-1} k_{(r)+\mu}^{(\mu)} \\ \vdots \\ v_{(r)}^{(1)} - k_{(r)-1}^{(1)} - k_{(r)}^{(2)} \end{array} \right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{l} k_{(r)}^{(1)} \cdot t \\ k_{(r)}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} k_{(r)+1}^{(1)} \cdot \frac{t^2}{2!} + k_{(r)+1}^{(2)} \cdot t \\ k_{(r)+1}^{(1)} \cdot t + k_{(r)+1}^{(2)} \\ k_{(r)+1}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] + \dots + \left[\begin{array}{l} \sum_{\mu=1}^{m_r} k_{(r)}^{(\mu)} \frac{t^{m_r-\mu+1}}{(m_r-\mu+1)!} \\ \sum_{\mu=1}^{m_r} k_{(r)}^{(\mu)} \frac{t^{m_r-\mu}}{(m_r-\mu)!} \\ \sum_{\mu=1}^{m_r-1} k_{(r)}^{(\mu)} \frac{t^{m_r-\mu-1}}{(m_r-\mu-1)!} \\ \vdots \\ k_{(r)}^{(1)} t + k_{(r)}^{(2)} \end{array} \right].$$

In the first summation we collect all the p -periodic terms together, such that the other summations contain only polynomials in t with fixed lower

indices. To every polynomial vector, we have to add suitable constants, such that the relation on the R. S. of (38) is satisfied. Adding the additional negative constants to the periodic vector in the first summation, we obtain the required formula (38).

In the formula (42), there exists a term of the highest possible power t^{m_r} , namely the term $k_{[r]}^{(1)} \frac{t^{m_r}}{m_r!}$, whose factor $k_{[r]}^{(1)}$ is different from zero because of the assumptions (36) and (40). Consequently, it follows that the polynomial $r(t)$ in (38) is of degree m_r , which completes the proof.

LEMMA 4. By adding a vector of the form $e^{\mathbf{D}_r t} \mathbf{c}_r(0)$ to both sides of (38) with \mathbf{D}_r and $\mathbf{c}_r(0)$ from (37) and (10,) we obtain the special form

$$(43) \quad \int_0^t e^{\mathbf{D}_r(t-\tau)} \mathbf{v}_r(\tau) d\tau + e^{\mathbf{D}_r t} \mathbf{c}_r(0) = \mathbf{w}_r(t) + k_{[r]}^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{t^{m_r}}{m_r!} \\ \frac{t^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \\ \vdots \\ \vdots \\ t \end{bmatrix}$$

with (see (40))

$$(44) \quad k_{[r]}^{(1)} = \frac{1}{p} \int_0^p v_{[r]}(\tau) d\tau,$$

PROOF. It is

$$e^{\mathbf{D}_r t} \mathbf{c}_r(0) = \begin{bmatrix} c_{(r)}(0) + c_{(r)+1}(0) \cdot t + \dots + c_{[r]}(0) \frac{t^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \\ c_{(r)+1}(0) + \dots + c_{[r]}(0) \frac{t^{m_r-2}}{(m_r-2)!} \\ \vdots \\ c_{[r]}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t) \\ q'(t) \\ \vdots \\ q^{(m_r-1)}(t) \end{bmatrix}$$

for arbitrary $\mathbf{c}_r(0)$, where $q(t)$ is an arbitrary polynomial of degree $m_r - 1$. Referring to (38) and (42), the relation

$$r(t) = k_{[r]}^{(1)} \frac{t^{m_r}}{m_r!} + h(t)$$

is valid, where $h(t)$ is a definite polynomial of degree $m_r - 1$. We need only to determine the constants $c_{(r)}(0), \dots, c_{[r]}(0)$, such that $q(t) = -h(t)$.

On the boundedness of the vector solutions $\mathbf{x}(t)$ for unbounded increasing t we state the following

THEOREM 4. *Each component of the vector solution $\mathbf{x}(t)$ is bounded for t increasing without limit, and periodic of period p in either one of the following two cases:*

(i) *If the eigenvalue α_r of the corresponding submatrix \mathbf{K}_r is not equal to zero. Here \mathbf{x} is uniquely determined.*

(ii) *If the eigenvalue $\alpha_r = 0$ and $\int_0^p \mathbf{z}_{[r]}^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = 0$ simultaneously.*

In this case \mathbf{x} is uniquely determined with the exception of one parameter.

For the proof see [3].

Now we prove the following theorem by using elementary methods.

THEOREM 5. *Let \mathbf{K}_r be a submatrix of \mathbf{K} with the eigenvalue $\alpha_r = 0$. And let*

$$\int_0^p \mathbf{z}_{[r]}^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \neq 0.$$

Then the vector solution $\mathbf{x}_r(t) = \sum_{\mu=r}^{[r]} \mathbf{x}_\mu(t)$ takes — independent of the initial conditions — values of the power order t^{m_r} , where m_r is the order of \mathbf{K}_r .

PROOF. Referring to (9) and (7), we get

$$(45) \quad \mathbf{x}(t) = \Phi_r(t) \left[\int_0^t e^{\mathbf{D}_r(t-\tau)} \Psi_r^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + e^{\mathbf{D}_r t} \mathbf{c}_r(0) \right].$$

Applying Lemma 4, we can choose $\mathbf{c}_r(0)$ to obtain a particular solution $\mathbf{x}^*(t)$ in the form

$$(46) \quad \mathbf{x}^*(t) = \Phi_r(t) \left\{ \mathbf{w}_r(t) + k_{[r]}^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{t^{m_r}}{m_r!} \\ \frac{t^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} \right\},$$

where the vector $\mathbf{w}_r^T(t) = (w_{(r)}, \dots, w_{[r]})$ is p -periodic and by virtue of (7), (44), (45)

$$(47) \quad k_{[r]}^{(1)} = \frac{1}{p} \int_0^p \Psi_r^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = \frac{1}{p} \int_0^p \mathbf{z}_{[r]}^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \neq 0.$$

Evidently every solution $\mathbf{x}(t)$ can be written in the form

$$(48) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \Phi_r(t) e^{\mathbf{D}_r t} \mathbf{c}_r^*(0).$$

Referring to (46) and (47), we see that the particular solution $\mathbf{x}^*(t)$ takes values of the power order t^{m_r} . This is also valid for every solution $\mathbf{x}(t)$ with arbitrary $\mathbf{c}_r^*(0)$, since t^{m_r-1} is the highest power that is included in $e^{\mathbf{D}_r t} \mathbf{c}_r^*(0)$ in equation (48).

COROLLARY 2. If besides $\alpha_r = 0$, $\int_0^p \mathbf{z}_{[r]}^T(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau = 0$ (see (47)), then the particular solution (46) is a p -periodic function (see (47)). The general solution (48) is also p -periodic if the first component $c_{(r)}^*(0)$ of $\mathbf{c}_r^*(0)$ is arbitrary, while the other components of $\mathbf{c}_r^*(0)$ are zeros. This result coincides with Theorem 4.

COROLLARY 3. Under the assumptions of Theorem 5, each vector component $\mathbf{x}_n(t)$ of the sum $\mathbf{x}(t) = \sum_{n=(r)}^{[r]} \mathbf{x}_n(t)$ takes — independent of the initial values — values of the power order t^{m_r} .

PROOF. Substituting from (7) in (46), we obtain a particular solution

$$(49) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) = & \left(\mathbf{y}_{(r)}, -t\mathbf{y}_{(r)} + \mathbf{y}_{(r)+1}, \dots, \frac{(-t)^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \mathbf{y}_{(r)} + \right. \\ & \left. + \frac{(-t)^{m_r-2}}{(m_r-2)!} \mathbf{y}_{(r)+1} + \dots + \mathbf{y}_{[r]} \right) \cdot \left\{ \mathbf{w}_r(t) + k_{[r]}^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{t^{m_r}}{m_r!} \\ \frac{t^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Referring to (49) and (9), we get for the vector components $\mathbf{x}_{(r)+\mu}^*$ ($\mu = 0, 1, \dots, m_r-1$)

$$(50) \quad \mathbf{x}_{(r)+\mu}^*(t) = \mathbf{y}_{(r)+\mu}(t) \left[-k_{[r]}^{(1)} \frac{(-t)^{m_r-\mu}}{(m_r-\mu)!} + \sum_{\sigma=\mu}^{m_r-1} w_{(r)+\sigma} \frac{(-t)^{\sigma-\mu}}{(\sigma-\mu)!} \right].$$

Since from (7)

$$\mathbf{y}_{(r)+\mu}(t) = \sum_{\gamma=0}^{\mu} \varphi_{(r)+\gamma}(t) \cdot \frac{t^{\mu-\gamma}}{(\mu-\gamma)!}, \quad \mu = 0, 1, \dots, m_r-1,$$

then equation (50) becomes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(r)+\mu}^*(t) = & (-1)^{m_r-\mu+1} k_{[r]}^{(1)} \cdot \sum_{\sigma=0}^{\mu} q_{(r)+\sigma}(t) \cdot \frac{t^{m_r-\gamma}}{(\mu-\gamma)! (m_r-\mu)!} + \\ & + \sum_{\gamma=0}^{\mu} q_{(r)+\gamma}(t) \cdot \left(\sum_{\sigma=\mu}^{m_r-1} (-1)^{\sigma-\mu} w_{(r)+\sigma} \cdot \frac{t^{\sigma-\gamma}}{(\mu-\gamma)! (\sigma-\mu)!} \right). \end{aligned}$$

From this it is evident, that each of the vector components $\mathbf{x}_{(r)+\mu}^*$ of the sum $\mathbf{x}^*(t)$ takes values of the power order t^{m_r} . This is also valid for each vector component $\mathbf{x}_{(r)+\mu}$ from (48) (for $\mu = 0, 1, \dots, m_r - 1$) with arbitrary $\mathbf{e}_r^*(0)$.

References

- [1] E. CODDINGTON & N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, New York Toronto, London, 1955.
- [2] R. BELLMANN, *Stability theory of differential equations*, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1953.
- [3] R. I. I. ABDEL KARIM, *On the periodicity of the solutions of linear periodic differential systems*, U. pub. in Math. & Phys. Soc. of U.A.R., 1970.
- [4] W. SCHNEIDER, *Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1949.
- [5] R. BELLMANN, *Introduction to matrix analysis*, Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1960.
- [6] F. GANTMACHER, *Matrizenrechnung*, VEB Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
- [7] R. ZURMÜHL, *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*, 4. Aufl., Berlin - Göttingen - Heidelberg, Springer, 1969.

ON THE SOLUTIONS OF ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS IN WHICH THE UNKNOWN DOES NOT APPEAR EXPLICITLY

By

RAHMI IBRAHIM IBRAHIM ABDEL KARIM*

Cairo University, Faculty of Science, Mathematical Department

(Received December 15, 1970)

1. We consider the differential equation of the n -th order

$$(a) \quad L[x] \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \dots + a_{n-j}(t)x^{(j)} = f(t) \quad (1 \leq j \leq n-1),$$

where the coefficients $a_\mu(t)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n-j$) and $f(t)$ are continuous and periodic functions of the same period p and

$$(1) \quad a_{n-j}(t) \not\equiv 0.$$

In this paper we study the growth of the solutions of (a) and their derivatives in the resonance case.

By means of the substitution $x^*(t) = x^{(j)}(t)$, the differential equation (a) is reduced to the differential equation of order $n-j$

$$(a^*) \quad L^*[x^*] \equiv x^{*(n-j)} + a_1(t)x^{*(n-j-1)} + a_2(t)x^{*(n-j-2)} + \dots + a_{n-j}(t)x^* = f(t).$$

The adjoint homogeneous equations corresponding to (a) and (a^{*}) are

$$(b) \quad \bar{L}[z] \equiv (-1)^n z^{(n)} + (-1)^{n-1} (a_1(t)z)^{(n-1)} + (-1)^{n-2} (a_2(t)z)^{(n-2)} + \dots + (-1)^j (a_{n-j}(t)z)^{(j)} = 0$$

and

$$(b^*) \quad \bar{L}^*[z^*] \equiv (-1)^{n-j} z^{*(n-j)} + (-1)^{n-j-1} (a_1(t)z^*)^{(n-j-1)} + (-1)^{n-j-2} (a_2(t)z^*)^{(n-j-2)} + \dots + a_{n-j}(t)z^* = 0$$

respectively. In the differential equations (a^{*}) and (b^{*}) the unknowns themselves appear explicitly and therefore the results in [1] are applicable.

* The present address: 1st Chair of Analysis, Eötvös Loránd University, Budapest.

The fundamental system of solutions of the homogeneous equation corresponding to (a*) can be written in the form $Y^*(t) = \Phi^*(t)e^{K^*t}$, where the matrix $\Phi^*(t)$ is p -periodic and K^* is in the Jordan normal form (see e.g. [2], §2 or [3]). Let m_r^* be the order of the submatrices K_r^* , ($r = 1, \dots, s^*$) of K^* with the eigenvalues α_r , and let $\alpha_r = 0$ for $r = 1, \dots, \varrho^*$ and $\neq 0$ for $r = \varrho^* + 1, \dots, s^*$. The p -periodic linearly independent solutions of the reduced homogenous equation [adjoint equation (b*)] are $y^*_{(r)}(t) [z^*_{(r)}(t)]$ for $r = 1, \dots, \varrho^*$ (see [4], §2), where

$$(2) \quad (r) = \sum_{\mu=1}^{r-1} m_{\mu}^* + 1, \quad [r] = \sum_{\mu=1}^r m_{\mu}^*.$$

Unfortunately, it is not enough for the solution of the reduced equation (a*), that we bring the corresponding matrix K^* simply in the Jordan normal form, since our requirement is the discussion of the equation (a). And therefore it is important to obtain the fundamental matrix solution $Y(t)$ of the homogeneous equation corresponding to (a) in a convenient and simple form. For this purpose we bring the fundamental matrix solution $Y^*(t)$ in a "special normal form", which has the following properties:

1. For $\alpha_r = 0$, i.e. for $r = 1, \dots, \varrho^*$, either the mean value

$$(3) \quad \frac{1}{p} \int_0^p \varphi_{\mu}^*(t) dt = 0 \quad \text{for } \mu = (r), \dots, [r]$$

or there exists an index $0 \leq i_r \leq m_r^* - 1$, such that for the mean value the following relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p} \int_0^p \varphi_{(r)+i_r}^*(t) dt = 1 \\ \frac{1}{p} \int_0^p \varphi_{(r)+k}^*(t) dt = 0 \quad \text{for } k \neq i_r \end{array} \right.$$

are valid.

2. The submatrices are so arranged, that for $r = 1, \dots, \lambda$ there exist indices i_r and for $r = \lambda + 1, \dots, \varrho^*$ the relation (3) is valid. For $\alpha_r \neq 0$, i.e. for $r = \varrho^* + 1, \dots, s^*$, the succession of the submatrices is arbitrary.

3. The orders m_r^* increase monotonically for $r = 1, \dots, \lambda$:

$$(5) \quad m_r^* > m_{r-1}^*, \quad r = 1, \dots, \lambda$$

and the inequalities

$$(6) \quad i_r > i_{r-1}, \quad m_r^* - i_r > m_{r-1}^* - i_{r-1} \quad \text{for } r = 2, \dots, \lambda$$

hold. The submatrices, for which all the mean values vanish, are arranged according to increasing values of m_r^* ; here the inequality

$$(7) \quad m_r^* \geq m_{r-1}^*, \quad r = \lambda + 2, \dots, \varrho^*$$

holds. [See [2], §3].

Constructing such fundamental system of solutions $Y^*(t)$ of the reduced homogeneous equation, we can obtain — by means of the relation $y^*(t) = y^{(\tilde{f})}(t)$ — a fundamental system of solutions of the same type

$$(8) \quad Y(t) = \Phi(t)e^{Kt}$$

of the homogeneous equation corresponding to (a), but K does not need to be in the Jordan normal form (see [2], theorem 2). However, by means of canonical transformation, we can bring K to the Jordan normal form

$$(9) \quad K^\circ = C^{-1}KC.$$

The corresponding fundamental system of solutions of the homogeneous equation is

$$Y^\circ = Y(t)C = \Phi^\circ(t)e^{K^\circ t}$$

and consequently

$$(10) \quad \Phi^\circ(t) = \Phi(t)C.$$

Referring to [2], § 5, the orders $m_r = m_r(\tilde{f})$ of the submatrices K_r° ($r = 0, \dots, s^*$) of K° are

$$(11) \quad \begin{cases} m_0 = \min(\tilde{f}, i_1) \\ m_r = m_r^* + \min(\tilde{f}, i_{r+1}) - \min(\tilde{f}, i_r) \quad (i \leq r \leq \lambda - 1) \\ m_\lambda = m_\lambda^* + \tilde{f} - \min(\tilde{f}, i_\lambda) \\ m_r = m_r^* \quad (\lambda + 1 \leq r \leq s^*). \end{cases}$$

If $i_1 = 0$, then $m_0 = 0$ and hence the submatrix K_0° of K° does not appear. This fact coincides also with [2], theorem 1.

The minimal power order m^* of the solution $x^*(t)$ of (a*) as well as of its derivatives $x^{*(k)}(t)$ ($k = 1, \dots, n - \tilde{f} - 1$) is given by (see [5] & [6])

$$(12) \quad m^* = \max_{\substack{(r=1, \dots, \varrho^*) \\ (r \text{ Resonance})}} (m_r^*).$$

Further the minimal power order of the solution $x(t)$ of (a) is determined by

$$(13) \quad m = \max_{\substack{(r=0, \dots, \varrho^*) \\ (r \text{ Resonance})}} (m_r)$$

with $m_r = m_r(\tilde{f})$ from (11), where the resonance indices for $r = 1, \dots, \varrho^*$ are the same for both equations (a) & (a*). The corresponding statements hold also for the derivatives $x'(t), x''(t), \dots, x^{(\tilde{f}-1)}(t)$, if we replace the index \tilde{f} in the formula (11) by $\tilde{f}-k$ for the k -th derivative $x^{(k)}(t)$ (see [2]).

The general solution of (a) can be written in the form

$$(14) \quad x(t) = \sum_0^{s^*} {}^r x(t) \text{ with } {}^r x(t) = \sum_{\{(v)\}} {}^r x_p(t) = \sum_{\{(v)\}} {}^r y_p(t) \cdot \int_0^t z_p(t) f(t) dt,$$

where the indices $\{(v)\}, \{[v]\}$ are defined, analogously to (2), by

$$(15) \quad \begin{cases} \{(v)\} = m_0 + m_1 + \dots + m_{v-1} + 1 = (v) + \min(j, i_v) \\ \{[v]\} = m_0 + m_1 + \dots + m_v = [v] + \min(j, i_{v+1}). \end{cases}$$

The components ${}^r x(t)$ for $r = \varrho^* + 1, \dots, s^*$ can be assumed to be periodic functions. These are uniquely determined (see [4], theorem 5).

For $r = 0, 1, \dots, \varrho^*$, we have (see [1], § 3)

(16)

$${}^r x(t) = \sum_{\mu=0}^{\omega_r} \frac{t^{\omega_r - \mu}}{(\omega_r - \mu)!} {}^r \Theta_\mu(t) \text{ with } \begin{cases} \omega_r = m_r, & \text{if } r \text{ is a resonance index,} \\ \omega_r < m_r, & \text{if } r \text{ is an exceptional index,} \end{cases}$$

where the functions ${}^r \Theta_\mu(t)$ are linear combinations of the p -periodic functions $q_\mu(t)$ (for $\mu = \{(v)\}, \dots, \{[v]\}$), which are elements in the first row of $\Phi^c(t)$. We call a solution (14) of (a), which for $r = \varrho^* + 1, \dots, s^*$ is p -periodic and for $r = 0, \dots, \varrho^*$ is represented by (16) a "normal solution". We can write such normal solution in the form

$$(17) \quad x(t) = \sum_{\delta=0}^{\omega} \frac{t^{\omega - \delta}}{(\omega - \delta)!} \chi_\delta(t),$$

where $\omega = \max_{(v=0, \dots, \varrho^*)} (\omega_v)$ and $\chi_\delta(t)$ are linear combinations of the p -periodic functions ${}^r \Theta_\mu(t)$ in (16). The order of a normal solution $x(t)$ in (17) is ω , where

$$(18) \quad \omega = \max_{(v=0, \dots, \varrho^*)} \omega_v \cong \max_{(r \text{ Resonance})} \omega_r = \max_{(r \text{ Resonance})} m_r = m.$$

Let j lie in the interval

$$(19) \quad i_\gamma \leq j < i_{\gamma+1} (\gamma = 0, 1, \dots, \lambda; i_0 = 0, i_{\lambda+1} \text{ is not a bound}).$$

It is shown in [5], that all the derivatives ${}^r x^{(k)}(t)$ for $k = 0, 1, \dots, n-1$ possess the same power order ω_r (see (16)) for every index $r \neq \gamma, r \leq \varrho^*$ and also for $r = \gamma$ if $j = i_\gamma$. But if $j \neq i_\gamma$, then the power orders of the derivatives of ${}^r x(t)$ decrease successively by 1 starting from ω_γ till the order $i_\gamma = \min(j - i_\gamma, \omega_\gamma)$ and remain constant from this value and equal $\omega_\gamma - (j - i_\gamma)$ if $\omega_\gamma \leq j - i_\gamma$, equal 0 if $\omega_\gamma \geq j - i_\gamma$.

2. We study now the power order of the solution $x(t)$ of (a), such that for given k ($k = 1, \dots, n-1$), the derivative $x^{(k)}(t)$ possesses the minimal power order.

It must be noticed, that the given orders of $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, j-1$) in the formula (11) are always the minimal orders. It may occur, that e.g. $x(t)$ is a solution of (a) of minimal order (with index j), while the corresponding derivative $x'(t)$ has a greater order than the computed minimal order with index $j-1$ in (11). Conversely, $x'(t)$ may be a solution of minimal order with index $j-1$, while the integrated function $x(t) = \int x'(t)dt$ has an order, which is greater than the computed minimal order with index j . The reason is due to the fact, that for two different indices $j-k$ ($k=0, 1, \dots, j$) a different determination of the constants is necessarily required, if it is desired to obtain for instance a solution with minimal order.

First we state an organization of [5], lemma 6, whose proofs are similar.

LEMMA. If j lies in the interval (19), then the following relations hold.

(Here $\varphi_{(v)+\mu}$ denote the elements of the first row of the matrix Φ before the transformation and $\tilde{\varphi}_{(v)+\mu}$ after the transformation (see (10)) and the elements $\tilde{\varphi}_{(v)+\mu}$ are of mean value zero)

$$(20) \quad \begin{cases} \text{in case } v < \gamma \\ \left(\varphi_{(v)}, \dots, \varphi_{[v]} \right) = (O_1, O_2, \dots, O_{i_{v+1}-i_v}, \tilde{\varphi}_{(v)}, \tilde{\varphi}_{(v)+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{[v]}) - \\ - (\tilde{\varphi}_{(v+1)}, \tilde{\varphi}_{(v+1)+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{(v+1)+i_{v+1}-i_v-1}, \tilde{\varphi}_{(v+1)+i_{v+1}-i_v}, \tilde{\varphi}_{(v+1)+i_{v+1}-i_v+1}, \dots, \\ \tilde{\varphi}_{(v+1)+m_{v+1}}), \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \text{in case } v = \gamma \text{ and } j \neq i_\gamma \\ \left(\varphi_{(v)}, \dots, \varphi_{[v]} \right) = (1_1, O_2, \dots, O_{j-i_\gamma}, \tilde{\varphi}_{(\gamma)}, \tilde{\varphi}_{(\gamma)+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{[v]}), \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \text{in case } v = \gamma \text{ and } j = i_\gamma \\ \left(\varphi_{(v)}, \dots, \varphi_{[v]} \right) = (1 + \tilde{\varphi}_{(v)}, \tilde{\varphi}_{(v)+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{[v]}), \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} \text{in case } \gamma = v \leq \lambda \\ \left(\varphi_{(v)}, \dots, \varphi_{[v]} \right) = (\tilde{\varphi}_{(v)}, \tilde{\varphi}_{(v)+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{(v)+i_v-j-1}, 1 + \\ + \tilde{\varphi}_{(v)+i_v-j}, \tilde{\varphi}_{(v)+i_v-j+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{[v]}), \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \text{in case } v > \lambda \\ \left(\varphi_{(v)}, \dots, \varphi_{[v]} \right) = (\varphi_{(v)}, \dots, \varphi_{[v]}). \end{cases}$$

REMARK. In case $v = \gamma = 0$ it remains only from (21)

$$\left(\varphi_{(0)}, \varphi_{(0)+1}, \dots, \varphi_{(0)+j-1} \right) = (1_1, O_2, \dots, O_j)$$

and in case $j=1$ it remains only $(\gamma_{(0)}) = (1_1)$. Similar relations hold also for (20). In the cases (22), (23), (24), we have $[[r]] = [r]$.

By means of definition (19), the relation (11) can be made sharper by replacing the index λ by γ . Let us represent the minimal order of the derivatives $x^{(k)}(t)$ (see (14) with k as abscissa).

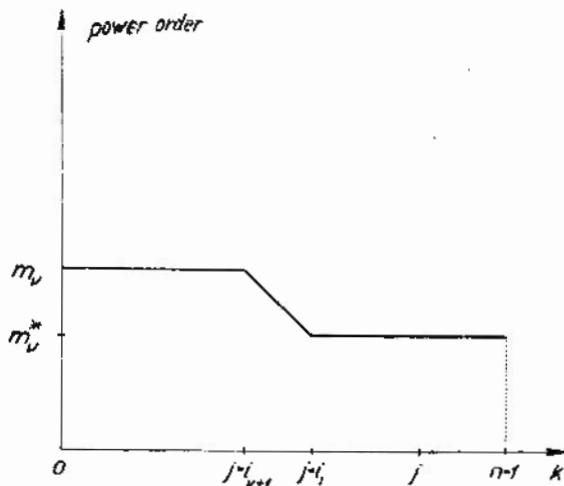


Fig. 1. (a)

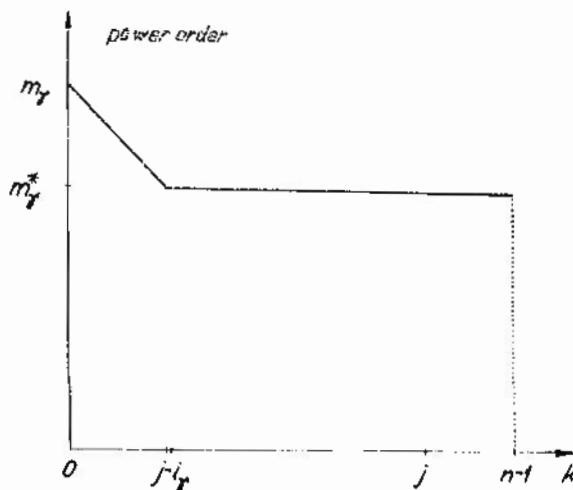


Fig. 1. (b)

The broken lines in figure 1(a) for two different indices r_1 and r_2 with existing i_r do not cut each other (see (5), (6)). Further for every index r , for which there does not exist an index i_r , we have: $m_r = m_r^*$.

We introduce now the symbols

$$(25) \quad m_{\bar{r}} = \max_{\substack{r=0, \dots, \bar{r} \\ (r \text{ Resonance})}} m_r, \quad m_{\bar{r}}^* = \max_{\substack{r=\bar{r}+1, \dots, q^* \\ (r \text{ Resonance})}} m_r,$$

where γ is defined in (19) (compare with [2], (119)).

If $\max(m_{\bar{r}}, m_{\bar{r}}^*) = m_{\bar{r}}$, then it follows from the modified relation (11), that all the derivatives $x^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) of a normal solution $x(t)$ of (a) possess the same minimal order, which is equal to $m_{\bar{r}} = m_{\bar{r}}^*$.

Here there is no problem.

It remains only the case:

$$(26) \quad \max(m_{\bar{r}}, m_{\bar{r}}^*) = m_{\bar{r}} = m$$

to be considered. If γ is a resonance index and hence $\gamma = \bar{r}$, then it follows from figure 1(b), that the power order of the derivatives $x^{(k)}(t)$ of a normal solution is equal to the power order of $x^{(k)}(t)$, i.e. $m_{\bar{r}}$.

Interesting is the case, that γ is an exceptional index, i.e.

$$(27) \quad \bar{r} < \gamma.$$

If $k \leq \bar{j} - i_{\bar{r}_{\bar{r}+1}}$, then ${}^{\bar{r}}x^{(k)}$ gives the minimal power order of a normal solution $x(t)$, as it is shown in figure 1(a). On the case

$$(28) \quad k > \bar{j} - i_{\bar{r}_{\bar{r}+1}}$$

we state

THEOREM 1. *If we subdivide a normal solution $x(t)$ of (a) under the assumptions (19), (26), (27), (28) (see also (14)) in the form*

$$(29) \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

with

$$(30) \quad x_1(t) = \sum_{r=\bar{r}}^{\bar{r}} v_{x(t)} = \sum_{\delta=0}^{\omega} \frac{t^{\omega-\delta}}{(\omega-\delta)!} z_{\delta}(t)$$

(see (17)), where we can choose

$$(31) \quad \omega = \omega_{\bar{r}} = m_{\bar{r}}^* + (\bar{j} - i_{\bar{r}_{\bar{r}+1}}) = m_{\bar{r}} + (\bar{j} - i_{\bar{r}_{\bar{r}+1}})$$

(see (11)), then the constants occurring in $x_1(t)$ in the equation (30) (see (35)) can be chosen, such that $z_0(t), z_1(t), \dots, z_{l-1}(t)$ are constants while $z_l(t)$ is not a constant, with

$$(32) \quad l = \bar{j} - i_{\bar{r}_{\bar{r}+1}}.$$

Figure 2 represents graphically the stated relations in this theorem.

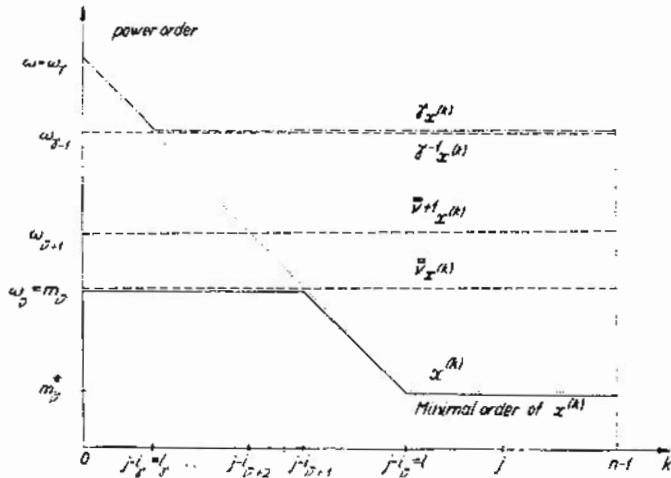


Fig. 2.

PROOF. Evidently all the summation-indices in (30) with exception of $\bar{\nu}$ are exceptional indices. If namely r (for $r = \bar{r} + 1, \bar{r} + 2, \dots, \gamma$) is a resonance index, then it follows from (11), (5) & (6) that

$$\omega_r = m_r = m_r^* + (i_{r+1} - i_r) > m_r^* + (i_{r+1} - i_r) > m_r^* + (i_{r+1} - i_r) = m_r,$$

which contradicts with (26). Therefore for these indices the constants $d_{\mu-r}$ (see [1], § 3) in a normal solution $x(t)$ can be arbitrary chosen. And consequently by virtue of (11) and (6) we can choose

$$\omega = \omega_r = m_r^* + (j - i_r) < m_r^* + j - i_r = m_r$$

as an upper bound of the sum (30). Setting analogous to (31) for $r = \bar{r} + 1, \bar{r} + 2, \dots, \gamma - 1$.

$$(33) \quad \omega_r = m_r^* + (i_{r+1} - i_r) = m_r + (i_{r+1} - i_{r+1}) < m_r$$

and observing that

$$\omega_r = m_r = m_r^* + (i_{r+1} - i_r),$$

then we can write (30) in the form

$$(34) \quad x_1(t) = \sum_{r=\bar{r}}^{\gamma} \left(\sum_{\mu=0}^{\omega_r} \frac{t^{\omega_r-\mu}}{(\omega_r-\mu)!} {}^r\Theta_\mu(t) \right).$$

Here we have (see (16) and [1], § 3)

$$(35) \quad \begin{cases} {}^r\Theta_{\mu}(t) = \sum_{r=0}^n {}^r d_{\mu-r} \varphi_{(v)} \circ r(t) \quad (\mu = 0, 1, \dots, \omega_v - 1), \\ {}^r\Theta_{\omega_r}(t) = \sum_{r=0}^{m_r-1} {}^r d_{\omega_r-r} \varphi_{(v)} \circ r(t) + \sum_{r=0}^{m_r-1} v_{(v)}^{**} \circ r(t) \varphi_{(v)} \circ r(t), \end{cases}$$

where the p -periodic functions $v_{(v)}^{**}(t)$ can be chosen of mean value zero (see [4], (62)). Comparing the powers of t in (30) and (34), by using the notation

$$(36) \quad \mu_{r\delta} = \delta - (j - i_{r+1}) \quad \text{for } \begin{cases} r = \bar{r}, \bar{r} + 1, \dots, \gamma - 1 \\ \delta \geq j - i_{r+1}, \end{cases}$$

we obtain the relation

$$(37) \quad z_r(t) = {}^r\Theta_{\delta} + \sum_{r=\bar{r}}^{\gamma-1} {}^r\Theta_{\mu_{r\delta}}(t), \quad \delta = 0, 1, \dots, j - i_{\frac{\bar{r}}{r}} = l, \dots, \omega_r,$$

which is needed only till $\delta = l$. Summations in (37) with undefined $\mu_{r\delta}$ are to be put equal zero. We notice, that the quantities (31) and (33) are the highest occurring exponents of t in ${}^r\Theta_0(t)$ and ${}^r\Theta_0$.

Referring to (21) and (35) we get

$$(38) \quad {}^r\Theta_{\delta}(t) = \sum_{r=0}^{\mu_{\bar{r}-1, \delta}} {}^r d_{\mu_{\bar{r}-1, \delta}-r} \tilde{\varphi}_{(v)} \circ r(t) + {}^r d_{\delta} \text{ with } \delta = j - i_{\bar{r}}, \dots, \begin{cases} l, & \text{if } m_{\bar{r}}^* > 0 \\ l-1, & \text{if } m_{\bar{r}}^* = 0. \end{cases}$$

In case $m_{\bar{r}}^* = 0$, the 2^{nd} sum in the 2^{nd} equation (35) is added to (38) for $\delta = l$. This is to be noticed later also in (39), (43), (45) and (46). For $\delta = 0, 1, \dots, j - i_{\bar{r}} - 1$, the relation (21) or [5], (28) is contained in (38) because $\mu_{\bar{r}-1, \delta}-r$ will be negative by virtue of (38) and therefore the sum in (38) will not appear. The formula holds whether $j = i_{\bar{r}}$ or not, as it can be verified by means of (21) and (22).

Similar to (35), it follows by means of (20) for the remaining summations in (37); i.e. for

$$r = \bar{r}, \bar{r} + 1, \dots, \gamma - 1,$$

that

$$(39) \quad \begin{aligned} {}^r\Theta_{\mu_{r\delta}}(t) &= - \sum_{r=0}^{\mu_{r\delta}} {}^r d_{\mu_{r\delta}-r} \tilde{\varphi}_{(v+1)-r}(t) + \sum_{r=i_{r+1}-i_r}^{\mu_{r\delta}} {}^r d_{\mu_{r\delta}-r} \tilde{\varphi}_{(v)+r-(i_{r+1}-i_r)}(t) = \\ &= - \sum_{r=0}^{\mu_{r\delta}} {}^r d_{\mu_{r\delta}-r} \tilde{\varphi}_{(v+1)+r}(t) + \sum_{r=0}^{\mu_{r-1, \delta}} {}^r d_{\mu_{r-1, \delta}-r} \tilde{\varphi}_{(v)+r}(t). \end{aligned}$$

Since from (36)

$$(40) \quad \delta \geq j - i_{r+1} \geq j - i_r,$$

then the sum in (37) does not appear in case

$$(41) \quad \delta = 0, 1, \dots, j - i_r - 1.$$

Consequently $\chi_\delta(t)$ is a constant by virtue of (38). (If $j = i_r$, then these terms do not appear). We have also only to deal with

$$(42) \quad \delta = j - i_r, j - i_r + 1, \dots, l.$$

Now we compute from (37), (38) and (39)

$$(43) \quad \begin{aligned} \chi_\delta(t) &= \sum_{r=0}^{\mu_{\gamma-1}, \delta} {}^r d_{\mu_{\gamma-1}, \delta-r} \tilde{q}_{(\gamma)+r}(t) + {}^r d_\delta + \\ &+ \sum_{r=\bar{v}}^{\gamma-1} \left(- \sum_{r=0}^{\mu_{\gamma\delta}} {}^r d_{\mu_{\gamma\delta}-r} \tilde{q}_{(\gamma+1)+r}(t) + \sum_{r=0}^{\mu_{\gamma-1}, \delta} {}^r d_{\mu_{\gamma-1}, \delta-r} \tilde{q}_{(\gamma)+r}(t) \right) = \\ &= {}^r d_\delta + \sum_{r=\bar{v}}^{\gamma-1} \sum_{r=0}^{\mu_{\gamma\delta}} ({}^{r+1} d_{\mu_{\gamma\delta}-r} - {}^r d_{\mu_{\gamma\delta}-r}) \tilde{q}_{(\gamma+1)+r}(t) + \sum_{r=0}^{\mu_{\bar{v}}, \delta} {}^r d_{\mu_{\bar{v}}, \delta-r} \tilde{q}_{(\bar{v})+r}(t). \end{aligned}$$

We choose now the arbitrary constants ${}^r d_r$ such that the small brackets vanish, i.e.

$$(44) \quad {}^{r+1} d_{\mu_{\gamma\delta}-r} = {}^r d_{\mu_{\gamma\delta}-r}, \quad r = \bar{v}, \bar{v} + 1, \dots, \gamma - 1,$$

where only the relation [1], (38) for $r = \bar{v}$ may be observed. Then it remains from (43) only

$$(45) \quad \chi_\delta(t) = {}^r d_\delta + \sum_{r=0}^{\mu_{\bar{v}}, \delta} {}^r d_{\mu_{\bar{v}}, \delta-r} \tilde{q}_{(\bar{v})+r}(t).$$

The sum appears here only if (see (30))

$$\mu_{\bar{v}, \delta} = \delta - (j - \bar{i}_{\bar{v}}) \geq 0,$$

i.e. by virtue of (32) if

$$\delta \geq l.$$

Referring to (43) and [1], theorem 5, it follows that $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{l-1}$ are constants, while

$$(46) \quad \chi_l(t) = {}^r d_l + \tilde{d}_0 \tilde{q}_{(\bar{v})}(t)$$

is not a constant. Thus the theorem is proved.

As an organization to Theorem 1, we prove

THEOREM 2. Under the assumptions of Theorem 1, if we set the modified function $x_1(t)$ (see (30)) in (29), then $x_2(t)$ can be chosen such that the power order of the derivative $x^{(k)}(t)$ decreases monotonically by 1, with increasing k , starting from $\omega = \omega_r$ for $k = 0$ (see (31)) till the power order

$$(47) \quad M = \text{Max} \left(m_{\frac{r}{n}}^*, m_{\frac{r}{n}}^* \right).$$

In case $M = m_{\frac{r}{n}}^*$, the decrease of the power order goes till the l -th derivative with l from (32) and in case $M = m_{\frac{r}{n}} = m_{\frac{r}{n}}^*$ it goes till the l_1 -th derivative with

$$(48) \quad l_1 = l - \left(m_{\frac{r}{n}}^* - m_{\frac{r}{n}}^* \right).$$

The figures 2 and 3, in which $x(t)$ (see (29)) is drawn as a dotted line, represent the mentioned relations, figure 2 in case l from (32) and figure 3 in case l_1 from (48).

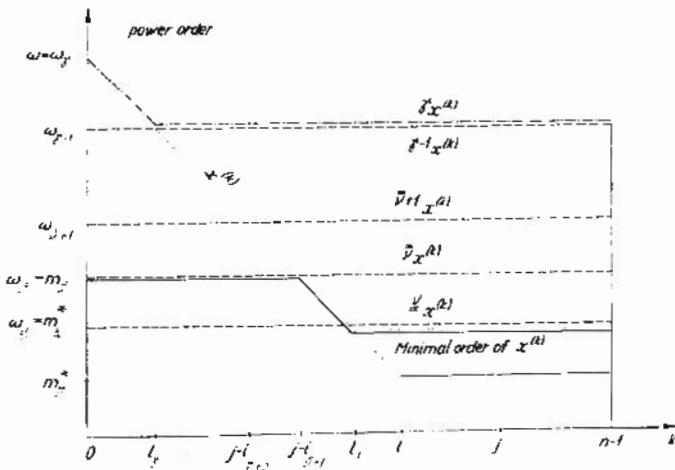


Fig. 3.

PROOF. Referring to [1] theorem 4, this theorem is proved if it is shown that $x_2(t)$ in (29) does not contain powers of t greater than t^M with M from (47). For this purpose we prove first, that there is no index r in

the sequence $\bar{\nu}+1, \dots, \lambda$, which can be a resonance index and hence it does not need to give any power of t . For such an index r , it would be (see (11), (6)).

$$m_r > m_{\bar{\nu}}^* + (i_r - i_{\bar{\nu}}) \equiv m_{\bar{\nu}}^* + (i_{\bar{\nu}+1} - i_{\bar{\nu}}) = m_{\bar{\nu}},$$

which leads to a contradiction with (26). — For the resonance indices the sequence $\lambda+1, \dots, \varrho^*$ the greatest index has, by virtue of (7), the greatest $m_r = m_{\bar{\nu}}^*$. Then from (26) it must be $m_r < m_{\bar{\nu}}$. We notice also that the case $m_r = m_{\bar{\nu}} = m_{\bar{\nu}}$ is already treated just after (25). Now the relation (47) follows immediately, since the indices $r > \varrho^*$ give rise only to periodic functions of a normal solution $x(t)$ of (a).

As an application to the Theorems 1 and 2, we consider for instance the following example:

Let: $m_1^* = 3, m_2^* = 5, m_3^* = 8, m_4^* = 4, m_5^* = 10$

$i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 5, i_4$ and i_5 do not exist

$j = 8; r = 0, 2, 4$ resonance indices.

Referring to (11), (19), (25) we find

$m_0 = 2, m_1 = 4, m_2 = 7, m_3 = 11, m_4 = 4, m_5 = 10$

$\gamma = 3, i_r = 5, \bar{\nu} = 2, m_{\bar{\nu}} = 7, m_{\bar{\nu}}^* = 5, i_{\bar{\nu}} = 3$

From (31), (32) we get

$$\omega = \omega_3 = 10, l = 5.$$

Figure 4 shows as a dotted line the power order of the k -th derivative of the solution $x(t)$ from Theorems 1 and 2, as a broken line the minimal power order of $x^{(k)}(t)$ from figure 1(a), as a dash-dotted line ${}^5x^{(k)}(t)$, as dashed line ${}^2x^{(k)}(t)$. This dashed line holds in general also for

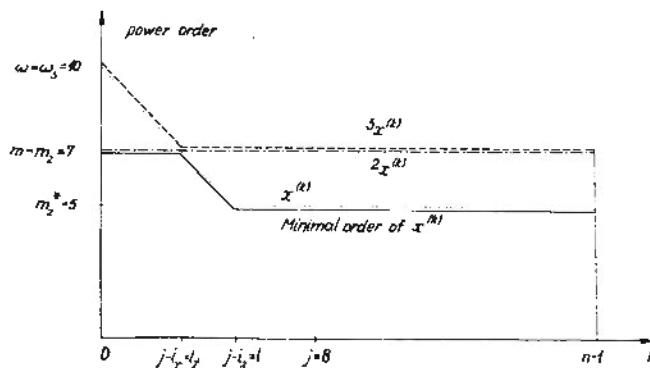


Fig. 4.

the solution (29) with ω from (31), i.e. $\omega = 10$. Only in a special choice of the constants d_i , it can go under the height $m_2 = 7$. It goes for the choice (44) till the minimal order $m_2^* = 5$.

In order to obtain an example for the case (48), we consider the same preceding example but with $m_5 = 6$. The index $\nu = 5$ will be considered also as a resonance index in additional to the other resonance indices $\nu = 0, 2, 4$.

Now it is again
 $\omega = \omega_3 = 10; l = 5$

$$\bar{\nu} = 2, m_{\frac{r}{\nu}} = 7, m_{\frac{r}{\nu}}^* = 5, \text{ but } m_{\frac{r}{\nu}} = m_{\frac{r}{\nu}}^* = m_5 = m_5^* = 6.$$

Referring to (47) and (48), we obtain $M = 6, l_1 = 4$.

The new relations are shown in figure 5.

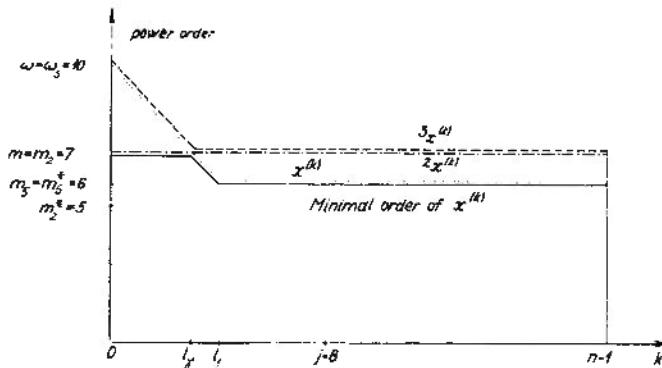


Fig. 5.

3. In this § we provide an example to illustrate the general procedure and the main ideas in [2], [5] and also in this paper.

The functions

$$y_{(1)}^*(t) = \sin t, \quad y_{(1)}^*(t) = t \sin t - 3 \cos t + 1$$

are solutions of the differential equation

$$(b^*)_1 \quad L^*[y^*] \equiv y^{**} - \frac{2 \sin t \cos t + \sin t}{3 + \sin^2 t - \cos t} y^{*'} + \frac{4 + \cos^2 t}{3 + \sin^2 t + \cos t} y^* = 0,$$

whose denominator is positive for $t \in (-\infty, \infty)$. The corresponding matrix solution $Y^*(t)$ is

$$(49) \quad Y^*(t) = \Phi^*(t) e^{K^* t} = \begin{bmatrix} \sin t & 1 - 3 \cos t \\ \cos t & 4 \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ with } K^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

The transposed reciprocal matrix $Z^*(t) = (Y^{*-1})^T$ is

$$(50) \quad Z^*(t) = \Psi^*(t) e^{-K^* T t} \\ = \frac{1}{3 + \sin^2 t - \cos t} \begin{bmatrix} 4 \sin t & -\cos t \\ -1 + 3 \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

The elements of the last row of $Z^*(t)$ form a fundamental system of the adjoint homogeneous differential equation corresponding to (b*).

We consider the solution $x^*(t)$ of the inhomogeneous differential equation corresponding to (a*₁) with the right side

$$(51) \quad f(t) = 3 + \sin^2 t - \cos t.$$

Since we have the 2π -periodic solution $z_{[1]1}^*(t)$, then we form the decisive integral

$$(52) \quad \int_0^{2\pi} z_{[1]1}^*(t) f(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin(t) dt = 0.$$

The inhomogeneous differential equation is therefore in the exceptional case. By means of the method of variation of parameters, the general solution $x^*(t)$ of the inhomogeneous equation is

$$(53) \quad x^*(t) = -t \sin t + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t - \cos t \right) + \\ + t^1 c_0 \sin t + {}^1c_0 (1 - 3 \cos t) + {}^1c_1 \sin t.$$

Choosing ${}^1c_0 = 1$, then $x^*(t)$ is 2π -periodic for arbitrary 1c_1 . But if ${}^1c_0 \neq 1$, then the order of $x^*(t)$ is $m^* = 1$. Since the factor of t in $x^*(t)$ is a non-constant 2π -periodic function, then the derivative $x'(t)$ has the same power order $m^{**} = m^* = 1$ (compare with [1], theorem 6).

We consider now the differential equation

$$(a_1) \quad L[x] \equiv x^{(j+2)} - \frac{2 \sin t \cos t + \sin t}{3 + \sin^2 t - \cos t} x^{(j+1)} + \\ + \frac{4 + \cos^2 t}{3 + \sin^2 t - \cos t} x^{(j)} = 3 + \sin^2 t - \cos t$$

with $j \geq 1$, which is reduced to the differential equation (a*₁) by means of the substitution $x^{(j)}(t) = x^*$. We construct by using the method given in [2], § 5, the matrix solution $Y(t)$ of the homogeneous differential equation corresponding to (a₁). Choosing $j = 1, 2, 3$, we obtain successively the matrix solutions $Y(t)$ (see [2], (54), (55), (60)).

For $j = 3$, we obtain

$$(54) \quad j = 3 \parallel Y(t) = \Phi(t) \cdot H(t) =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & \cos t & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\sin t & \cos t \\ \hline 0 & -\cos t & -2 \sin t \\ \hline \hline 0 & & \Phi^* & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & t & \frac{t^2}{2!} & 0 & \frac{t^3}{3!} \\ \hline 1 & t & 0 & \frac{t^2}{2!} \\ \hline 1 & 0 & 0 & t \\ \hline \hline 0 & & 1 & t \\ \hline \end{array}$$

with

$$H(t) = e^{KT} \text{ and } K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Here we have (see (49))

$$(55) \quad \Phi^* = \begin{bmatrix} \sin t & 1 - 3 \cos t \\ \cos t & 4 \sin t \end{bmatrix}.$$

Then we determine the matrix C in the transformation

$$K^o = C^{-1}KC,$$

which brings the matrix K in the Jordan normal form K^o . We obtain (see [2], (90), (79), (88), (81))

$$(56) \quad j = 1 \parallel C = C_1 = {}^*C_1 \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hline \cdots & 1 \\ \hline 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline & 1 \end{bmatrix},$$

$$(57) \quad j = 2 \parallel C = C_1 \cdot C_2 = {}^*C_1 B_1 \cdot {}^*C_2 V_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline -1 & 1 & \end{bmatrix} \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline & 1 \\ \hline & 1 \end{bmatrix}$$

$$(58) \quad j = 3 \parallel C = C_1 C_2 C_3 = *C_1 B_1 *C_2 V_2 *C_3 V_3 =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline -1 & 1 0 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline -1 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \cdot I, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 0 1 & \\ \hline 1 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \cdot I, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 1 & \\ \hline 1 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} .$$

From this we obtain the new fundamental systems (see (9), (10))

$$Y^0(t) = \Phi^0(t)e^{K^0 t} \quad \text{for } j = 1, 2, 3.$$

For $j = 3$, we get

$$(59) \quad j = 3 \parallel Y^0(t) =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\cos t & 1 & 0 & \cos t & 0 \\ \hline \sin t & 0 & 1 & -\sin t & \cos t \\ \hline \cos t & 0 & 0 & 1 - \cos t & -2 \sin t \\ \hline -\sin t & 0 & 0 & \sin t & 1 - 3 \cos t \\ \hline -\cos t & 0 & 0 & \cos t & 4 \sin t \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 1 & t & \frac{t^2}{2!} \frac{t^3}{3!} \\ \hline 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ \hline 1 & t & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}.$$

In (59) we notice that

$$j = 3, j > i_1 = 1, \gamma = 1 \quad (\text{see (19)})$$

$$\varphi_{(0)} = -\tilde{\varphi}_{(1)} = -\cos t \neq \text{const.},$$

$$\varphi_{(0)} = 1, \varphi_{(0)+1} = 0, \varphi_{(0)+j-i_1} = \varphi_{(0)+2} = \tilde{\varphi}_{(1)} = \cos t \neq \text{const.},$$

$$\varphi_{(0)+3} = \tilde{\varphi}_{(1)+1} = 0.$$

This result coincides with the lemma and [5], lemma 6. We obtain similar relations also for $j = 1, 2$.

The reciprocal transposed matrix

$$Z^0 = (Y^{0-1})^T = (\Phi^{0-1})^T e^{-K^0 T \cdot t} = \Psi^0(t) \cdot e^{-K^0 T \cdot t}$$

corresponding to (59), i.e. for $j = 3$, is

$$(60) \quad j = 3 \parallel Z^0(t) = \frac{1}{3 + \sin^2 t - \cos t}.$$

0	$3 + \sin^2 t - \cos t$	0	0	0
0	0	$3 + \sin^2 t - \cos t$	0	0
$3 + \sin^2 t - \cos t$	0	0	$3 + \sin^2 t - \cos t$	0
$2 \sin t \cos t - 4 \sin t$	$-4 \sin t \cos t$	$1 + 3 \sin^2 t$	$2 \sin t \cos t$	$-\cos t$
$3 + \cos^2 t - 4 \cos t$	$\cos t - 3 \cos^2 t$	$-\sin t + 2 \sin t \cos t$	$2 + \cos^2 t - \cos t$	$\sin t$

1				
	1			
	$-t$	1		
	$\frac{t^2}{2!}$	$-t$	1	
	$-\frac{t^3}{3!}$	$\frac{t^2}{2!}$	$-t$	1

Similarly, we get $Z^j(t)$ for $j = 1, 2$. We see from the last rows of $Z^j(t)$ for $j = 1, 2, 3$, that

$$(61) \quad z_{[0]} = \frac{1}{3 + \sin^2 t - \cos t} \left(\frac{7}{2} - 4 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \quad \text{for } j = 1, 2, 3,$$

i. e. independent of j , as it was shown in the proof of [2], theorem 8. Further the corresponding periodic solutions $z_{[1]}$ for $j = 1, 2, 3$ is

$$(62) \quad z_{[1]} = z_{[1]}^* = \frac{\sin t}{3 + \sin^2 t - \cos t},$$

which coincides with [2], theorem 7.

Evidently, the function $z_{[0]}$ can be also computed by means of the formula [2], (103):

$$(63) \quad z_{[0]} = -(\psi_{[1]}^* \tilde{\varphi}_{[1]} + \psi_{[1]}^* \tilde{\varphi}_{[1]} + \psi_{[1]}^*).$$

Referring to the last row of the matrix $\Psi^*(t)$ (see 50) and the j -th row of the matrix $\Phi(t)$ for $j=3$ (see (54)), and the similar expressions for $j = 1, 2$, we obtain

$$\begin{cases} \psi_{[1]}^* = \frac{-1 + 3 \cos t}{3 + \sin^2 t - \cos t}, & \psi_{[1]}^* = \frac{\sin t}{3 + \sin^2 t - \cos t}, \\ j\tilde{\varphi}_{[1]} = -\cos t, & j\tilde{\varphi}_{[1]} = -2 \sin t. \end{cases}$$

Substituting in (63), we obtain again (61).

Further from the representations of $Y^0(t)$ or $Z^0(t)$ for $j = 1, 2, 3$ (see (59), (60)), we can write the orders m_r of the submatrices, and we obtain the table

	$j = 0$	1	2	3	$j \geq 2$
m_0	0	1	1	1	1
m_1	2	2	3	4	$j+1$

which coincides exactly with the table of the minimal order in the partial resonance case (compare with (11).)

While the index $r=1$ in the special case (51) is an exceptional index (see (52)), the evaluation of the integral

$$(65) \quad \int_0^{2\pi} z_{[[0]]}(t) f(t) dt = 7\pi \neq 0$$

indicates that $r=0$ is a resonance index.

Instead of (61) and (65) we can also, by means of [5], theorem 7, compute the integral

$$\int_0^{2\pi} z_{[[0]]}(t) f(t) dt = \int_0^{2\pi} x^*(t) dt = 7\pi \neq 0,$$

with the aid of the 2π -periodic solution

$$(66) \quad x^*(t) = \frac{7}{2} - 4 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t + {}^1c_1 \sin t$$

of the reduced inhomogeneous equation (compare with (53) by setting ${}^1c_0 = 1$).

As a whole, it follows that the minimal power order of the solution $x(t)$ for $j = 0, 1, 2, 3$ and so on, has the sequence of values

$$(67) \quad m = m_0 = 0, 1, 1, 1 \text{ and so on.}$$

The general solution $x(t)$ of (a₁) can be obtained by two different methods: Either by successive integration of $x^*(t)$ from (53) or by computing a particular solution of (a₁) by means of the method of variation of parameters and adding it to the general solution of the corresponding homogeneous differential equation, which is obtained from the matrix $Y^0(t)$ for $j = 1, 2, 3$ (see (59)).

Using the substitution

$$(68) \quad x(t) = {}^0x(t) + {}^1x(t).$$

the method of variation of parameters for $j = 3$ gives (see (14))

(69)

$$\begin{cases} {}^0x(t) = -\cos t \left(\frac{7}{2}t - 4 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t + {}^0c_1 \right), \\ j = 3 \quad \begin{cases} {}^1x(t) = \frac{5}{2} \left(\frac{t^3}{3!} + t \cos t \right) + 4 \sin t - \frac{33}{16} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 2t \cos t + \\ \quad + {}^1c_0 \left(\frac{t^3}{3!} + t \cos t \right) + {}^1c_1 \left(\frac{t^2}{2!} + \cos t \right) + {}^1c_2 t + {}^1c_3. \end{cases} \end{cases}$$

Similar expressions can be obtained for $j = 1, 2$.

Solutions with minimal order (67) can be easily constructed: (see (53), (69))

- { For $j = 0$, we need only to set (as it is already known) ${}^1c_0 = 1$ in (53).
- { For $j = 1$, the constants are arbitrary chosen.
- { For $j = 2$, we set ${}^1c_0 = -\frac{5}{2}$, the other constants are arbitrary.
- { For $j = 3$, we set ${}^1c_0 = -\frac{5}{2}$ and ${}^1c_1 = 0$, while the other constants are arbitrary.

If we go from a fixed solution $x(t)$, we obtain for the sequence of functions $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ and so on, the power orders whose figures can be determined from (69) and the similar expressions for $j = 1, 2$. We consider now the case $j = 3$, we choose for instance a fixed definite solution $x(t)$ and obtain for its derivatives $x^{(k)}(t)$ the four different cases (see (69)).

In all cases, it is

$$(70) \quad \begin{cases} j = 3, i_1 = 1, \gamma = 1 \text{ (see (19))}, j - i_\gamma = 2 \\ \omega_0 = m_0 = 1 \text{ (}\nu = 0 \text{ resonance index).} \end{cases}$$

Case I: ${}^1c_0 + \frac{5}{2} \neq 0$.

Here $\omega_1 = 3$, $i_\gamma = j - i_\gamma = 2$ (see (70)). This case coincides with [5], case 2b).

Case II: ${}^1c_0 + \frac{5}{2} = 0$, but ${}^1c_1 \neq 0$.

Here $\omega_1 = 2$, $i_\gamma = 2$. This case corresponds to [5], case 2c).

Case III: ${}^1c_0 + \frac{5}{2} = 0$, ${}^1c_1 = 0$ and 1c_2 is arbitrary.

Here $\omega_1 = 1$, $i_\gamma = i_1 = \min(j - i_1, \omega_1) = 1$ (see [5], case 2a)).

Case IV: ${}^1c_0 - 1 = 0$, the other c 's are arbitrary.

Here we have

$$(71) \quad \begin{cases} \omega_r = \omega_1 = 3, & l_r = j - i_r = 2 \\ \bar{\nu} = 0 \text{ (see (26)),} & i_{\bar{\nu}} = i_0 = 0 \\ \omega_{\bar{\nu}} = m_{\bar{\nu}} = \omega_0 = m_0 = 1 \text{ (see (70)),} \\ l = j - i_{\bar{\nu}} = 3 \text{ (see (32)).} \end{cases}$$

The constant 1c_0 is chosen, such that the coefficient of t in the sum $x'''(t) = {}^0x'''(t) + {}^1x'''(t)$ will vanish (see theorem 1).

In this case the condition (44), which is now reduced to

$$(72) \quad {}^1d_0 = {}^0d_0,$$

must be satisfied. Here 1d_0 and 0d_0 are the coefficients of the highest power of ${}^1x(t)$ and ${}^0x(t)$ respectively. We find that

$${}^1d_0 = \frac{5}{2} + {}^1c_0, \quad {}^0d_0 = \frac{7}{2}.$$

Hence the condition (72) gives ${}^1c_0 = 1$, just as it was assumed in the beginning of case IV.

In the following figure, we represent the preceding four cases and also the minimal solution (the last is represented by a broken line).

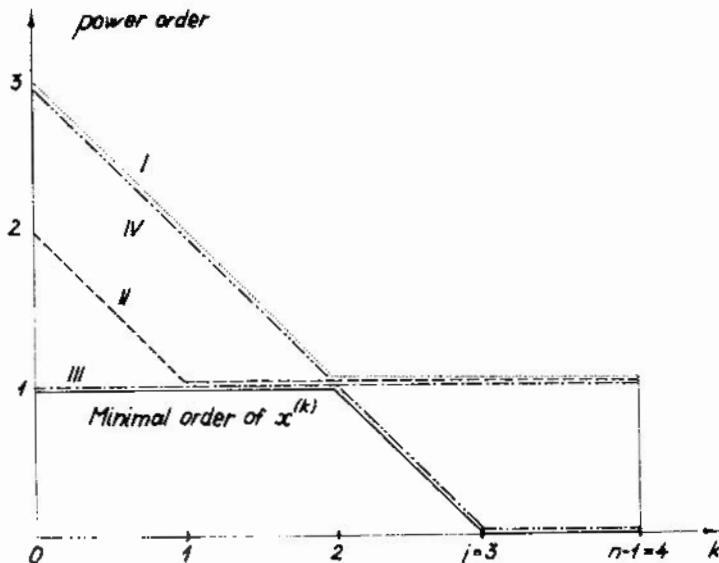


Fig. 6.

It is evident, that all possible cases are considered with the cases I

till IV. — There is no solution $x(t)$, that simultaneously with its three derivatives $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ possesses the corresponding minimal order, i.e. which is represented by the broken line in figure 6.

References

- [1] R. I. I. ABDEL KARIM, Über den Resonanzfall bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Archivum mathematicum* (Brno), 3 (1967), 11–30.
- [2] R. I. I. ABDEL KARIM, Studium des Resonanzfalles bei gewöhnlichen linearen reduzierten Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, *Acta U. Palackianae Olomucensis*, 27 (1968), 27–49.
- [3] F. GANTMACHER, *Matrizenrechnung*, VEB Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin (1956).
- [4] R. I. I. ABDEL KARIM, Studium des Resonanzfalles bei systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 10 (1962), 229–241.
- [5] R. I. I. ABDEL KARIM, On the power order of the solutions and their derivatives of ordinary linear differential equations in the resonance case, *Acta F.R.N.U. Comen. Mathematica*, 19 (1968), 205–218.
- [6] R. I. I. ABDEL KARIM, On the behaviour of the solutions and their first $(n-1)$ derivatives of the n -th order differential equations with periodic coefficients, *Spisy Prir. F.U.J.E. Purkyně v Brně*, 6 (1970), 237–250.

OSCILLATORY AND NON-OSCILLATORY SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

By

RAHMI IBRAHIM IBRAHIM ABDEL KARIM

Cairo University, Faculty of Science, Mathematical Department

(Received January 20, 1971)

1. In this paper we study the oscillatory and non-oscillatory solutions of the differential equations of the third order of the form

$$(e) \quad (p(x)y'')'' + (p(x)y')' + r(x)y = 0,$$

where $p(x) > 0$, $r(x) \geq 0$ are continuous functions of $x \in (-\infty, \infty)$ and $r(x) \equiv 0$ does not hold in any interval.

The differential equation (e) is equivalent to the system of differential equations of the first order

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = w \\ w' = -w - ry, \end{cases}$$

from which it follows, that for any arbitrary four numbers $(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ there exists exactly a function $y(x)$ with the properties $y(\xi) = \eta_1$, $y'(\xi) = \eta_2$, $(py')'(\xi) = \eta_3$, which is the solution of the differential equation (e) in the interval $(-\infty, \infty)$ (see e.g. [1] or [2]).

The solutions y_1, y_2, y_3 of the differential equation (e) form a fundamental system of solutions, i.e. linearly independent system of solutions, if the determinant (Wronskian)

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ (py'_1)' & (py'_2)' & (py'_3)' \end{vmatrix}$$

is different from zero in at least one point.

Since

$$[pW]' = \left[p \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ (py'_1)' & (py'_2)' & (py'_3)' \end{vmatrix} \right]' = -pW,$$

then the Wronski determinant of the fundamental system of (e) is

$$(1) \quad W(y_1, y_2, y_3) = k \frac{e^{-x}}{p(x)},$$

where k is a convenient constant.

THEOREM A. Let $y(x)$ be the solution of the differential equation (e) with the property $y(a) = y'(a) = 0$, $(py')'(a) \neq 0$, $-\infty < a < \infty$. Then $y(x)$ has no zero point on the left of a .

For the proof see [3].

Let $a \in (-\infty, \infty)$ and let y_1, y_2 be two linearly independent solutions of the differential equation (e) with the properties

$$\begin{aligned} y_1(a) &= y_1'(a) = 0, \quad (py_1)'(a) = 1, \\ y_2(a) &= (py_2)'(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1, \quad a \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

The set of solutions $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ with the property $y(a) = 0$ is called the band of solutions of the differential equation (e) at the point a [3].

Evidently the band satisfies the differential equation

$$w(py')' - (pw)'y' + [(pw)'' + (pw)']y = 0,$$

where $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$. Since this differential equation is of the second order, then the zero points (if there exist) of all its solutions are simple in (a, ∞) and separate each other.

We state the following theorems (see [3]).

THEOREM B. Let $x_1 > a$ be the first zero point of the solution y_1 of the differential equation (e) with double zero point at a . Then every solution y of the band at the point a has just one zero point in the interval (a, x_1) .

THEOREM C. If one solution of (e) has in some interval (z, ∞) , $-\infty < z < \infty$ infinite number of zero points, then every solution of (e) with one zero point has in (z, ∞) infinite number of zero points.

2. We consider now two differential equations of the form (e)

$$(e_1) \quad (p(x)y')'' + (p(x)y')' + r_1(x)y = 0$$

and

$$(e_2) \quad (p(x)z')'' + (p(x)z')' + r_2(x)z = 0$$

and we assume that $p(x) > 0$, $r_1(x)$, $r_2(x)$ are continuous functions of $x \in (-\infty, \infty)$. Then the following theorems hold.

THEOREM 1. Let $0 \leq r_1(x) \leq r_2(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$. If any solution $y(x)$ of the differential equation (e₁) has in some interval (a, ∞) , $-\infty < a < \infty$ infinite number of zero points [i.e. it is oscillatory on (a, ∞)], then every solution of the differential equation (e₂) with one zero point is also oscillatory on (a, ∞) . Further if y and z are solutions of the differential equations (e₁) and (e₂) with the properties $y(a) = y'(a) = 0$, $(py)'(a) \neq 0$ and $z(a) = z'(a) = 0$, $(pz')'(a) \neq 0$, then the first zero point on the right of a of the solution $z(x)$ is not greater than the first zero point on the right of a of the solution $y(x)$.

PROOF. We shall prove first the second statement. Suppose that the solution $y(x)$ of the differential equation (e₁) is oscillatory on (a, ∞) . Let $y(x)$ and $z(x)$ be two solutions of (e₁) and (e₂) with the properties

$$y(a) = y'(a) = 0, (py)'(a) > 0, z(a) = z'(a) = 0, (pz')'(a) = (pz')'(a).$$

Further let $x_1 > a$ be the first zero point on the right of a of the solution $y(x)$ and let $x_1^* > a$ be the first zero point on the right of a of the solution $z(x)$. It is required to prove that $x_1^* \leq x_1$.

Instead of (e₂) we write

$$(p(x)z')'' + (p(x)z')' + r_1(x)z = (r_1(x) - r_2(x))z.$$

Let y_1, y_2, y_3 represent a fundamental system of solutions of (e₁), whose Wronski determinant equals $e^{-x}/p(x)$ (see [1]). By means of the method of variation of constants, it can be easily shown that

$$(2) \quad z(x) = y(x) + \int_a^x [r_1(t) - r_2(t)] p(t) e^t W(x, t) z(t) dt,$$

where

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & y'_3(t) \end{vmatrix}.$$

Evidently the function $W(x, t)$ is, for fixed t , a solution of the differential equation (e₁) with a double zero point at $x=t$, where $W(t, t) = 0$,

$$[W(x, t)]'_x(t) = 0, [p(x)W'(x, t)]'_x(t) = W(t) = \frac{e^{-t}}{p(t)} > 0 \quad (\text{see (1)}), \quad \text{and}$$

therefore $W(x, t) \geq 0$ for $a \leq t \leq x \leq x_1$. Since the expression under the integral sign in (2) is not positive because $r_1 - r_2 \leq 0$, then it follows that $x_1^* \leq x_1$.

From this and Theorem C, under the assumption that any solution $y(x)$ of (e₁) is oscillatory on (a, ∞) , $-\infty < a < \infty$, it is also shown, that every solution of the differential equation (e₂) with a double zero point has at least one zero point on the right of the double zero point.

In order to prove the first statement, we assume that $z(x)$ is any arbitrary solution of the differential equation (e_2) with the property $z(z) = 0$, $-\infty < z < \infty$. Let z_1 be the solution of (e_2) with the double zero point at z . From the result just proved, z_1 has at least one zero point x_2 (say), where $z < x_2$, $x_2 \in (z, \infty)$. Then the solutions $z(x)$ and $z_1(x)$ belong to the same band of solutions of (e_2) at z . Referring to Theorem B, the solution $z(x)$ must have one zero point \bar{x}_2 (say) in the interval (z, x_2) , $z < \bar{x}_2 < x_2$. Let again $\bar{z}_1(x)$ be the solution of (e_2) with the double zero point at \bar{x}_2 . Then \bar{z}_1 has at least one zero point x_3 , $x_3 > \bar{x}_2$. The solutions $z(x)$, $\bar{z}_1(x)$ belong to the same band at \bar{x}_2 and by virtue of Theorem B, the solution $z(x)$ must have one zero point in the interval (\bar{x}_2, x_3) , and so on. From this process it follows that $z(x)$ has in (z, ∞) , $-\infty < z < \infty$ infinite number of zeros.

Similarly it can be proved:

THEOREM 2. *Let $0 \leq r_1(x) \leq r_2(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$. If the solution $z(x)$ of the differential equation (e_2) with a double zero point at a has no zero point on the right of a , then the solution $y(x)$ of the differential equation (e_1) with a double zero point at a has also no zero point on the right of a .*

3. The solution of the differential equation (e) is said to be non-oscillatory on (a, ∞) , if it has at most one double zero point or at most two simple zeros.

THEOREM 3. *In the differential equation (e) let $p(x)$ be of class C^1 on (a, ∞) and let $p'(x) - (x-a)r(x) > 0$ for $x > a$. Then every solution of (e) is non-oscillatory on (a, ∞) .*

PROOF. Referring to Theorem A, it is enough to prove that $y(x)$ with the property $y(a) = y'(a) = 0$, $(py')'(a) = 1$ has no zero point on the right of a . Integrating the equation (e) term by term from a to x , $-\infty < x < \infty$, we get the following integral identity

$$(py')' + py' + \int_a^x rydt = (py')'(a) = 1.$$

From this we obtain

$$(3) \quad py' + py - \int_a^x [p'(t) - (x-t)r(t)]y(t)dt - (x-a) = 0.$$

Suppose on the contrary, that $x_1 > a$ is the first zero point of y on the right of a . Then $y(x_1) = 0$, $y'(x_1) \neq 0$. Thus the relation (3) gives

$$0 = p(x_1)y'(x_1) - \int_a^{x_1} [p'(t) - (x_1-t)r(t)]y(t)dt - (x_1-a) < 0.$$

This contradiction leads to the conclusion that $y(x)$ is non-oscillatory on (a, ∞) .

References

- [1] E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1936).
- [2] L. BIEBERBACH, *Einführung in die theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet*, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, (1956).
- [3] M. GREGUŠ & R. I. I. ABDEL KARIM, Some properties of some special differential equations of the third order, *Proceeding of the Mathematical & Physical Society of U. A. R.*, (1969), 67 – 74.

CHARACTERIZATIONS OF SEMIGROUPS BEING BANDS OF LEFT SIMPLE SEMIGROUPS

By

ILDIKÓ KISS

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest

(Received September 15, 1970)

(Revised August 25, 1971)

§1. A semigroup S is called *left [right] simple* if S itself is the only left [right] ideal of S . It is clear that a semigroup is a group if and only if it is a both left and right simple semigroup.

By a *decomposition* of a semigroup S one means a partition of S into the union of disjoint subsemigroups. Suppose that

$$S = \bigcup \{S_\alpha : \alpha \in \Omega\}$$

a decomposition of S such that for every pair of elements α, β of the index set Ω , there is an element γ of Ω such that

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma.$$

If one defines a product in Ω by

$$\alpha\beta = \gamma \quad \text{if} \quad S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma,$$

then Ω becomes thereby a semigroup such that for every α in Ω , $\alpha^2 = \alpha$. Ω is said to be a *band*, and S is called a *band of semigroups* S_α .

If S_α is a left simple semigroup [right simple semigroup, group] for every α in Ω , then one says that S is a *band of left simple semigroups [right simple semigroups, groups]*.

Theorems 4.2 and 4.3 of [2] give characterizations of semigroups being unions of left simple semigroups [right simple semigroups, groups] with help of the well-known Green's relations $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ (see § 2).

This paper substitutes relations \mathcal{L}, \mathcal{R} and \mathcal{H} with the greatest congruences $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*$ and \mathcal{H}^* contained in \mathcal{L}, \mathcal{R} and \mathcal{H} respectively, and gives such results for semigroups, being bands of left simple semigroups [right simple semigroups, groups] which are word for word analogous with theorems 4.2 and 4.3 of [2].

Note, that there are known a lot of papers characterizing semigroups being bands or semilattices of groups in other ways. (e.g. [1], [3]). The definitions and results of this paper are analogous to ones of [2].

§2. Throughout the paper we shall adhere to the following notions:

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{if } S \text{ has identity element,} \\ S \cup 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Two elements a, b of a semigroup S are said to be \mathcal{L} -equivalent if they generate the same left ideal of S , that is, if $S^1a = S^1b$. \mathcal{R} -equivalence is defined dually. The intersection of equivalence relations \mathcal{L} and \mathcal{R} is denoted by \mathcal{H} .

By $\mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*, \mathcal{H}^*]$ we mean the greatest congruence relation contained in $\mathcal{L} [\mathcal{R}, \mathcal{H}]$.

LEMMA 2.1. Let a, b be elements of a semigroup S . Then

$$a\mathcal{L}^*b [a\mathcal{R}^*b]$$

if and only if

$$xa\mathcal{L}xb [ax\mathcal{R}bx]$$

for every x in S^1 .

PROOF. We say that the elements a, b of a semigroup S are ϱ -equivalent if $xa\mathcal{L}xb$, that is, if $S^1xa = S^1xb$ for every x in S^1 . Clearly $a\mathcal{L}b$ implies $S^1xya = S^1xyb$ and $S^1xay = S^1xby$ for every x, y in S^1 (that is, $ya\varrho yb$ and $ay\varrho by$ for every y in S^1). Thus ϱ is a congruence on S contained in \mathcal{L} .

Let ϱ' be a congruence on S contained in \mathcal{L} . Let a, b be elements of S such that $a\mathcal{L}^*b$. Then $xa\varrho'xb$, whence $xa\mathcal{L}xb$ for every x in S^1 , thus $\varrho' \subseteq \varrho$. Hence it follows that ϱ is the greatest congruence contained in \mathcal{L} , that is, $\varrho = \mathcal{L}^*$, q.e.d.

LEMMA 2.2. The following conditions are equivalent about elements a, b of a semigroup S .

- (1) $a\mathcal{H}^*b$;
- (2) $a\mathcal{L}^*b$ and $a\mathcal{R}^*b$;
- (3) $xa\mathcal{L}xb$ and $ax\mathcal{R}bx$ for every x in S^1 ;
- (4) $xa\mathcal{H}xb$ and $ax\mathcal{H}bx$ for every x in S^1 .

PROOF. Obviously condition (4) implies condition (3). Conversely $a\mathcal{R}b$ implies $xa\mathcal{R}xb$ for every x in S^1 , thus $xa\mathcal{L}xb$ and $a\mathcal{R}b$ imply $xa\mathcal{H}xb$. One can prove similarly that

$$ax\mathcal{R}bx \text{ and } a\mathcal{L}b \quad (x \text{ in } S^1)$$

imply $ax\mathcal{H}bx$, thus condition (3) implies condition (4).

We prove now that conditions (1) and (2) are equivalent. Since $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L} [\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}]$ implies $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{L} [\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{R}]$, by definition of $\mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*]$, $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{L}^* [\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{R}^*]$. Thus we get $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*$. Conversely $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$ and $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{R}$ imply $\mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{H}$. Thus by definition of \mathcal{H} congruence $\mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*$ is contained in \mathcal{H}^* . We have

$$\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^* \quad \text{and} \quad \mathcal{H}^* \supseteq \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*.$$

Thus $\mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*$.

By Lemma 2.1, conditions (2) and (3) are equivalent. This completes the proof of Lemma 2.2.

THEOREM 2.3. *If a, b and ab all belong to the same \mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*] class L^* [R^*] of a semigroup S , then L^* [R^*] is a left [right] simple subsemigroup of S .*

THEOREM 2.4. *If a, b and ab all belong to the same \mathcal{H}^* class H^* of a semigroup S , then H^* is a subgroup of S .*

PROOF OF THEOREMS 2.3 AND 2.4. Let L^* [H^*] be an \mathcal{L}^* [\mathcal{H}^*] class of a semigroup S , and elements a, b, ab all belong to L^* [H^*]. We show first that L^* [H^*] is a subsemigroup of S . Let c and d be elements of L^* [H^*]. Since \mathcal{L}^* [\mathcal{H}^*] is a congruence relation, from $a\mathcal{L}^*c$ and $d\mathcal{L}^*b$ [$a\mathcal{H}^*c$ and $d\mathcal{H}^*b$] we get

$$ab\mathcal{L}^*cb \quad \text{and} \quad cd\mathcal{L}^*cb \quad [ab\mathcal{H}^*cb \quad \text{and} \quad cd\mathcal{H}^*cb].$$

Thus

$$ab\mathcal{L}^*cd \quad [ab\mathcal{H}^*cd].$$

that is,

$$cd\in L^* \quad [cd\in H^*].$$

We prove now that the subsemigroup L^* [H^*] of S is left simple. Note, that a semigroup S is left simple if and only if for any pair of elements u, v of S , there exists an element s in S such that $v=su$. (See p. 6 of [2]).

Let u and v be elements of L^* [H^*]. Then $S^1u=S^1v$. Since $L^*[H^*]$ is a subsemigroup of S , $u^2\in L^*$ [$u^2\in H^*$], and thus

$$u\mathcal{L}^*u^2 \quad [u\mathcal{H}^*u^2].$$

Thus there exist elements x, y in S^1 such that

$$u=xu^2 \quad \text{and} \quad v=yu=y(xu^2)=(yxu)u.$$

Since \mathcal{L}^* [\mathcal{H}^*] is a congruence relation, $u\mathcal{L}^*u^2$ [$u\mathcal{H}^*u^2$] implies $xu\mathcal{L}^*xu^2$ [$xu\mathcal{H}^*xu^2$] but $xu\mathcal{L}^*u$ ($=xu^2$) [$xu\mathcal{H}^*u$] implies

$$yxu\mathcal{L}^*yu=v \quad [yxu=\mathcal{H}^*yu=v].$$

Let $s=yxu$. From the foregoing it follows

$$su=v \quad \text{and} \quad s\in L^* \quad [H^*].$$

Thus L^* [H^*] is a left simple subsemigroup of S . One can prove dually that if a, b, ab all belong to the same \mathcal{R}^* [\mathcal{H}^*] class R^* [H^*] of a semigroup S , then R^* [H^*] is a right simple subsemigroup of S .

This completes the proof of Theorem 2.3.

We recall that a semigroup S is a group if and only if it is left and right simple.

If a, b and ab all belong to the same \mathcal{W}^* -class H^* of a semigroup S , then H^* is a left and right simple subsemigroup of S , thus H^* is a subgroup of S . This completes the proof of Theorem 2.4.

REMARK. Note, that by Theorem 2.16 of [2] if a, b and ab all belong to the same \mathcal{H} -class H of a semigroup S , then H is a subgroup of S .

One could easily prove that if a, b and ab all belong to the same \mathcal{H} -class H , further to the same \mathcal{W}^* -class H^* of a semigroup S , then H^* is a normal subgroup of H .

§3. A semigroup S is said to be *left [right]* regular if for any element a of S there exists x in S such that $xa^2=a$, and a subset X of a semigroup S is called *semiprime* if for every a in S , $a^2 \in X$ implies $a \in X$. Clearly a semigroup S is left [right] regular if and only if for every element a of S , $a \mathcal{L}^* a^2 [a \mathcal{R}^* a^2]$.

We introduce the following definitions:

We say that a semigroup S is $*$ -left [right] regular if for any element a in S , $a \mathcal{L}^* a^2 [a \mathcal{R}^* a^2]$.

We call a subset X of a semigroup S^* -semiprime if

$$xay \in X \text{ if and only if } xa^2y \in X$$

for every a in S and x, y in S^1 .

The following Lemma is analogous to Lemma 4.1. of [2].

LEMMA 3.1. A semigroup S is $*$ -left [right] regular if and only if every left [right] ideal of S is $*$ -semiprime.

PROOF. Assume that the semigroup S is $*$ -left regular. Let I be a left ideal of S , a an element of S and x, y elements of S^1 .

Since S is $*$ -left regular, $a \mathcal{L}^* a^2$.

Since \mathcal{L}^* is a congruence,

$a \mathcal{L}^* a^2$ implies $xay \mathcal{L}^* xa^2y$, thus $S^1xay = S^1xa^2y$, whence it follows that

$$xay \in I \text{ implies } xa^2y \in S^1xa^2y = S^1xay \subseteq I$$

and

$$xa^2y \in I \text{ implies } xay \in S^1xay = S^1xa^2y \subseteq I.$$

These mean that I is $*$ -semiprime.

Conversely assume that every left ideal of the semigroup S is $*$ -semiprime. Let a be an element of S and x an element of S^1 . Since the left ideal $S^1xa^2 [S^1xa]$ is $*$ -semiprime,

$$xa \in S^1xa^2 \quad [xa^2 \in S^1xa],$$

whence

$$S^1xa \subseteq S^1S^1xa^2 = S^1xa^2$$

$$[S^1xa^2 \subseteq S^1S^1xa = S^1xa].$$

Thus we get $S^1xa = S^1xa^2$ for every x in S^1 , whence $a \mathcal{L}^* a^2$. Thus S is $*$ -left regular.

§4. With help of \sim -left [right] regularity and \sim -semiprime conditions one can give such results concerning semigroups being bands of left simple semigroups [right simple semigroups, groups], which are analogous to Theorems 4.2 and 4.3 of [2].

THEOREM 4.1. *The following conditions are equivalent on a semigroup S :*

- (A) S is \sim -left [right] regular;
- (B) Every left [right] ideal of S is \sim -semiprime;
- (C) Every \mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*] class of S is a left [right] simple subsemigroup of S ;
- (D) Every \mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*] class of S is a subsemigroup of S ;
- (E) S is a band of left [right] simple semigroups.

THEOREM 4.2. *The following conditions are equivalent on a semigroup S :*

- (A) S is both $*$ -left regular and $*$ -right regular;
- (B) Every left and every right ideal of S is \sim -semiprime;
- (C) Every \mathcal{H}^* class of S is a subgroup of S ;
- (D) Every \mathcal{K}^* class of S is a subsemigroup of S ;
- (E) S is a band of groups.

PROOF OF THEOREMS 4.1 AND 4.2. Observe first that by Lemma 3.1 conditions (A) and (B) are equivalent, furthermore by Theorem 2.3 [2.4] conditions (C) and (D) are equivalent too. Thus it is sufficient to prove the following implications:

(A) implies (C), (C) implies (E), (E) implies (A).

Let S be a \sim -left regular [both \sim -left regular and \sim -right regular] semigroup, that is, a semigroup satisfying $a\mathcal{L}^*a^2 = a\mathcal{H}^*a^2$ for every a in S .

Let L^* [H^*] be an \mathcal{L}^* [\mathcal{H}^*] class of S , and b an element of L^* [H^*].

Since $b\mathcal{L}^*b^2 = b\mathcal{H}^*b^2$, by Theorem 2.3 [2.4] L^* [H^*] is a left simple subsemigroup [subgroup] of S .

We have shown that (A) implies (C).

Assume now that S is a semigroup satisfying condition (C). Let

$$\{S_\alpha : \alpha \in \Omega\}$$

be the set of all \mathcal{L}^* [\mathcal{H}^*] classes of S . Then

$$S = \bigcup_{\alpha \in \Omega} S_\alpha$$

is such a decomposition of S , for which

(I) for every α in Ω , S_α is a left simple subsemigroup [subgroup] of S ;

(2) (since \mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*] is a congruence relation) for every pair of elements α, β of the index set Ω , there is an element γ of Ω such that $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$. This means that S is a band of left simple semigroups [groups]. We have got that (C) implies (E).

Finally, assume that S is a semigroup being a band of left simple semigroups [groups]. Let

$$S = \bigcup_{\alpha \in \Omega} S_\alpha$$

be a decomposition of S having properties (1) and (2). Let a be an element of S . Assume

$$a \in S_z \quad (z \in \Omega).$$

Since S_z is a left simple subsemigroup [subgroup] of S ,

$$a^2 \in S_z,$$

further there exist elements u, v in S_z such that

$$a^2 = ua \quad \text{and} \quad a = va^2.$$

Then

$$S^1 a^2 = S^1 u a \subseteq S^1 a \quad \text{and} \quad S^1 a = S^1 v a^2 \subseteq S^1 a^2.$$

Thus

$$S^1 a = S^1 a^2.$$

Assume $x \in S_\beta$ ($\beta \in \Omega$). Then there exists an element γ in Ω such that

$$xa, \quad xa^2 \in S\gamma.$$

Since S_γ is a left simple semigroup [group], there are elements r, s in S_γ such that $xa = rx a^2$, and $xa^2 = sx a$.

Then

$$S^1 x a = S^1 r x a^2 \subseteq S^1 x a^2 \quad \text{and} \quad S^1 x a^2 = S^1 s x a \subseteq S^1 x a.$$

Thus

$$S^1 x a = S^1 x a^2.$$

We have shown

$$S^1 x a = S^1 x a^2$$

for every x in S^1 and a in S .

By Lemma 2.1 this means $a \mathcal{L}^* a^2$ for every a in S . Thus S is $*$ -left regular. [One can prove similarly that if S is a band of groups, then S is $*$ -right regular.] By the foregoing (E) implies (A). This completes the proof of theorem 4.1 [4.2.]

By Theorems 4.2 and 4.3 of [2] and our Theorems 4.1 and 4.2 one could easily prove that if a semigroup S being a union of left simple semigroups [right simple semigroups, groups] has the following property:

$$\mathcal{L} [\mathcal{R}, \mathcal{H}] \text{ coincides with } \mathcal{L}^* [\mathcal{R}^*, \mathcal{H}^*]$$

on S , then S is a band of left simple semigroups [right simple semigroups, groups].

THEOREM 4.3. *A semigroup S being a union of groups is a band of groups if and only if \mathcal{H} coincides with \mathcal{H}^* on S .*

PROOF. Let S be a semigroup being a union of groups and let \mathcal{H} coincide with \mathcal{H}^* on S . Then by Theorem 4.3 of [2] every \mathcal{H} -class of S is a subigroup of S . Thus $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$ implies that every \mathcal{H}^* class of S is also a subgroup of S . Hence by Theorem 4.2 S is a band of groups.

Conversely, let S be a band of groups. Then by Theorem 4.2 every \mathcal{H}^* class of S is a subgroup of S . On the other hand S is a union of groups, thus by Theorem 4.3 of [2] any \mathcal{H} class of S is a subgroup of S . Since the subgroups of a group are never disjoint, from $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{H}$ by the foregoing we get $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Q.e.d.

References

- [1] A. H. CLIFFORD, Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 499–504.
- [2] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, vol. 1., Providence R.I. 1961.
- [3] S. LAJOS, Characterization of completely regular inverse semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **31** (1970), 229–231.

INDEX

CSÁSZÁR, Á., Syntopogene Gruppen III.	23
CSÁSZÁR, Á., Syntopogene Gruppen IV.	51
ELBERT, Á., An inequality for polynomials	3
GALAMBOS, J., Some probabilistic aspects of majorization	11
KARIM, R. I. I. A., On the vector solution of the system of differential equations with periodic coefficients $x' = A(t)x + f(t)$	117
KARIM, R. I. I. A., On the solutions of ordinary linear differential equations with periodic coefficients in which the unknown does not appear explicitly	129
KARIM, R. I. I. A., Oscillatory and non-oscillatory solutions of differential equations of the third order	151
KISS, ILDIKÓ, Characterizations of semigroups being bands of left simple semigroups	157
LAJOS, S., A remark on semigroups that are semilattices of groups	109
LOVÁSZ, L., On the number of halving lines	107
MIKOLÁS, M., New proof and extension of the functional equation of Lerch's zeta-function	111
МИСИЯВИЧУС, Г. А., Асимптотические разложения для функций распределения сумм вида $\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j t)$	77
MOREL, ANNE C., On groups admitting a scattered ordering	67
SZIGETI, F., Components of the space of the Fredholm operators	21
SZIGETI, F., Differentiable approximations of continuous cross sections	97
VARGA, Z., On the connection between the hull-kernel and weak-star topologies	93

Technikai szerkesztő:
SCHARNITZKY VIKTOR

71. 694. Állami Nyomda, Budapest

A kiadásért felelős: az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora
A kézirat nyomdába érkezett: 1971 április. Megjelent 1972 február

Terjedelem: 14,25 A/5 iv, 7 ábra. Példányszám: 1100

Készült mono- és kéziszedéssel, íves magasnyomással,
az MSZ 5601-59 és MSZ 5602-55 szabványok szerint