ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO MATHEMATICA

TOMUS XVIII.

REDIGIT
Á. CSÁSZÁR

ADIUVANTIBUS
M. ARATÓ, M. BOGNÁR, E. FRIED, F. KÁRTESZI, I. KÁTAI, A. KÓSA, J. MOGYORÓDI, J. MOLNÁR, R. PÉTER, GY. SOÓS, J. SURÁNYI, P. SZÁSZ, P. TURÁN, I. VINCZE

1975

ANNALES
UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

SECTIO BIOLOGICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO CHIMICA
incepit anno MCMLIX

SECTIO GEOGRAPHICA
incepit anno MCMLXVI

SECTIO GEOLOGICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO HISTORICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO IURIDICA
incepit anno MCMLIX

SECTIO LINGUISTICA
incepit anno MCMLXX

SECTIO MATHEMATICA
incepit anno MCMLVIII

SECTIO PAEDAGOGICA ET PSYCHOLOGICA
incepit anno MCMLXX

SECTIO PHILOLOGICA
incepit anno MCMLVII

SECTIO PHILOLOGICA HUNGARICA
incepit anno MCMLXX

SECTIO PHILOLOGICA MODERNA
incepit anno MCMLXX

SECTIO PHILOSOPHICA ET SOCIOLOGICA
incepit anno MCMLXII

ON THE SUPERSOLVABILITY OF FINITE GROUPS I.

By

MOHAMED ASAAD*

Department of Algebra and Number Theory of
Eötvös Loránd University, Budapest

(Received January 15, 1974)

Introduction

In the present paper we are going to prove some results on supersolvable finite groups. Among the results are a few, which are generalizations of earlier results [See 7]. We begin with the necessary lemmas, which represent known results, and which are quoted without proof.

DEFINITION 1. Let G be a finite one step non-nilpotent gronp[1]. Then there exists a Sylow subgroup of G which is normal in G and $|G| = p^a q^b$ where p and q are distinct primes. Let P and Q be p- and q-Sylow subgroups of G, respectively. We shall say that G is a $(p, q)-$ or $(q, p)-$group according that $P \lhd G$ or $Q \lhd G$ holds [See 4 and 7].

DEFINITION 2. We use the notation $(p, q) \notin G$ for distinct primes p and q to express that there is no $(p, q)-$subgroup in G. Here p and q are fixed prime divisors of $|G|$ and their order is essential.

DEFINITION 3. Let G be a finite group of order $p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$, where p_i, $1 \leq i \leq n$, are distinct primes and $p_i > p_{i+1}$ for all i. Let P_i be a p_i – Sylow subgroup of G. We shall say that G has a Sylow tower if for each k, $P_1 P_2 \dots$ $\dots P_k$ is a normal subgroup of G.

DEFINITION 4. $d_n(P)$ = The maximum of $m(A)$, where A ranges over all normal abelian subgroup of P and $m(A)$ denotes the number of elements in a basis of A.

DEFINITION 5. $d(P)$ = The maximum of $m(A)$, where A ranges over all abelian subgroups of P and $m(A)$ denotes the number of elements in a basis of A.

LEMMA 1. Let G be a finite solvable group. Let H and K be maximal subgroup of G. Then $G = HK$ iff H and K are not conjugate. [See 6].

* On leave from the Department of Mathematics, Cairo University.

[1] We call a finite non-nilpotent group one step non-nilpotent, if all proper subgroups of it are nilpotent.

LEMMA 2. Let G be a finite group. G is supersolvable iff each subgroup H of G contains a subgroup of order d for each divisor d of $|H|$. [See 2]

LEMMA 3. [2]Let G be a finite group. G has a normal p-complement iff $(p, q)\nmid G$ for all $q \neq p$ in $\Pi(G)$

LEMMA 4. Let G be a finite group. Let H and K be solvable subgroup of G with $|G : H| = p$ and $|G : K| = q$, where p and $q \neq p$ are primes. Then G is solvable.

LEMMA 5. Let G be a finite one step non-supersolvable group[3]. Then 1. $\Pi(G)$ contains at most 3 distinct primes. 2. G has exactly one Sylow subgroup P, which is normal in G. [See 3]

LEMMA 6. Let G be a finite group. G is solvable iff G has a p-complement for each prime p in $\Pi(G)$. [See 5]

LEMMA 7. Let G be a finite group. G has a Sylow tower iff $(p, q)\nmid G$ for each pair of primes $p \& q$ in $\Pi(G)$ with $p < q$. [See 1.]

LEMMA 8. Let G be a finite group. Let P be a p-Sylow subgroup of G, where $p \neq 2$ the smallest prime in $\Pi(G)$. If $d_n(P) \leq 2$, then G has a normal p-complement. [See 5]

LEMMA 9. Let G be a finite supersolvable group. Then G has a Sylow tower. [See 8, page 158, Exercise 7.2.19]

LEMMA 10. Let P be a p-group in which $d_n(P) \leq 2$, p odd. Then $d(P) \leq 2$. [See 5] With the aid of the preceding results we shall now prove the following theorems:

THEOREM 1. *Let G be a finite group of order $p^a q^b$. Let H and K be supersolvable subgroup of G with $|G : H| = p$ and $|G : K| = q$. Then G is supersolvable.*

PROOF. It is obvious that G is solvable. Let M be a maximal subgroup of G. If M is conjugate to H or K, then M is supersolvable, so we may suppose that M is neither conjugate to H nor to K. Then $G = MH = MK$ [See Lemma 1]. $|G : H| = |M : M \cap H| = p$ and $|G : K| = |M : M \cap K| = q$. Obviously M is supersolvable by ind.

Therefore all the proper subgroup of G are supersolvable. Let $d \neq |G|$ be an arbitrary number dividing $|G|$. Set $d = p^{a_1} q^{b_1}$, where $1 \leq a_1 \leq a$ and $1 \leq b_1 \leq b$. We can easily notice that either $d \mid |H|$ or $d \mid |K|$. But H and K are supersolvable subgroup of G, then H or K has a subgroup of order d [See Lemma 2].

Therefore G has a subgroup of order d for each number $d \mid |G|$, and since all the proper subgroup of G are supersolvable, then it follows that G is supersolvable [See Lemma 2]. ∎

THEOREM 2. *Let G be a finite group of order $p^a q^b$, $p < q$, such that $(p, q)\nmid G$. Let H be a supersolvable subgroup of G with $|G : H| = q$. Then G is supersolvable.*

[2] Lemma 3 is due to K. CORRADI.

[3] We call a finite non-supersolvable group one step nonsupersolvable, if all proper subgroup of it are supersolvable.

PROOF. Since $(p, q)\nmid G$, then $Q \lhd G$, where Q is the q-Sylow subgroup of G [See Lemma 3]. G is solvable as Q and $G|Q$ are solvable. Let M be a maximal subgroup of G. If M is conjugate to H, then M is supersolvable. If M is not conjugate to H, then $G = MH$ [See Lemma 1], and hence $|G : H| = |M : M \cap H| = q$. Therefore M is supersolvable by ind. hypothesis. Now we may suppose that all the proper subgroup of G are supersolvable. Let P be a p-Sylow subgroup of G. Set $K = QP_0$, $P_0 \lessdot P$ and $|P_0| = p^{a-1}$. K is supersolvable and $|G : K| = p$. Then G is supersolvable by the preceeding theorem. ∎

THEOREM 3. *Let G be a finite one step non-supersolvable group of order $p^a q^b r^c$, where p, q and r are distinct primes. Let $P \lhd G$, where P is a p-Sylow subgroup of G. Then p is the largest prime in $\Pi(G)$.*

THEOREM 4. *Let G be a finite group. Let H_i, $1 \leq i \leq 3$, be supersolvable subgroup with $|G : H_i| = p_i$, $1 \leq i \leq 3$, where p_1, p_2 and p_3 are distinct primes. Then G is supersolvable.*

Using Theorem 1, 3 and 4 we can prove:

THEOREM 5. *Let G be a finite group. G is supersolvable iff G possess supersolvable subgroups H and K with $|G : H| = p$ and $|G : K| = q$, where one of the two primes, $p \& q$ is the largest, the other being the smallest in $\Pi(G)$.*

PROOF. If G is supersolvable, then G possess supersolvable subgroups H and K with $|G : H| = p$ and $|G : K| = q$, where one of the two primes is the largest, the other being the smallest in $\Pi(G)$. Now we are going to prove the converse statement. We use induction on $|G|$. G is solvable. [See Lemma 4]. Applying Lemma 1, we can prove that all the maximal subgroups of G are supersolvable by ind. Suppose that G is one step non-supersolvable. Then either $|G| = p^a q^b r^c$ or $|G| = p^a q^b$, where p, q and r are distinct primes. [See Lemma 5].

If $|G| = p^a q^b$, then G is supersolvable. [See Theorem 1]. This is a contradiction. If $|G| = p^a q^b r^c$, then $P \lhd G$, where P is the p-Sylow subgroup of G [See Lemma 5]. p is the largest prime in $\Pi(G)$ [See Theorem 3]. $G = PL$ and $P \cap L = 1$ [See Lemma 6]. $|L| = q^b r^c$, $r > q$. Since L is supersolvable, so L has a subgroup L_1 of order $q^b r^{c-1}$ [See Lemma 2]. Set $M = = PL_1$. $|M| = p^a q^b r^{c-1}$ and $|G : M| = r$. Therefore, G is supersolvable [See Theorem 4]. This is a contradiction. ∎

Now we are going to state without proof a generalization of Theorem 2.

THEOREM 6. *Let G be a finite group. G is supersolvable iff $(p, q)\nmid G$ for all p and q in $\Pi(G)$ with $p < q$, and H is a supersolvable subgroup of G with $|G : H| = q$, where q is the largest prime in $\Pi(G)$.*

Using Theorem 6, and Lemma 7, we have the following corollary.

THEOREM 7. *G is supersolvable iff G has a Sylow tower and a supersolvable sugbroup H of G with $|G : H| = q$, where q is the largest prime in $\Pi(G)$.*

THEOREM 8. *Let G be a finite group of odd order. Suppose that for each prime p in $\Pi(G)\backslash\{q\}$, where q is the largest prime in $\Pi(G)$, we have $d_p(P)\leq 2$, where P is a p-Sylow subgroup of G. Then $(p, q)\nmid G$ for all p and $q\neq p$ in $\Pi(G)$ with $p<q$.*

PROOF. Suppose there exists a $(p, q)-$ subgroup U in G such that $p<q$. Then $U = U_p U_q$, $U_p \lhd U$ and $U_q \overline{\lhd} U$ [See Def. 1]. Since $d_p(U_p)\leq 2$ [See Lemma 10], then U has a normal p-comlement i. e $U_q \lhd U$ [See Lemma 8]. This is a contradiction. ∎

We have the following corollary

THEOREM 9. *Let G be a finite group of odd order. Let $|G| = p_1^{e_1} \ldots p_n^{e_n}$, $n\geq 2$, and $p_1<\ldots<p_n$. Let $d_p(P_i)\leq 2$, $1\leq i\leq n-1$, where P_i is a p_i-Sylow subgroup of G. Let H be a supersolvable subgroup with $|G : H| = p_n$. Then G is supersolvable.*

PROOF. See Theorem 8 and 6.

DEFINITION 6. Let G be a finite group; denote by $p_1<p_2<\ldots<p_r$ the distinct prime divisors of $|G|$. Let $\Pi^* = (q_1, \ldots, q_r)$ be a given permutation of the primes $p_1, \ldots, p_r$ The chain

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_{m-1} > G_m = E,$$

where E denotes the identity subgroup of G, will be called a designated chain belonging to the permutation Π^* if there are uniquely determined natural numbers b_j, $0\leq j\leq r-1$, with the properties

$$|G_{i-1} : G_i| = q_j \quad \text{if} \quad b_j \leq i \leq b_{j+1}-1$$

where $b_0 = 1$ and $b_r = m$ holds.

Set $\Pi_0^* = (p_1, \ldots, p_r)$. We can prove the following:

THEOREM 10. *Let G be a finite group. G is supersolvable iff G has two designated chains one belonging to Π_0^* and the other to Π_0^{*-1}.*

PROOF. Let $G = A_0 > A_1 > \ldots > A_m = E$

and $G = B_0 > B_1 > \ldots > B_m = E$

be the two designated chains of G belonging to the permutation Π_0^* and Π_0^{*-1}, respectively. A_1 and B_1 are supersolvable by ind. hypothesis. Then G is supersolvable [See Theorem 5]. ∎

We are going to state a result without proof.

THEOREM 11. *Let G be a finite group. Let H_i, $1\leq i\leq 3$, be subgroups of G. Let H_i, $1\leq i\leq 3$, have a Sylow tower. Let the indices of H_i, $1\leq i\leq 3$, in G be pairwise relatively prime. Then G has a Sylow tower.*

Now we are going to prove the following

THEOREM 12. *Let G be a finite group. Let H_i, $1\leq i\leq 3$, be subgroup of G. Let H_i, $1\leq i\leq 2$, have a Sylow tower. Let H_3 be a supersolvable subgroup*

such that $|G : H_3| = p$, *where* p *is the largest prime in* $\Pi(G)$. *Let the indices of* H_i, $1 \leq i \leq 3$, *in* G *be pair-wise relatively prime. Then* G *is supersolvable.*

PROOF. H_3 is supersolvable, so H_3 has a Sylow tower. [See Lemma 9]. Therefore G has a Sylow tower. [See Theorem 11]. But H_3 is supersolvable and $|G : H_3| = p$, where p is the largest prime in $\Pi(G)$. Then G is supersolvable [See Theorem 7].

One obtains with simlar methods.

THEOREM 13. *Let* G *be a finite group.* $H_i \lhd G$, $1 \leq i \leq 2$. H_1 *has Sylow tower.* H_2 *is supersolvable. Let* $|G : H_2| = p$, *where* p *is the largest prime in* $\Pi(G)$. *Let* $G = H_1 H_2$. *Then* G *is supersolvable.*

ACKNOWLEDGEMENT. The author would like to express his deep qratitude to Professor K. CORRADI for his valuable suggestions and comments.

References

[1] CORRADI, K., On the solvability of finite groups, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **12** (1969), 113–122.
[2] DESKINS, W. E., A characterization of finite supersolvable groups, *Amer. Math. Monthly*, **75** (1968), 180–182.
[3] DOERK, K., Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen. *Math. Z.*, **91** (1966), 198–205.
[4] GOLFAND, JU., Über Gruppen deren sämtliche Untergruppen spezille sind, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR, N. S.*, **60** (1948), 1313–1315 (Russisch).
[5] GORENSTEIN, D., *Finite groups*, Harper, Row (New York, 1968).
[6] HUPPERT, B., *Endliche Gruppen*, Springer (Berlin, 1967).
[7] ASAAD, M. On the solvability, supersolvability and nilpotency of finite groups, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica; **16** (1973), 115–124.
[8] SCHMIDT, O., Über Gruppen deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind, *Math. Sbornik*, **31** (1924), 366–373.
[9] SCOTT, W. R., *Group Theory*, Prentic-Hall (Englewood Cliffs, N. J. 1964).

ON THE SUPERSOLVABILITY OF FINITE GROUPS II.

By

MOHAMED ASAAD

Department of Algebra and Number Theory of
Eötvös Loránd University, Budapest

(Received January 15, 1974)

LEMMA 1. If H and K are subgroups of a finite group G, such that $(|G : H|, |G : K|) = 1$, then $G = HK$ [See 2].

LEMMA 2. Let G be a finite solvable group. Let M be a maximal subgroup of G. Then $|G : M| = p^a$ for some prime p [See 2].

LEMMA 3. Let G be a finite solvable group, Π a set of primes, then

1. There is a Π-Hall subgroup of G.
2. All the Π-Hall subgroups of G are conjugate.
3. If A is a Π-subgroup of G, then A lies in a Π-Hall Subgroup of G [See 7].

LEMMA 4. Let G be a finite group. Let H and K be normal supersolvable subgroups of G with $(|G : H|, |G : K|) = 1$. Then G is supersolvable [See 1].

LEMMA 5.[1] Let G be a finite group. G is nilpotent iff $(p, q) \nmid G$ for each pair of primes p and $q \neq p$ in $\Pi(G)$ [See 6].

LEMMA 6. Let G be a finite group. Let H and K be nilpotent subgroups of G. 1. If $G = HK$, then G is solvable. 2. If there exists a supersolvable subgroup L in G with $G = HL = KL = HK$, then G is supersolvable [See 4 and 5].

LEMMA 7. Let G be a finite group. Let H be a cyclic normal subgroup of G. Let G/H be supersolvable. Then G is supersolvable [See 7].

LEMMA 8.[2] Let G be a finite solvable group. If $(p, q) \nmid G$ for all $p \neq q$ in $\pi(G)$ then $Q \lhd G$, where Q is a q-Sylow subgroup of G.

LEMMA 9. Let G be a finite group. Let H be a nilpotent subgroup of G with $|G : H| = p^a$, for some prime p. Then G is solvable [See 7].

[1] See Definition 1 and 2 in the preceeding paper.

[2] Lemma 8. is due to K. CORRADI.

DEFINITION 1. H is called a metacyclic subgroup of G iff there exists a normal subgroup K of H such that K and H/K are cyclic.

LEMMA 10. The subgroups and factor groups of a metacyclic group G are metacyclic [See 3].

LEMMA 11. Let G be a finite one step non-supersolvable group of order $p^a q^b r^c$, where p, q and r are distinct primes. Let $P \lhd G$, where P is a p-Sylow subgroup of G, then p is the largest prime in $\Pi(G)$. [See the preceeding paper]

LEMMA 12. Let G be a finite group. Let H_i, $1 \leq i \leq 3$, be solvable subgroups of G whose indices are pair-wise relatively prime. Then G is solvable [See 2].

The forthcoming 4 Theorems are applied to prove Theorem 5.

THEOREM 1. [3]*Let G be a finite group all of whose proper subgroups are supersolvable. Let H be a nilpotent subgroups of G which contains a Π-Hall subgroup of G, where Π consists of 2 distinet primes. Then G is supersolvable.*

THEOREM 2. *Let G be a finite group. Let H be a normal supersolvable subgroup of G with $|G : H| = p^a$, $a \geq 1$. If $(q, p) \nmid G$ for all $q \neq p$ in $\Pi(G)$, then G is supersolvable.*

THEOREM 3. *Let G be a finite one step non-supersolvable group of order $p^a q^b r^c$, where p, q and r are distinct primes. If H is a normal supersolvable subgroup of G, such that $\Pi(G : H) =$ prime, then $\Pi(G : H) =$ the smallest prime in $\Pi(G)$.*

THEOREM 4. [4]*Let G be a finite one step non-supersolvable group of order $p^a q^b r^c$, where p, q and r are distinct primes. Then G has a Sylow tower.*

THEOREM 5. *Let G be a finite group. Let H and K be supersolvable subgroups of G with $(|G : H|, |G : K| = 1$. Let $H \lhd G$. If $(q, p) \nmid G$ for each pair of primes q and p in $\Pi(G)$, such that $q \mid |G : K|$ and $p \mid |G : H|$, then G is supersolvable.*

PROOF. By ind. on $|G|$. $G = HK$ [See Lemma 1]. G is solvable as $G/H \cong K/K \cap H$. Let M be an arbitrary maximal subgroup of G. Then $|G : M| = p^a$ [See Lemma 2]. We have the following different cases:

a) $|G : M|$, $|G : H|$ and $|G : K|$ are pair-wise relatively prime.
b) $(|G : M|, |G : K|) \neq 1$.
c) $(|G : M|, |G : H|) \neq 1$.

In case *a*) $G = MH = MK$ [See Lemma 1]. Then $|G : H| = |M : M \cap H|$ and $|G : K| = |M : M \cap K|$.

$M \cap H \lhd M$ as $H \lhd G$. Therefore M inherites the properties of G, and hence M is supersolvable by ind.

[3] Theorem 1 is due to K. CORRADI.
[4] See Definition 3 in the preceeding paper.

In case *b*) it follows that $(|G:H|, |G:M|) = 1$. Then $G = MH \to$ $\to G/H \cong M/M\cap H$. But $(|G:M|, |G:K|) \neq 1$. Hence $p||G:K| \to$ $\to p\nmid|K|$ or $p||K|$. If $p\nmid|K|$, then we may suppose that $K \leq M$ [See Lemma 3]. Clearly, $(|M:K|, |M:M\cap H|) = 1$. Hence M is supersolvable by ind. under the assumption that $p\nmid|K|$. Now suppose that $p||K|$. Then $K = PL$, where P is p-Sylow subgroup of K and L is a p-complement [See Lemma 6 in the preceeding paper]. L is supersolvable. Since $L < K < G$, then

$$|G:L| = |G:K|\,|K:L|. \tag{1}$$

G is solvable, so G has a p-complement N [See Lemma 6 in the preceeding paper]. We may assume that $N \leq M$ [See Lemma 3]. But $|L||N|$. Hence we may assume that $L \leq N \leq M$ [See Lemma 3]. It is clear that

$$|G:L| = |G:M|\,|M:L|. \tag{2}$$

From (1) and (2) it follows that $\Pi(G:K) \geq \Pi(M:L)$, and hence $(|M:L|, |M:M\cap H|) = 1$. Therefore M is supersolvable by ind.

In case *c*) it follows that $(|G:M|, |G:K|) = 1$. Then $G = MK \to$ $\to |G:K| = |M:M\cap K|$. Either $H \leq M$ or $H \not\leq M$. If $H \leq M$, then $(|M:H|, |M:M\cap K|) = 1$ and hence M is supersolvable by ind. If $H \not\leq M$, then $G = MH$ as M is a maximal subgroup of G. Hence M is supersolvable by ind. Since M is an arbitrary maximal subgroup of G, then all the proper subgroups of G are supersolvable. Suppose that G is one step non-supersolvable. Then either $|G| = p^a q^b$ or $|G| = p^a q^b r^c$, where p, q and r are distinct primes [See Lemma 5 in the preceeding paper]. If $|G| = p^a q^b$, then we may suppose that $|G:H| = p^{a_1}$ and $|G:K| = q^{b_1}$, where $1 \leq a_1 \leq a$ and $1 \leq b_1 \leq b$. But $(q, p) \notin G$ from the hypothesis of the theorem, and hence G is supersolvable [See Theorem 2]. This is a contradiction.

If $|G| = p^a q^b r^c$, then $G = PK_p$, $P \lhd G$, P is a p-Sylow subgroup of G and $P \cap K_p = 1$ [See Lemma 5 and 6 in the preceeding paper]. p is the largest prime in $\Pi(G)$ [See Lemma 11]. We may suppose that $p > q > r$. We have the following two different cases:

$$1.\ |\Pi(G:H)| = 1 \quad \text{or} \quad 2.\ |\Pi(G:H)| = 2.$$

If 1. holds we must have that:

$$\text{(i)}\ |\Pi(G:K)| = 2 \quad \text{or} \quad \text{(ii)}\ |\Pi(G:K)| = 1.$$

Suppose that (i) is true, then G is supersolvable [See Theorem 2]. This is a contradiction. Now suppose that (ii) is true, then $\Pi(G:H) = \{r\}$, where r is the smallest prime dividing $|G|$ [See Theorem 3]. It is clear tha either $\Pi(G:K) = \{q\}$ or $\{p\}$. If $\Pi(G:K) = \{q\}$, then $(q, r) \notin G$ by the hypothesis of the theorem. But G has a Sylow tower [See Theorem 4], and hence $(r, q) \notin G$. K_p is nilpotent Π-Hall subgroup of G as $(q, r) \notin G$ and $(r, q) \notin G$ [See Lemma 5]. Then G is supersolvable See Theorem 1. This is a contradiction. Similiarly, if $\Pi(G:K) = \{p\}$ we also have a contradiction. If 2. holds, then we have the following different cases.

(i) $\Pi(G : H) = \{p, q\}$,
(ii) $\Pi(G : H) = \{q, r\}$,
(iii) $\Pi(G : H) = \{p, r\}$.

Suppose that (i) is true, then $(|G : H)|, |G : G_0|) = 1$, where G_0 is the normal r-complement of G as G has a Sylow tower. Then G is supersolvable [See Lemma 4]. This is a contradiction. Suppose that (ii) is true, then $\Pi(G : K) = \{p\}$ and $(p, q) \notin G$ and $(p, r) \notin G$ from the hypothesis of the theorem. Then G has a normal p-complement, i.e. $K_p \lhd G$ [See Lemma 3 in the preceeding paper]. But Q ch $K_p \lhd G$, then $Q \lhd G$, and this is a contradiction [See Lemma 5 in the preceeding paper]. Lastly, suppose that (iii) is true, then G has a normal q-complement. Let us denote this normal q-complement by K_q. But $(|G : K_q|, |G : G_0|) = 1$, then G is supersolvable [See Lemma 4]. This is a contradiction. Therefore G is supersolvable. ∎

THEOREM 6. *Let G be a finite group. Let H_1 be a nilpotent subgroup of G. Let H_i, $2 \leq i \leq 3$, be supersolvable subgroups of G. If the indices of H_i, $1 \leq i \leq 3$, in G are pair-wise relatively prime, then G is supersolvable.*

THEOREM 7.[5] *Let G be a finite group. Let H be a nilpotent maximal subgroup of G. Let K be a supersolvable subgroup of G. Let $(|G : H|, |G : K|) = 1$. If $(p, q) \notin G$ and $(q, p) \notin G$ for each pair of primes p and q with $p \mid |G : H|$ and $q \mid |G : K|$, then G is supersolvable.*

THEOREM 8.[6] *Let G be a finite group. Let H be a nilpotent subgroup of G. Let K be a supersolvable subgroup of G. Let $|G : H| = p$ and $|G : K| = q$, where p and q are distinct primes. Then G is supersolvable.*

We are going to prove the following

THEOREM 9. *Let G be a finite group of order $p^a q^b$ or $p^a q^b r^c$, where p, q and r are distinct primes. Let H be a nilpotent subgroup of G. Let K be a cyclic subgroup of G. Let $(|G : H|, |G : K|) = 1$. If $(p, q) \notin G$ for each pair of primes p and q with $p \mid |G : K|$ and $q \mid |G : H|$, then G is supersolvable.*

PROOF. $G = HK$ [See Lemma 1] $\rightarrow G$ is solvable [See Lemma 6]. If $|G| = p^a q^b$, then we may suppose that $H \geq P$ and $K \geq Q$, where P and Q are p- and q-Sylow subgroups of G, respectively. $(p, q) \notin G$ by hypothesis, then $Q \lhd G$ [See Lemma 3 in the preceeding paper]. Since Q is cyclic and $G/Q \cong P$, then G is supersolvable [See Lemma 7].

If $|G| = p^a q^b r^c$, then either *a*) $|\Pi(G : H)| = 2$ or *b*) $|\Pi(G : H)| = 1$. In case *a*) if $\Pi(G : H) = \{p, q\}$, then $\Pi(G : K) = \{r\}$. But $(r, p) \notin G$ and $(r, q) \notin G$, then G has anormal r-complement [See Lemma 3 in the preceeding paper] i.e. $G = RL$, $L \lhd G$, R is an r-Sylow subgroup of G and $R \cap L = 1$. We may suppose that $L \leq K$ [See Lemma 3]. Hence L is cyclic as K is cyclic. $G/L \cong R$ and L is cyclic so G is supersolvable.

[5] See [6].
[6] See [6].

In case *b*) we have that $\Pi(G:H)=\{p\}$, then either (i) $\Pi(G:K)=\{q\}$ or (ii) $\Pi(G:K)=\{q,r\}$. Suppose that (i) is true, then $(q,p)\nmid G$ by hypothesis. G has a subgroup M of order p^aq^b [See Lemma 3]. Since $(q,p)\nmid M$, then $P\lhd M$, where P is a p-Sylow subgroup of M [See Lemma 3 in the preceeding paper] Clearly, P is cyclic. Hence M is supersolvable. We have that $|G:H|=p^{a_1}$, $|G:K|=q^{b_1}$ and $|G:M|=r^c$, where $1\leq a_1\leq a$ and $1\leq b_1\leq b$. Then $G=HK=HM=MK$ [See Lemma 1]. Therefore G is supersolvable [See Lemma 6]. Now suppose that (ii) is true, then $(q,p)\nmid G$ and $(r,p)\nmid G$ by hypothesis. Then $P\lhd G$, where P is a p-Sylow subgroup of G [See Lemma 8]. $G=PN$ and $P\cap N=1$ [See Lemma 6 in the preceeding paper]. $G/P\cong N$, N is a nilpotent subgroup of G and P is cyclic, then G is supersolvable. ∎

Applying Theorem 9 and following the proof of Theorem 5 we have

THEOREM 10. *Let G be a finite group. Let H be a nilpotent subgroup of G. Let K be a cyclic subgroup of G. Let $(|G:H|,|G:K|)=1$. If $(p,q)\nmid G$ for each pair of primes p and q with $p\mid |G:K|$ and $q\mid |G:H|$,* then *G is supersolvable.*

Now we are going to give a proof of the following

THEOREM 11. *Let G be a finite group. Let H_i, $1\leq i\leq 3$, be metacyclic subgroups of G whose indices are pair-wise relatively prime. Then G is supersolvable.*

PROOF. Let G be a counter-example of smallest order. G is solvable [See Lemma 12]. Let M be an arbitrary maximal subgroup of G. Then M is supersolvable by the minimality of G [See the proof of theorem 5]. Therefore all the proper subgroups of G are supersolvable. Hence G is a finite one step *non*-supersolvable. Then either $|G|=p^aq^b$ or $|G|=p^aq^br^c$, where p, q and r are distinct primes. [See Lemma 5 in the preceeding paper]. It is obvious that G can not be of order p^aq^b. Hence it remains to investigate that $|G|=p^aq^br^c$. We may suppose, that $|G:H_1|=p^{a_1}$, $|G:H_2|=q^{b_1}$, and $|G:H_3|=r^c$, where $1\leq a_1\leq a$, $1\leq b_1\leq b$ and $1\leq c_1\leq c$. $G=PK$, $P\lhd G$, P is a p-Sylow subgroup of G and $P\cap K=1$ [See Lemma 5 and 6 in the preceeding paper]. K is supersolvable subgroup of order q^br^c. Since p is the largest prime in $\Pi(G)$ [See Lemma 11], therefore we may suppose that $p>q>r$. G has a Sylow tower [See Theorem 4]. Then G has a normal r-complement i.e. $G=RL$, $L\lhd G$, R is an r-Sylow subgroup of G and $R\cap L=1$. We may suppose that $L\leq H_3$ [See Lemma 3]. Hence L is metacyclic [See Lemma 10]. Consider L'. Either $L'=1$ or $L'\neq 1$.

If $L'=1$, then L is abelian $\rightarrow G$ is supersolvable [See Theorem 1]. This is a contradiction. If $L'\neq 1$, then $L'\lhd G$ as L' ch L and $L\lhd G$. G/L' is supersolvable by the minimality of G. Then G is supersolvable as G/L' is supersolvable and L' is cyclic. This is a contradiction. Therefore G is supersolvable. ∎

We are going to prove the following:

THEOREM 12. *Let G be a finite group. Let H be a nilpotent subgroup of G. Let K be a supersolvable subgroup of G. Let $|G:H| = p^a$ and $|G:K| = q^b$, where p and $q \neq p$ are primes. If for any subgroup L of G for which $\Pi(L) = \{p, q\}$, L contains a subgroup of order d, for every divisor d of $|L|$, then G is supersolvable.*

PROOF. If $|G| = p^a q^b$, then G is supersolvable [See Lemma 2 in the preceeding paper]; so we may suppose that $\Pi(G)$ contains at least 3 distinct primes. G is solvable [See Lemma 9]. Then G has a proper Hall subgroup L such $\Pi(L) = \{p, q\}$ [See Lemma 3]. L is supersolvable [See Lemma 2 in the preceeding paper]. It is abvious that $|G:L|$, $|G:H|$ and $|G:K|$ are pair-wise relatively prime. Then G is supersolvable [See Theorem 6].

One obtains with simililar methods.

THEOREM 13. *Let G be a finite group. Let H_i, $1 \leq i \leq 2$, be nilpotent subgroups of G with $(|G:H_1|, |G:H_2|) = 1$. If for each subgroup H of G for which $|\Pi(H)| = 2$ with one prime dividing $|G:H_1|$ and the other dividing $|G:H_2|$, H contains a subgroup of order d for each diviser d of $|H|$, then G is supersolvable.*

References

[1] FRIESEN, D. K., Product of normal supersolvable sugroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **30** (1971), 46–48.

[2] GORENSTEIN, D., *Finite groups*, Harper-Row (New York 1968).

[3] HUPPERT, B., *Endliche Gruppen*, Springer (Berlin, 1967).

[4] KEGEL, O., Product nilpotenter gruppen, *Arch. Math.*, **12** (1961), 90–93.

[5] KEGEL, O., Zur struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher gruppen, *Math. Z.* **87** (1965), 42–48.

[6] ASAAD, M., On the solvability, supersolvability and nilpotency of finite groups *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica, **16** (1973), 115–124.

[7] SCOTT, W. R., *Group Theory*, Prentic-Hall (Englewood N. J. 1964.)

TWO NEW INDUCTIVE DIMENSION FUNCTIONS FOR TOPOLOGICAL SPACES

By

M. G. CHARALAMBOUS

Ahmadu Bello University Zaria, Nigeria

(Received August 1, 1974)

Introduction

A subset of a uniform space $(X, \mathcal{U})$ is $\mathcal{U}$-open iff it is the inverse image of an open set of R, the space of real numbers, under a uniformly continuous function, while it is $\mathcal{U}$-closed iff its compelement is $\mathcal{U}$-open. In [1] and [2] we introduced the dimension functions $\mathcal{U}$-dim, $\mathcal{U}$-Ind and $\mathcal{U}$-ind. $\mathcal{U}$-dim $X = -1$, $\mathcal{U}$-Ind $X = -1$ *or* $\mathcal{U}$-ind $X = -1$ *iff* X *is empty.* For $n \geq 0$, $\mathcal{U}$-dim $X \leq n$ *iff every finite* $\mathcal{U}$*-cover,* i.e. *cover by* $\mathcal{U}$*-open sets, of* X *is refined by a finite* $\mathcal{U}$*-cover of order* $\leq n$; $\mathcal{U}$-Ind $X \leq n$ *iff whenever* E_1, E_2 *are disjoint* $\mathcal{U}$*-closed sets of* X, *there are disjoint* $\mathcal{U}$*-open sets* G_1, G_2 *with* $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$ *and* $\mathcal{U}_Y$-Ind $Y \leq n-1$, *where* $Y = X - G_1 \cup G_2$ *and* $\mathcal{U}_Y$ *is the relativisation of* $\mathcal{U}$ *to* Y; $\mathcal{U}$-ind $X \leq n$ *iff whenever* $x \in G$ *with* G $\mathcal{U}$*-open, there is a* $\mathcal{U}$*-open set* H *and a* $\mathcal{U}$*-closed set* F *such that* $x \in H \subset F \subset G$ *and* $\mathcal{U}_Y$-ind $Y \leq n-1$, *where* $Y = F - H$. By considering a uniformity determined by the topology of a topological space, we obtain the dimension functions ind* and Ind*; dim* was studied in [1]. Both satisfy a subset theorem and a Urysohn inequality (proposition 9), and Ind* satisfies two sum theorems. Ind* $\geq$ ind* while ind* equals Ind* for regular, completely paracompact spaces, for which we establish a product theorem. This is all the more interesting in view of Filippov's recent examples [6 and 7] showing the failure of the product theorem for Ind and of the statement ind = Ind for compact Hausdorff spaces. A complete picture of the relations between the new dimensions and the classical ones is obtained.

The main results of this paper are taken from the author's Ph. D. dissertation "Uniform Dimension Functions", University of London, 1971, where they are discussed for Tychonoff spaces.

1. The new dimension functions

For a topological space X, $\mathcal{M}^X$ will denote the uniformity generated by $C^*(X)$, the family of all bounded, real-valued continuous functions

on X. $\mathcal{M}^X$-Ind X, $\mathcal{M}^X$-ind X are topological invariants of X and are henceforth denoted by Ind* X, ind* X respectively. A bounded, real-valued function on X is uniformly continuous with respect to $\mathcal{M}^X$ iff it is continuous, so that the terms $\mathcal{M}^X$-open, $\mathcal{M}^X$-closed are synonymous with cozero, zero set, respectively. If Y is a C^*-imbedded subset of X, $\mathcal{M}^X_Y$(the relativisation of $\mathcal{M}^X$ to Y) and $\mathcal{M}^Y$ coincide, and the following results are readily seen to be valid.

PROPOSITION 1. $\dim^* X \leq \operatorname{Ind}^* X$.

PROOF. $\dim^* X = \mathcal{M}^X$-$\dim X \leq \mathcal{M}^X$-Ind $X = \operatorname{Ind}^* X$ ([2], proposition 1).

PROPOSITION 2. If Y is C^*-imbedded in X, then $\operatorname{Ind}^* Y \leq \operatorname{Ind}^* X$.

PROOF. [2], proposition 2.

PROPOSITION 3. If each F_i, $i = 1, 2, \ldots$, is a C^*-imbedded zero set of X with $\operatorname{Ind}^* F_i \leq n$ and $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, then $\operatorname{Ind}^* X \leq n$.

PROOF. [2], proposition 3.

PROPOSITION 4. If Y is C^*-imbedded in X, then $\operatorname{ind}^* Y \leq \operatorname{ind}^* X$.

PROOF. [2], proposition 6.

PROPOSITION 5. For a subset Y of a completely regular space X, $\operatorname{ind}^* Y \leq \operatorname{ind}^* X$.

PROOF. By [2], propositions 6 and 7, $\operatorname{ind}^* Y = \mathcal{M}^Y$-ind $Y \leq \mathcal{M}^X_Y$-ind $Y \leq \mathcal{M}^X$-ind $X = \operatorname{ind}^* X$.

PROPOSITION 6. $\operatorname{ind}^* X \leq \operatorname{Ind}^* X$.

PROOF. [2], proposition 5.

PROPOSITION 7. For a completely regular space X, ind $X \leq \operatorname{ind}^* X$.

PROOF. [2], proposition 5.

Propsotion 7 is false for regular spaces. If, for example, Y is a non-trivial, regular space on which every real continuous function is constant ([9] and [12]), then $\operatorname{ind}^* Y = 0$ while ind $Y > 0$. We note that ind $X = 0$ always implies $\operatorname{ind}^* X = 0$.

PROPOSITION 8. If $\mathcal{U}$ is a uniformity on a topological space X, then $\operatorname{ind}^* X \leq \mathcal{U}$-ind X.

PROOF. The result follows from [2], propostion 7.

PROPOSITION 9. If X_1, X_2 are C^*-imbedded in X with $X = X_1 \cup X_2$, then $\operatorname{ind}^* X \leq \operatorname{ind}^* X_1 + \operatorname{ind}^* X_2 + 1$ and $\operatorname{Ind}^* X \leq \operatorname{Ind}^* X_1 + \operatorname{Ind}^* X_2 + 1$.

PROOF. [2], propositions 9 and 10.

Let X be a normal space. Since any closed subset of X is C^*-imbedded in X, proposition 2 and 4 hold when Y is closed in X, while in proposition

3 we need only know that each F_i is a zero set. The condition that $\mathrm{Ind}^*X \leq n$, $n \geq 0$, is equivalent to the statement that whenever F_1, F_2 are disjoint zero sets of X, there are disjoint cozero sets G_1, G_2 with $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ and $\mathrm{Ind}^*[X-(G_1 \cup G_2)] \leq n-1$. F_1, F_2 may, of course be taken to be simply disjoint closed sets of X. The condition that $\mathrm{ind}^*X \leq n$, $n \geq 0$, is equivalent to the statement that whenever x is a point of a cozero set G of X, there is a cozero set H and a zero set F with $x \in H \subset F \subset G$ and $\mathrm{ind}^*(F-H) \leq n-1$. If X is also regular (and hence completely regular), G may be taken to be an open set of X.

PROPOSITION 10. If X is normal, $\mathrm{Ind}X \leq \mathrm{Ind}^*X$.

PROOF. Assume that $\mathrm{Ind}^*X \leq n$ and the result holds for dimension $n-1$. It suffices to show $\mathrm{Ind}X \leq n$. Let F_1, F_2 be disjoint closed sets of X. Then there are disjoint cozero sets G_1, G_2 of X with $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ and $\mathrm{Ind}^*(X-G_1 \cup G_2) \leq n-1$. By the induction hypothesis $\mathrm{Ind}(X-G_1 \cup G_2) \leq n-1$. This implies $\mathrm{Ind}\, X \leq n$ ([3], 1.4).

For normal spaces, the conditions $\dim^* = 0$, $\mathrm{Ind}^* = 0$, $\dim = 0$, and $\mathrm{Ind} = 0$ are all equivalent. For arbitrary spaces, $\dim^* = 0$ iff $\mathrm{Ind}^* = 0$. If T is the Tychonoff plank, it is known that T is non-normal with $\dim^* T = 0$ ([8]). Hence $\mathrm{Ind}^* T = 0$. But since $\dim X = 0$ or $\mathrm{Ind}X = 0$ implies that X is normal $\dim T > 0$ and $\mathrm{Ind}\, T > 0$. Thus proposition 10 is false for Tychnoff spaces. In section 5, we give an example of a normal space where strict inequality is attained. We do not know whether this is possible for totally normal spaces. However, for perfectly normal spaces it is obvious that $\mathrm{Ind} = \mathrm{Ind}^*$ and $\mathrm{ind} = \mathrm{ind}^*$.

2. The subset theorem for totally normal spaces

LEMMA 1. Let $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ be a locally finite collection of cozero sets of a space X. For each α, F_α is a zero set with $F_\alpha \subset G_\alpha$. Then $\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$ is a zero set.

PROOF. For each α let $f_\alpha : X \to [0, 1]$ be continuous with $F_\alpha = f_\alpha^{-1}(0)$ and $X - G_\alpha = f_\alpha^{-1}(1)$ (e.g. [1], lemma 3). The fact that $\{G_\alpha\}$ is locally finite implies that the product f of the f_α's is well-defined and continuous. Moreover, $f^{-1}(0) = \{x : f_\alpha(x) = 0 \text{ for some } \alpha\} = \bigcup F_\alpha$.

We note that if X is normal, the condition that each G_α is cozero may be replaced by the condition that each G_α is open.

COROLLARY. Let $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ with each X_α open and, for $\alpha \neq \beta$, $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. If for each α Y_α is a zero (cozero) set of X_α, then $\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ is a zero (cozero) set of X.

PROPOSITON 11. Let $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ with X normal, each X_α open in X with $\mathrm{Ind}^* X_\alpha \leq n$, and for $\alpha \neq \beta$ $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$. Then $\mathrm{Ind}^* X \leq n$.

PROOF. Let F_1, F_2 be disjoint closed sets of X. Since $\mathrm{Ind}^* X_\alpha \leq n$, for each α there are disjoint sets G_α, H_α of X_α with $F_1 \cap X_\alpha \subset G_\alpha$, $F_2 \cap X_\alpha \subset H_\alpha$ and $\mathrm{Ind}^*(X_\alpha - G_\alpha \cup H_\alpha) \leq n-1$. Then $G = \bigcup G_\alpha$, $H = \bigcup H_\alpha$ are

disjoint cozero sets of X (corollary) with $F_1 \subset G$ and $F_2 \subset H$. By a trivial induction argument, since $X - G \cup H = \cup (X_\alpha - G_\alpha \cup H_\alpha)$, $\operatorname{Ind}^*(X - G \cup H) \leq \leq n-1$. Hence $\operatorname{Ind}^* X \leq n$.

PROPOSITION 12. Let $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ with X normal, $\{G_\alpha\}$ locally finite and for each α G_α an open set, F_α a zero set of X, $F_\alpha \subset G_\alpha$ and $\operatorname{Ind}^* F_\alpha \leq n$. Then $\operatorname{Ind}^* X \leq n$.

PROOF. We assume that Λ is well-ordered by $<$. For each α, $X - \bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma$ is a cozero set (lemma 1), and hence it is the union of zero sets $E_{i\alpha}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, of X. Now $H_{i\alpha} = F_\alpha \cap E_{i\alpha}$ is a zero set, $\operatorname{Ind}^* H_{i\alpha} \leq \operatorname{Ind}^* F_\alpha \leq n$ (propostion 2), $H_{i\alpha} \cap H_{i\beta} = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$; for $M \subset \Lambda$ $\bigcup_{\alpha \in M} H_{i\alpha}$ is a zero set of X (lemma 1), and hence $H_{i\alpha}$ is open in the zero set $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} H_{i\alpha}$, which by proposition 11 has $\operatorname{Ind}^* \leq n$. But $X = \bigcup_\alpha \bigcup_i H_{i\alpha} = \bigcup_i \bigcup_\alpha H_{i\alpha}$. Hence $\operatorname{Ind}^* X \leq n$ (proposition 3)

PROPOSITION 13. Let $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$ with X paracompact normal, $\{F_\alpha\}$ locally finite, and each F_α a zero set with $\operatorname{Ind}^* F_\alpha \leq n$. Then $\operatorname{Ind}^* X \leq n$.

PROOF. Since X is paracompact and $\{F_\alpha\}$ is locally finite, there is a locally finite open cover $\{P_\mu\}$ $\mu \in M$ of X such that each P_μ intersects only finitely many F_α's. Since X is normal, there is an open refinement $\{H_\mu\}$ of $\{P_\mu\}$ with $\cup H_\mu = X$ and $\overline{H}_\mu \subset P_\mu$ (e.g. [5], lemma 1, p 207). Let $G_\alpha = \cup (P_\mu : P_\mu \cap F_\alpha \neq \emptyset, \ \mu \in M) - \cup (\overline{H}_\mu : H_\mu \cap F_\alpha = \emptyset, \ \mu \in M)$. Clearly $F_\alpha \subset G_\alpha$. Since $\{P_\mu\}$ is locally finite, any union of $\overline{H}_\mu$'s is closed and so G_α is open. If $H_\mu \cap G_\alpha \neq \emptyset$, then $\overline{H}_\mu \cap F_\alpha \neq \emptyset$ and hence $P_\mu \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Therefore each H_μ meets finitely many G_α's, and $\{G_\alpha\}$ is locally finite. The result follows from proposition 12.

The class of totally normal spaces was introduced by DOWKER [3], who showed that this class en joys the subset theorem for Ind and dim ([3] and [4]). A normal space X is totally normal iff each open set G of X is the union of a collection $\{G_\alpha\}$, locally finite in G, of cozero sets of X. A subset of a totally normal space is totally normal.

LEMMA 2. Let G be an open set of the totally normal space X with $\operatorname{Ind}^* X \leq n$. Then $\operatorname{Ind}^* G \leq n$.

PROOF. Let $\{G_\alpha\}$ be locally finite in G, G_α cozero set of X, $F_{i\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots$, zero set of X with $G = \cup G_\alpha$ and $G_\alpha = \bigcup_i F_{i\alpha}$. By proposition 2, $\operatorname{Ind}^* F_{i\alpha} \leq \operatorname{Ind}^* X \leq n$. Now $\bigcup_\alpha F_{i\alpha}$ is a zero set of G (lemma 1) and $\operatorname{Ind}^* \bigcup_\alpha F_{i\alpha} \leq n$ (proposition 12). Since clearly $G = \bigcup_i \bigcup_\alpha F_{i\alpha}$, by proposition 3, $\operatorname{Ind}^* G \leq n$.

PROPOSITION 14. For a subset Y of a totally normal space X, $\mathrm{Ind}^* Y \leq \mathrm{Ind}^* X$.

PROOF. We may assume $\mathrm{Ind}^* X \leq n$. Let F_1, F_2 be disjoint closed sets of Y. By lemma 2, $\mathrm{Ind}^* G \leq n$, where $G = X - \bar{F}_1 \cap \bar{F}_2$. Hence there are disjoint cozero sets G_1, G_2 of G with $\bar{F}_1 \cap G \subset G_1$, $\bar{F}_2 \cap G \subset G_2$, and $\mathrm{Ind}^* G - G_1 \cup G_2 \leq n-1$. Let $H_1 = G_1 \cap Y$, $H_2 = G_2 \cap Y$. Then H_1, H_2 are disjoint cozero sets of Y with $F_1 \subset H_1$, $F_2 \subset H_2$ and $Y - H_1 \cup H_2 \subset G - G_1 \cup G_2$. Hence by a trivial induction argument $\mathrm{Ind}^*(Y - H_1 \cup H_2) \leq n-1$. This implies $\mathrm{Ind}^* Y \leq n$.

Proposition 14 does not hold for normal spaces. DOWKER'S [3] example N is normal with $\mathrm{Ind}\, N = 0$, containing a normal subspace M with $\mathrm{Ind}\, M = 1$. We have $\mathrm{Ind}^* N = 0$ and $\mathrm{Ind}^* M \geq 1$ (proposition 10).

3. Equality between ind* and Ind*

LEMMA 3. Let E_1, E_2 be subsets of a normal space X. Let $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ be covers of X such that for each n P_n is a cozero set, Q_n is a zero set of X, $P_n \subset Q_n \subset X - E_{i(n)}$ where $i(n) = 1$ or 2, and $\mathrm{Ind}^*(Q_n - P_n) \leq m$. Then there exist disjoint cozero sets G_1, G_2 of X with $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$ and $\mathrm{Ind}^*(X - G_1 \cup G_2) \leq m$.

PROOF. Let I_1, I_2 be disjoint sets such that $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \ldots\}$ and for $n \in I_i$ $Q_n \subset X - E_i$. For $i = 1, 2$ and $n = 1, 2, \ldots$, let $G_n^i = P_n - \cup (Q_j : j \in I_i, j < n)$, $G_1 = \bigcup_{n \in I_2} G_n^1$ and $G_2 = \bigcup_{n \in I_1} G_n^2$. Then each G_n^i and G_i is cozero, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $E_1 \subset G_1$ and $E_2 \subset G_2$. Let k be the first integer for which $x \in Q_k$; if also $x \in P_k$, then $x \in G_k^1 \cup G_k^2 \subset G_2 \cup G_1$. This implies $X - G_1 \cup G_2 \subset Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n - P_n)$. By proposition 3, $\mathrm{Ind}^* Y \leq m$, and hence, by proposition 2, $\mathrm{Ind}^*(X - G_1 \cup G_2) \leq m$.

Completely paracompact spaces were introduced by ZARELUA [14], who showed that totally normal, completely paracompact spaces satisfy $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$. A cover is called a weak refinement of a cover $\mathcal{U}$ if it contains a subcover which refines $\mathcal{U}$. A space X is completely paracompact if every open cover of X has an open weak refinement $\{V_{i\alpha}\}_{\alpha \in A,\, i \in N}$, $N = \{1, 2, \ldots\}$, such that each $\{V_{i\alpha}\}_{\alpha}$ is a star-finite cover of X. A star-finite collection of non-empty sets is always of the form $\{V_{j\alpha}\}_{\alpha \in A,\, j \in N}$ where $V_{j\alpha} \cap V_{i\beta} = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$. Hence every open cover of a completly paracompact space X has an open weak refinement $\{V_{ij\alpha}\}_{\alpha \in A,\, i,j \in N}$ where each $\{V_{ij\alpha}\}_{j,\alpha}$ is a star-finite cover of X with $V_{ij\alpha} \cap V_{ik\beta} = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$. A Lindelöf space is completely paracompact, an F_σ – set of a completely paracompact space is completely paracompact and a regular completely paracompact space is paracompact and normal.

PROPOSITION 15. Let X be normal and completely paracompact. Then $\mathrm{ind}^* X = \mathrm{Ind}^* X$.

PROOF. In view of proposition 6, it suffices to show that $\operatorname{ind}^* X \leq n$, $n \geq 0$ implies $\operatorname{Ind}^* X \leq n$ on the assumption that the result holds for dimension $n-1$. Suppose $\operatorname{ind}^* X \leq n$, $n \geq 0$, and let E_1, E_2 be disjoint zero sets of X. Then for $x \in X$, there is a cozero set P_x and a zero set Q_x with $x \in P_x \subset Q_x \subset X - E_{i(x)}$, $i(x) = 1$ or 2, and $\operatorname{ind}^*(Q_x - P_x) \leq n-1$. By the induction hypothesis, $\operatorname{Ind}^*(Q_x - P_x) \leq n-1$. Since X is completely paracompact, there is an open weak refinement $\{V_{ij\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda,\, i,j \in N}$ of $\{P_x\}$ such that each $\{V_{ij\alpha}\}_{j,\alpha}$ is a cover of X with $V_{ij\alpha} \cap V_{ik\beta} = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$. If $Y_{i\alpha} = \bigcup_j V_{ij\alpha}$, $\{Y_{i\alpha}\}_\alpha$ is a cover of X with $Y_{i\alpha} \cap Y_{i\beta} = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$, and each $Y_{i\alpha}$ open-and-closed in X.

Let $\mathcal{U}$ be a subcover of $\{V_{ij\alpha}\}$ that refines $\{P_x\}$. For $V_{ij\alpha} \in \mathcal{U}$, choose P_x with $V_{ij\alpha} \subset P_x$, and let $S_{ij\alpha} = P_x \cap Y_{i\alpha}$ and $T_{ij\alpha} = Q_x \cap Y_{i\alpha}$. Then $S_{ij\alpha}$ is cozero, $T_{ij\alpha}$ is zero in X, $V_{ij\alpha} \subset S_{ij\alpha} \subset T_{ij\alpha} \subset X - E_{i(x)}$, $T_{ij\alpha} - S_{ij\alpha} = Y_{i\alpha} \cap (Q_x - P_x)$ and hence $\operatorname{Ind}^*(T_{ij\alpha} - S_{ij\alpha}) \leq n-1$ (proposition 2). For $V_{ij\alpha} \notin \mathcal{U}$, we let $S_{ij\alpha} = T_{ij\alpha} = \emptyset$. Clearly $\{S_{ij\alpha}\}_{i,j,\alpha}$ is a cover of X. For $k = 1, 2$, let $S^k_{ij} = \bigcup (S_{ij\alpha} : T_{ij\alpha} \subset X - E_k)$ and $T^k_{ij} = \bigcup (T_{ij\alpha} : T_{ij\alpha} \subset X - E_k)$. Then $\{S^k_{ij}\}_{i,j,k}$ covers X, $S^k_{ji} \subset T^k_{ij} \subset X - E_k$, and since $S_{ij\alpha} \subset T_{ij\alpha} \subset Y_{i\alpha}$, S^k_{ij} is cozero, T^k_{ij} is zero in X (corollary to lemma 1), and $T^k_{ij} - S^k_{ij} = \bigcup (T_{ij\alpha} - S_{ij\alpha} : T_{ij\alpha} \subset X - E_k)$. By proposition 12, $\operatorname{Ind}^*(T^k_{ij} - S^k_{ij}) \leq n-1$. Hence, by lemma 3, there are disjoint cozero sets G_1, G_2 of X with $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$ and $\operatorname{Ind}^* X - G_1 \cup G_2 \leq n-1$. It follows that $\operatorname{Ind}^* X \leq n$.

4. A product theorem

PROPOSITION 16. Let $X_1 \times X_2$ be completely paracompact and regular with either $X_1 \neq \emptyset$ or $X_2 \neq \emptyset$. Then $\operatorname{Ind}^* X_1 \times X_2 \leq \operatorname{Ind}^* X_1 + \operatorname{Ind}^* X_2$.

PROOF. If $\operatorname{Ind}^* X_1 = \infty$ or $\operatorname{Ind}^* X_2 = \infty$, then $\operatorname{Ind}^* X_1 \times X_2 = \infty$ (proposition 2). If either $X_1 = \emptyset$ or $X_2 = \emptyset$, the result is evident. Let $0 \leq \operatorname{Ind}^* X_i \leq n_i$, $i = 1, 2$, and assume that the proposition holds provided the sum of the dimensions of the factors $\leq n_1 + n_2 - 1$.

Let $(x_1, x_2) \in G$ with G open in $X_1 \times X_2$. Then there is an open set G_i of X_i, $i = 1, 2$, with $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2 \subset G$. By proposition 15, $\operatorname{ind}^* X_i \leq n_i$. Hence there is cozero set P_i, and zero set Q_i of X_i such that $x_i \in P_i \subset Q_i \subset G_i$ and $\operatorname{ind}^*(Q_i - P_i) \leq n_i - 1$. Then $\operatorname{Ind}^*(Q_i - P_i) \leq n_i - 1$ (proposition 15), $(x_1, x_2) \in P_1 \times P_2 \subset Q_1 \times Q_2 \subset G$ $P_1 \times P_2$ is cozero, and $Q_1 \times Q_2$ if zero in $X_1 \times X_2$. Now $Q_1 \times Q_2 - P_1 \times P_2 = [(Q_1 - P_1) \times Q_2] \cup [Q_1 \times (Q_2 - P_2)]$, and $\operatorname{Ind}^* Q_i \leq \operatorname{Ind}^* X_i \leq n_i$ (proposition 2). By the induction hypothesis,

$$\operatorname{Ind}^*[(Q_1 - P_1) \times Q_2] \leq n_1 + n_2 - 1 \quad \text{and} \quad \operatorname{Ind}^*[Q_1 \times (Q_2 - P_2)] \leq n_1 + n_2 - 1.$$

Then $\operatorname{ind}^*(Q_1 \times Q_2 - P_1 \times P_2) \leq n_1 + n_2 - 1$ (propositions 3 and 15). Hence $\operatorname{Ind}^* X_1 \times X_2 = \operatorname{ind} X_1 \times X_2 \leq n_1 + n_2$.

5. Examples

LEMMA 4. Let E_1, E_2 be disjoint zero sets of a normal space X with $\operatorname{Ind}^* X \leq n$, $n \geq 0$. Then there is a continuous $f : X \to [-1, 1]$ such that $E_1 = f^{-1}(-1)$, $E_2 = f^{-1}(1)$ and $\operatorname{Ind}^* f^{-1}(0) \leq n-1$.

PROOF. Let G_1, G_2 be disjoint cozero sets of X with $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$ and $\operatorname{Ind}^*(X - G_1 \cup G_2) \leq n-1$. Let $f_1 : X - G_2 \to [0, 1]$, $f_2 : X - G_1 \to [0, 1]$ be continuous with $f_1^{-1}(1) = E_1$, $f_2^{-1}(1) = E_2$ and $f_1^{-1}(0) = f_2^{-1}(0) = X - G_1 \cup G_2$ ([1], lemma 3). It suffices to let $f(x) = -f_1(x)$ for $x \in X - G_2$, and $f(x) = f_2(x)$ for $x \in X - G_1$.

PROPOSITION 17. Let F be a closed set of normal space X with $\operatorname{Ind}^* F \leq n$, $n \geq 0$, and suppose $\operatorname{Ind}^* E \leq m$, $m \geq 0$, for every zero set E of X disjoint from F. Then $\operatorname{Ind}^* X \leq n+m$.

PROOF. Let E_1, E_2 be disjoint zero sets of X. Using lemma 4, we can construct a continuous $f : F \cup E_1 \cup E_2 \to [-1, 1]$ such that $f^{-1}(-1) = E_1$, $f^{-1}(1) = E_1$ and $\operatorname{Ind}^* f^{-1}(0) \leq n-1$. Since X is normal, f extends to a continuous $g : X \to R$. If E is a zero set of $g^{-1}(0)$ disjoint from $f^{-1}(0)$, E is disjoint from F and so $\operatorname{Ind}^* E \leq m$. The result then follows by induction on n. We need to prove it for $n = 0$ only.

Suppose $\operatorname{Ind}^* F = 0$. Then there are disjoint open-and-closed sets H_1, H_2 of F with $F \cap E_1 \subset H_1$, $F \cap E_2 \subset H_2$ and $F = H_1 \cup H_2$. Let G_1, G_2 be cozero, and F_1, F_2 disjoint zero sets of X with $H_1 \cup E_1 \subset G_1 \subset F_1$ and $H_2 \cup E_2 \subset G_2 \subset F_2$. $X - G_1 \cup G_2$ is a zero set of X disjoint from F, hence $\operatorname{Ind}^*(X - G_1 \cup G_2) \leq m$ and there are disjoint cozero sets Q_1, Q_2 of $X - G_1 \cup G_2$ with $F_1 - G_1 \subset Q_1$, $F_2 - G_2 \subset Q_2$ and $\operatorname{Ind}^*(X - P_1 \cup P_2) \leq m-1$, where $P_1 = G_1 \cup Q_1$ and $P_2 = G_2 \cup Q_2$. Then $E_1 \subset P_1$, $E_2 \subset P_2$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$; $P_1 = F_1 \cup Q_1$, $P_2 = F_2 \cup Q_2$ and hence P_1, P_2 are F_σ – sets of X and open-and-closed sets of the open set $P_1 \cup P_2$ of X. It follows that P_1, P_2 are open F_σ– sets, i.e. cozero sets, of the normal space X, and $\operatorname{Ind}^* X \leq m$.

A similar argument yields the following result.

PROPOSITION 18. Let F be a closed set of a normal space X with $\operatorname{Ind} F \leq n$, $n \geq 0$, and $\operatorname{Ind} E \leq m$, $m \geq 0$, for every zero set of X with $E \cap F = \emptyset$. If either $\operatorname{Ind} F = 0$ or every open set of X containing $X - F$ is normal, then $\operatorname{Ind} X \leq n+m$.

PROPOSITION 19. Let E, F be closed subsets of a normal space X with $X = E \cup F$, $\operatorname{Ind} E \leq m$, $m \geq 0$, and $\operatorname{Ind} F \leq n$, $n \geq 0$. Then $\operatorname{Ind} X \leq n+m$.

PROOF. Let E_1, E_2 be disjoint closed sets of X. Choose open sets G_1, G_2 with $E_i \subset G_i$ and $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$. Then there are disjoint open sets H_1, H_2 of E with $E \cap \overline{G}_1 \subset H_1$, $E \cap \overline{G}_2 \subset H_2$ and $\operatorname{Ind}(E - H_1 \cup H_2) \leq m-1$. Let $P_i = (H_i - F) \cup G_i$, $i = 1, 2$. P_1, P_2 are disjoint open sets of X with $E_1 \subset P_1$, $E_2 \subset P_2$ and $X - P_1 \cup P_2 \subset (E - H_1 \cup H_2) \cup F$. The result now follows by induction on $n+m$ since for $n+m = 0$ it is a corollary of both propositions 18 and 17.

EXAMPLE 1. A compact Hausdorff space Q_n, $n \geq 1$, with $\dim^* Q_n = \dim Q_n = \operatorname{Ind} Q_n = \operatorname{ind} Q_n = 1$ and $\operatorname{Ind}^* Q_n = \operatorname{ind}^* Q_n = n$.

For each ordinal α smaller than ω_1, the first uncountable ordinal, I_α, a copy of the unit interval $[0, 1]$, is inserted between α and $\alpha+1$ with 0 indentified with α and 1 with $\alpha+1$. $Q_1 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} I_\alpha \cup \{\omega_1\}$, with the usual topology (the long or transfinite line), is compact, Hausdorff and connected with $\operatorname{ind}^* = 1$, which implies $\operatorname{Ind}^* Q_1 = \dim^* Q_1 = \dim Q_1 = \operatorname{Ind} Q_1 = \operatorname{ind} Q_1 = 1$. If C_α is a copy of the Cantor discontinuum in I_α, $Q = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha \cup \{\omega_1\}$ is closed in Q_1, and hence it is compact and Hausdorff. Clearly $\operatorname{ind} Q = \dim Q = \operatorname{Ind} Q = \operatorname{ind}^* Q = \dim^* Q = \operatorname{Ind}^* Q = 0$. $f : Q \to Q_1$ is the closed, surjective, continuous and monotonic function which sends $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ of C_α to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ of I_α, $a_n = 0$ or 2. For $a<b$ $f(a) = f(b)$ iff $(a, b) \subset I_\alpha - C_\alpha$ i.e. iff a, b are one-sided points. The set of all such points is dense in Q. A point x of X is called distinguished in X if for every G_δ-set F of X with $x \in F$, $\operatorname{ind}^* F = \operatorname{ind}^* X$.

LEMMA 5. Let p be a point of a compact Hausdorff space X, and identify (p, y) and (p, z) of $X \times Q$ iff $f(y) = f(z)$. Let $Q(X)$ and $\Pi : X \times Q \to Q(X)$ be the resulting quotient space and quotient map, respectively. Then

(i) $Q(X)$ is compact Hausdorff,
(ii) if p is distinguished in X, $\operatorname{ind}^* Q(X) = \operatorname{ind}^* X - 1$,
(iii) if p is distinguished in X, $\Pi(p, \omega_1)$ is distinguished in $Q(X)$, and
(iv) if $\operatorname{ind} X = 1$, $\operatorname{ind} Q(X) = 1$.

PROOF. We identify $\{p\} \times Q$ with Q and $\Pi(\{p\} \times Q)$ with Q_1.

(i) is evident.

(ii) Let $\omega_1 \in S \subset T \subset G$, where S and G are cozero and T is zero in $Q(X)$ with $G \cap Q_1 \neq Q_1$. Since Q_1 is connected, there is $y \in Q$ with $f(y)$ in $T - S$. If p is distinguished in X, $f(y) = \Pi(p, y)$ is distinguished in $\Pi(X \times \{y\})$, which is homeomorphic to X.

This with proposition 5 imply $\operatorname{ind}^*(T - S) \geq \operatorname{ind}^* X$. Hence $\operatorname{ind}^* Q(X) \geq \operatorname{ind}^* X + 1$. If F is closed in $Q(X)$ and disjoint from Q_1, it is homeomorphic to a closed subset of $X \times Q$. Then $\operatorname{Ind}^* F \leq \operatorname{Ind}^*(X \times Q) \leq \operatorname{Ind}^* X + \operatorname{Ind}^* Q = \operatorname{ind}^* X$ (propositions 2, 16 and 15). Hence $\operatorname{ind}^* Q(X) = \operatorname{Ind}^* Q(X) \leq \operatorname{ind}^* X + 1$ (propositions 15 and 17). Hence $\operatorname{ind}^* Q(X) = \operatorname{ind}^* X + 1$.

(iii) Suppose p is distinguished in X, and let $\Pi(p, \omega_1) \in G$, where $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ with each G_n open in $Q(X)$. Let H_n be open, E_n zero in X, α and $\alpha_n \in Q$ with $H_n \times [\alpha_n, \omega_1] \subset \Pi^{-1} G_n$, $p \in E_n \subset H_n$ and $\alpha_n < \alpha < \omega_1$ for each

n. If $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, then $\operatorname{ind}^* E = \operatorname{ind}^* X$, the subset $\Pi(E \times [\alpha, \omega_1])$ of G is homeomorphic to $Q(E)$ and, by (ii), $\operatorname{ind}^* Q(E) = \operatorname{ind}^* X + 1$. Thus $\operatorname{ind}^* G = \operatorname{ind}^* X + 1 = \operatorname{ind}^* Q(X)$ (propostion 5), and $\Pi(p, \omega_1)$ is distinguished in $Q(X)$.

(iv) Let $x \in G$ with G open in $Q(X)$ and suppose $\operatorname{ind} X = 1$. If $x = f(a_1) = f(a_2)$, $0 < a_1 \leq a_2 < \omega_1$, choose $b_1, b_2, c_1, c_2 \in Q$ and an open set H of X with $p \in H$, $f(c_1) = f(c_2)$, $f(b_1) = f(b_2)$, $c_1 < c_2 < a_1 \leq a_2 < b_1 < b_2$, $\operatorname{ind}(\overline{H} - H) \leq 0$ and $\overline{H} \times [c_1, b_2] \subset \Pi^{-1} G$. Let $S = H \times (c_1, b_2) - \{p\} \times \{c_2, b_1\}$ and $T = \overline{H} \times [c_2, b_1]$. Then ΠS is open, ΠT is closed in $Q(X)$, $x \in \Pi S \subset \Pi T \subset G$ and $\Pi T - \Pi S$ is homeomorphic to $T - S = (\overline{H} - H) \times [c_2, b_1] \cup \{p\} \times \{c_2, b_1\}$, which has ind $= 0$. With the cases $x = 0$, $x = \omega_1$ and $x \notin Q_1$ similarly disposed of, we conclude that $\operatorname{ind} Q(X) \leq 1$, and since $Q(X)$ contains copies of X, $\operatorname{ind} Q(X) = 1$.

We define $Q_2 = Q(Q_1)$, ..., $Q_n = Q(Q_{n-1})$. It follows from lemma 5 that Q_n is compact Hausdorff with $\operatorname{ind} Q_n = 1$ and $\operatorname{ind}^* Q_n = \operatorname{Ind}^* Q_n = n$. Q_n is normal and so $\dim^* Q_n = \dim Q_n$. That $\dim Q_n = \operatorname{Ind} Q_n = 1$ follows from the following result.

PROPOSITION 20. Let X be completely paracompact and regular. If $\operatorname{ind} X \leq 1$, then $\operatorname{ind} X = \dim X = \operatorname{Ind} X$.

PROOF. If $\operatorname{ind} X = -1$, the result is trivial. If $\operatorname{ind} X = 0$, then $\operatorname{ind}^* X = 0$ and hence $\operatorname{Ind}^* X = 0$ (proposition 15). This implies $\operatorname{Ind} X = \dim X = 0$.

Suppose $\operatorname{ind} X = 1$ and let $F \subset G$ with F closed and G open in X. There is an open set H with $F \subset H \subset G$ and $\overline{H} - H = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, where each E_i is closed in X with $\operatorname{ind} E_i \leq 0$ and hence $\dim E_i \leq 0$ ([14], lemma 9). $\overline{H} - H$ is normal and the sum theorem for dim implies $\dim(\overline{H} - H) = \operatorname{Ind}(\overline{H} - H) \leq 0$. Hence $\operatorname{Ind} X \leq 1$. If $\operatorname{Ind} X \leq 0$, since X is regular, $\operatorname{ind} X \leq 0$. Thus $\operatorname{Ind} X = 1$, and since $\dim X = 0$ iff $\operatorname{Ind} X = 0$, $\dim X = 1$.

EXAMPLE 2. LOKUCIEVSKII'S [10] compact Hausdorff space S with $\operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 2$ and $\dim S = 1$ is the union of two homeomorphic closed subspaces S_1, S_2 of S with $\dim S_1 = \operatorname{ind} S_1 = \operatorname{Ind} S_1 = 1$, $S_1 \cap S_2 = I$, the unit interval, and $S_i - S_1 \cap S_2 = (Q_1 - \{\omega_1\}) \times C$, where C is the Cantor discontinuum. Since $\operatorname{Ind}^* Q_1 \times C = \operatorname{Ind}^* Q_1 + \operatorname{Ind}^* C = 1$ (proposition 16), it follows that every closed set of S disjoint from $S_1 \cap S_2$ has $\operatorname{Ind}^* \leq 1$, and by proposition 17, $\operatorname{Ind}^* S \leq 2$. Since $\operatorname{ind} S = 2$, $\operatorname{ind}^* S = \operatorname{Ind}^* S = 2$. This example shows that the finite sum theorem for Ind does not hold, and that propositions 17 and 19 are best possible for $n = m = 1$.

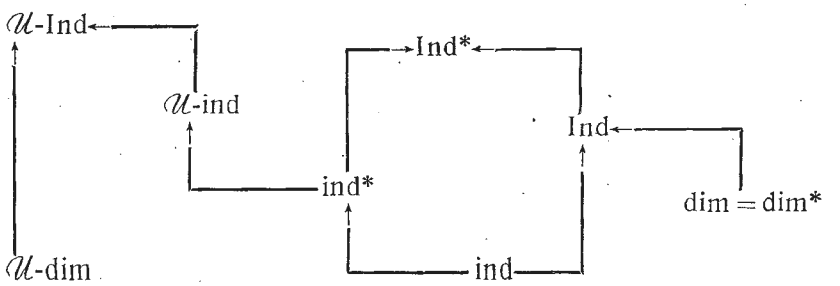
EXAMPLE 3. For each $\alpha<\omega_1$, let X_α be a subset of I^n such that $\dim X_\alpha = 0$, $X_\alpha \subset X_\beta$ for $\alpha<\beta$, and $I^n = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ ([11], theorems 13–15). $M_n = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{\alpha\}\times X_\alpha$, $K_n = M_n \cup (\{\omega_1\}\times I^n)$ are given the a subspace topology induced by the product topology on $[0, \omega_1]\times I^n$. Example M_n, which is due to SMIRNOV [13], is normal Hausdorff with $\operatorname{ind} M_n = 0$ and $\dim M_n = \operatorname{Ind} M_n = n$. If $f : M_n \to R$ is continuous, and $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ is dense in I^n, there is $\beta<\omega_1$ such that for $\alpha>\beta$ $\{x_k\}\subset X_\alpha$ and $f(\alpha, x_k) = f(\beta, x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. This enables us to extend f to K_n in an obvious way. Thus M_n is C^*-imbedded in K_n.

Let E_1, E_2 be disjoint closed sets of K_n. Then there is $\alpha<\omega_1$, and a finite open cover $\{G_i\}$ of I^n such that $(\alpha, \omega_1 1\times \overline{G}_i \cap E_j \neq \emptyset$ iff $i\in I_j$, where $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Let $H_j = \bigcup_{i\in I_j} G_i - \bigcup_{i\notin I_j} \overline{G}_i$. H_1, H_2 are disjoint open sets of I^n such that $E_j \cap (\alpha\ \omega_1]\times I^n \subset (\alpha, \omega_1]\times H_j$. This implies that K_n is normal, and every closed subset of K_n disjoint from $\{\omega_1\}\times I^n$ is contained in the metric separable space $\bigcup_{\alpha<\beta} \{\alpha\}\times X_\alpha$ for some β, which has $\operatorname{ind}^* = \operatorname{Ind}^* = \operatorname{ind} = 0$. By proposition 17, $\operatorname{Ind}^* K_n \leq n$. Since also $n = \operatorname{Ind} M_n \leq \operatorname{Ind}^* M_n \leq \operatorname{Ind}^* K_n$ (propositions 2 and 10), $\operatorname{Ind}^* M_n = \operatorname{Ind}^* K_n = n$.

Let N_n be the space obtained from K_n by identifying all the points of $\{\omega_1\}\times I^n$. The quotient map $K_n \to N_n$ is closed, and hence N_n is normal Hausdorff with $\operatorname{Ind}^* N_n = 0$ (proposition 17). If $\mathcal{V}$ is the subspace uniformity induced by $\mathcal{M}^{Nn}$ on M_n, then $\mathcal{V}-\operatorname{ind} M_n = \mathcal{V}-\dim M_n = \mathcal{V}-\operatorname{Ind} M_n = 0$.

6. Relations between topological and uniform dimmensions

The relations between uniform and topological dimmensions of a normal uniform space $(X, \mathcal{U})$, which are obtained in [2] and this paper, are summarised in the following diagram, where for dimmension functions D_1, D_2 "$D_1 \to D_2$" stands for "$D_1 \leq D_2$".



That there are no other relations can be seen in the following table, where $(R^n, \mathscr{E})$ and $(R^2, \mathscr{F})$ are examples 2 and 3 of [2].

Space		ind	ind*	dim	Ind	Ind*	$\mathscr{U}$-ind	$\mathscr{U}$-Ind	$\mathscr{U}$-dim
M_n,	$\mathscr{M}^{M_n}$	0	0	n	n	n	0	n	n
M_n,	$\mathscr{O}$	0	0	n	n	n	0	0	0
Q_n,	$\mathscr{M}^{Q_n}$	1	n	1	1	n	n	n	1
R^n,	$\mathscr{E}$	0	0	0	0	0	0	$n-1$	$n-1$
R^2,	$\mathscr{F}$	0	0	0	0	0	1	1	1
S,	$\mathscr{M}^S$	2	2	1	2	2	2	2	1

References

[1] M. G. Charalambous, A new covering dimension function for uniform spaces, *J. London Math. Soc.* 2, **11.** (1975), 137–143.

[2] M. G. Charalambous, Inductive dimension theory for uniform spaces, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **17** (1974), 21–28.

[3] C. H. Dowker, Inductive dimension of completely normal spaces, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **4** (1953), 267–281.

[4] C. H. Dowker, Local dimension of normal spaces, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **6** (1955), 101–120.

[5] R. Engelking, *Outline of general topology*, Amsterdam, 1968.

[6] V. V. Filippov, A bicompactum with noncoinciding inductive dimensionalities, *Soviet Math. Dokl.*, **10** (1969), 208–211.

[7] V. V. Filippov, On the inductive dimension of the product of bicompacta, *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 250–254.

[8] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, New York, 1960.

[9] E. Hewitt, On two problems of Urysohn, *Ann. of Math.*, (2), **47** (1946), 503–509.

[10] O. V. Lokucievskii, On the dimension of bicompacta, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **67** (1949), 217–219.

[11] K. Nagami, *Dimension theory*, New York and London, 1970.

[12] J. Novák, Regular space on which every continuous function is constant, *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, **73** (1948), 58–68.

[13] Yu. M. Smirnov, An example of a zero dimensional normal space, having infinite covering dimension, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **123** (1958), 40–42.

[14] A. V. Zarelua, On a theorem of Harewicz, *American Math. Soc. Transactions*, Ser. 2, **55** (1966), 141–152.

RADICALS AND DECOMPOSABILITY OF SEMIGROUPS AND RINGS

By

L. MÁRKI, P. N. STEWART and R. WIEGANDT

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest
and Department of Mathematics, Dalhousie University, Halifax

(Received July 23, 1974)

1. Introduction

The purpose of this note is to exhibit the nonexistence of a non-trivial radical admitting good decompositions for each semisimple semigroup (ring) or for each radical semigroup (ring). A good decomposition means here a decomposition into a 0-disjoint union or a direct product or a discrete direct product of simple or subdirectly irreducible semigroups (into a direct sum or discrete direct sum of subdirectly irreducible rings). Our results extend those of [4]. In the case of rings, however, there are some exceptional radicals admitting good decompositions for radical rings; all such radical classes consist of zero-rings over divisible abelian groups.

By a *semigroup* and a *ring* we shall always mean a semigroup with zero and an associative ring, respectively. We shall consider radical classes in the sense of Kurosh and Amitsur. In the case of rings we refer to [1] and [6] meanwhile for semigroups we follow the terminology of [3] and [5]. An abstract class $\mathbf{R}$ of semigroups is called a *radical class* if the following three conditions are satisfied:

(i) $\mathbf{R}$ is closed by Rees factor semigroups;

(ii) every semigroup A contains an $\mathbf{R}$-ideal $\mathbf{R}(A)$ which contains every other $\mathbf{R}$-ideal of A; $\mathbf{R}(A)$ is the $\mathbf{R}$-radical of A;

(iii) for each semigroup A we have $\mathbf{R}(A/\mathbf{R}(A)) = 0$ where A/B means the Rees factor semigroup of A modulo B.

A class $\mathbf{S}$ is called a *semisimple class* if there exists a radical class $\mathbf{R}$ such that the semigroups with $\mathbf{R}$-radical 0 are just the elements of the class $\mathbf{S}$. By [3] we know that for semigroups many assertions hold which are analogous to those for rings. For instance, a class $\mathbf{S}$ is a semisimple class if and only if $\mathbf{S}$ has the following property:

The authors are indebted to Dr. B. J. GARDNER (Hobart, Australia) for his kind collaboration.

$S \in \mathbf{S}$ if and only if each non-zero ideal of S has a non-zero Rees factor semigroup belonging to $\mathbf{S}$,
while a class $\mathbf{R}$ is a radical class if and only if it has the property:
$S \in \mathbf{R}$ if and only if each non-zero Rees factor semigroup of S has a non-zero ideal belonging to $\mathbf{R}$.

It is also true that every semisimple class $\mathbf{S}$ is hereditary, i.e. $B \lhd A \in \mathbf{S}$ implies $B \in \mathbf{S}$. Further, any radical class $\mathbf{R}$ as well as any semisimple class is closed under taking extensions, i.e. $B \lhd A$, $B \in \mathbf{R}$ and $A/B \in \mathbf{R}$ imply $A \in \mathbf{R}$.

In the sequel we shall use the term 0-*simple* in the sense which is usual in semigroup theory, i.e. a semigroup is 0-simple if it has no other ideals than 0 and itself, while the term "subdirectly irreducible" has the same meaning as in universal algebra: a semigroup is *subdirectly irreducible*, if the intersection of its non-zero congruences is a non-zero congruence. As a result of this mixed terminology a 0-simple semigroup need not be subdirectly irreducible. By the 0-*disjoint union* of the semigroups $\{A_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ we mean the 0-disjoint union of their underlying sets endowed with the multiplication

$$ab = \begin{cases} ab & \text{if} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{if} \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$$

where $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$.

2. Semisimple semigroups

We begin with two easy constructions. Firstly, consider a semigroup in two copies A and A' and let the element corresponding to $a \in A$ be just $a' \in A'$. Take the 0-disjoint union $A \cup A'$ of the underlying sets and extend the multiplication of A and A' in $A \cup A'$ by defining $a'b = ab' = ab$. Thus we have got a semigroup $A \circ A'$ on $A \cup A'$.

PROPOSITION 1. *If A is a 0-simple semigroup different from the two element zero semigroup, then*

(i) *$A \circ A'$ has exactly three ideals: 0, A and $A \circ A'$; further $A \circ A'$ is not subdirectly irreducible.*

(ii) *$A \circ A'$ is neither a 0-disjoint union nor a direct product nor a discrete direct product of 0-simple semigroups;*

(iii) *if $\mathbf{K}$ is a class of semigroups closed under taking extensions and $A \in \mathbf{K}$, then $A \circ A' \in \mathbf{K}$ also holds.*

The assertions follow straightforwardly from the definition of $A \circ A'$.

Secondly, consider the direct product D and the discrete direct product D_0 of countably infinitely many copies A_i of a semigroup A, respectively, and the diagonal subsemigroup Δ of D. Take the subsemigroup $F = D_0 \cup \Delta$ of D generated by D_0 and Δ.

PROPOSITION 2. *If A is a 0-simple semigroup, different from the two element zero semigroup, then*

(i) *D_0 is an ideal of F containing all proper ideals of F;*

(ii) *F is neither a 0-disjoint union nor a direct product nor a discrete direct product of subdirectly irreducible semigroups;*

(iii) *F is not subdirectly irreducible, in fact, F is a subdirect product of the components A_i, $i = 1, 2, \ldots$.*

The first assertion is trivial. Since by (i) F has exactly one maximal ideal, so F cannot be decomposed in any of the desired forms. Furthermore, each component A_i of D_0 is an ideal of F, so $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = 0$ implies (iii).

THEOREM 1. *There is no semisimple class* **S** *(different from the class of one element semigroups) such that each semigroup of the class* **S** *is a 0-disjoint union or a direct product or a discrete direct product of 0-simple semigroups.*

Suppose **S** is a semisimple class satisfying the requirements of Theorem 1, and take a semigroup of at least two elements. By the hypothesis this semigroup can be decomposed in ideals which are 0-simple semigroups. Since **S** is a hereditary class, it follows that **S** contains a 0-simple semigroup A of at least two elements. If A is not the two element zero semigroup then by (iii) of Proposition 1 the semigroup $A \circ A'$ is again in **S** for **S** is closed under extensions. On the other hand property (ii) of Proposition 1 contradicts the assumption. Suppose now that **S** contains the two element zero semigroup and consider the semigroup $B = \{0, a, a^2\}$ where $a^3 = 0$. Clearly B has exactly three ideals, $\{0\}$, $\{0, a^2\}$ and B, thus the same argumentation as that in (ii) of Proposition 1 yields that B cannot be decomposed in any of the desired forms. On the other hand both $\{0, a^2\}$ and $B/\{0, a^2\}$ are two element zero semigroups, hence elements of **S**, and the extension property of **S** implies $B \in \mathbf{S}$.

THEOREM 2. *There is no semisimple class* **S** *(different from the class of one element semigroups) such that each* **S***-semigroup can be decomposed into a 0-disjoint union or direct product or discrete direct product of subdirectly irreducible semigroups.*

Suppose **S** is a semisimple class as required. Now any semigroup of **S** can be decomposed into subdirectly irreducible ideals and since **S** is hereditary, it follows that **S** contains a subdirectly irreducible semigroup $B \neq 0$. Now the intersection K of all non-zero ideals of B is a non-zero ideal, and the hereditariness of **S** implies $K \in \mathbf{S}$. As it is well known, either K is a 0-simple semigroup with $K^2 = K$ or $K^2 = 0$. In the second case, again by the hereditariness of **S**, the ideal $D = \{0, k\}$ of K belongs to **S** where $k \neq 0$ is any element of K. Thus in either of the cases the semisimple class **S** contains a 0-simple semigroup $A \in \mathbf{S}$. Suppose firstly that A is not the two element zero semigroup, and construct the semigroup F given

in Proposition 2. We show $F \in \mathbf{S}$. Recall that if $\mathbf{S}$ is a semisimple class, then $S \in \mathbf{S}$ iff each non-zero ideal of S has a non-zero Rees factor semigroup belonging to $\mathbf{S}$. If J is any non-zero ideal of F, then there exists an element $(a_1, \ldots, a_k, \ldots) \in J$ such that at least one component a_k differs from 0. Putting 0 at the k-th entry of every element of J we obtain an ideal L of J and for the Rees factor semigroup J/L we have $J/L \cong A_k \cong A$. Hence $J/L \in \mathbf{S}$ and so $F \in \mathbf{S}$ has been established. Now (ii) of Proposition 2 contradicts the assumption. Suppose now that $\mathbf{S}$ contains the two element zero semigroup, and consider the semigroup $S = \{0, a, b, c\}$ with the rules $b^3 = c^3 = 0$, $b^2 = bc = cb = c^2 = a$. S belongs to $\mathbf{S}$, as each non-zero ideal of S has a non-zero Rees factor semigroup in $\mathbf{S}$. Identifying on the one hand b and c, on the other hand a and 0, we obtain two proper congruences the intersection of which is the equality relation in S, hence S is not subdirectly irreducible. Since S contains a least non-zero ideal, it cannot be decomposed in any of the desired forms, contradicting the assumption. This completes the proof of the Theorem.

Combining the proof of Theorems 1 and 2 we get:

There does not exist a semisimple class $\mathbf{S}$ *admitting decompositions into a* 0*-disjoint union or a direct or a discrete direct product for each* $\mathbf{S}$*-semigroup such that the components are* 0*-simple or subdirectly irreducible semigroups.*

3. Radical semigroups

Since category theoretically the decomposition theorems of semigroups are to some extent dual to those of rings (cf. [5]) one may ask if there is a radical class of semigroups such that each radical semigroup has a decomposition as a disjoint union or direct product or discrete direct product of 0-simple or subdirectly irreducible semigroups. The answer is again negative.

THEOREM 3. There *does not exist a radical class* $\mathbf{R}$ *(different from the class of one element semigroups) such that each* $\mathbf{R}$*-semigroup is either a* 0*-disjoint union or a direct product or a discrete direct product of* 0*-simple semigroups.*

Having in mind that every radical class is closed under taking extensions and is closed by forming Rees factor semigroups, the statement can be proved similarly to that of Theorem 1.

THEOREM 4. *There does not exist a radical class* $\mathbf{R}$ *(different from the class of one element semigroups) such that each* $\mathbf{R}$*-semigroup is a* 0*-disjoint union or a direct product or a discrete direct product of subdirectly irreducible semigroups.*

Let $\mathbf{R}$ be a radical class different from the class of one element semigroups and satisfying the requirements of the Theorem. Since in any of the considered decompositions the components of a semigroup are

at the same time Rees factor semigroups as well, further since **R** is closed under Rees factor semigroups, **R** certainly contains a subdirectly irreducible semigroup A. This semigroup A is either 0-simple or the intersection of its proper non-zero ideals is again a non-zero ideal of A.

If A is 0-simple and different from the two element zero semigroup, then we can take the semigroup $A \circ A'$ of Proposition 1 and this contradicts our assumption. If A is the two element zero semigroup, then take the semigroup S considered in the proof of Theorem 2. S belongs to **R**, for each non-zero Rees factor semigroup of S contains the two element zero semigroup as an ideal. On the other hand, we have seen that S is not subdirectly irreducible and it cannot be decomposed in any of the desired forms either.

Suppose now that $A \in \mathbf{R}$ and A has a least non-zero proper ideal K. Consider again the semigroup $A \circ A'$ and the homomorphic image $A * A'$ of $A \circ A'$ obtained by identifying K and K'. Now $A \lhd A * A'$, $A \in \mathbf{R}$, further any proper Rees factor semigroup of $A * A'$ is a Rees factor semigroup of $A * A'/K$ and $A * A'/K \cong A/K \circ (A/K)' \in \mathbf{R}$ by the extension property. Hence $A * A' \in \mathbf{R}$ follows. Obviously, $A * A'$ is not subdirectly irreducible (on the one hand one can identify A and A', on the other hand one can contract K into 0). Having only one minimal ideal in $A * A'$, $A * A'$ is not decomposable in any of the desired forms. This contradiction proves the Theorem.

With similar proof to those of Theorems 3 and 4 one can get the following somewhat stronger statement:

There does not exist a radical class **R** *such that each* **R***-semigroup is a* 0*-disjoint union or a direct product or a discrete direct product of* 0*-simple or subdirectly irreducible semigroups.*

4. Rings

Here we also begin with a construction: we are going to prove the analogue of Proposition 2, which will be done in two steps.

PROPOSITION 3. *Consider the direct sum D and the discrete direct sum D_0 of countably infinitely many copies A_i of a ring A, respectively, and the diagonal subring Δ of D. Take the subring $F = \{D_0, \Delta\}$ of D generated by D_0 and Δ. If A is a simple ring, then*

(i) *F is neither a complete nor a discrete direct sum of simple rings;*
(ii) *F is not subdirectly irreducible.*

In order to prove the first assertion, consider the socle S of F; from the definition of F it follows that S equals to D_0. Now F cannot be decomposed into a discrete direct sum of simple rings, since in that case F would be equal to its socle contradicting $D_0 \neq F$. Suppose at last that F is a complete direct sum of simple rings, and take the ideal E of F con-

sisting of those vectors of this complete direct sum which have 0 at each even entry. Now we have

$$0 \neq E/D_0 \cap E \cong (E+D_0)/D_0 \lhd F/D_0$$

and this contradicts the simplicity of $F/D_0 \cong A$.

The second assertion follows immediately from the fact that all the components A_i are ideals of F, and F lies between their complete and discrete direct sums.

PROPOSITION 4. *Consider the ring F constructed in Proposition 3: If A is a simple ring which is not a zero-ring, then*

(iii) *F cannot be decomposed into a complete or discrete direct sum of subdirectly irreducible rings.*

Suppose that F is a direct sum of two of its ideals. If one of them contains an element with a non-zero k-th entry, it is easy to show that this ideal must contain the whole component A_k (here we need the supposition that A is not a zero-ring); from this remark it follows that one of the two ideals is a direct sum of a finite number of the components A_k.

Suppose now that F is a complete or discrete direct sum of the subdirectly irreducible rings B_α. Corresponding to the two cases, let $\overline{B_\alpha}$ denote the complete or discrete direct sum of all the components except B_α. Then in both cases F is a direct sum of B_α and $\overline{B_\alpha}$, and we can apply our above remark. Since $\overline{B_\alpha}$ has infinitely many ideals, it cannot be the sum of a finite number of A_k-s; thus B_α has this property. On the other hand, B_α is subdirectly irreducible, hence $B_\alpha \cong A$ follows. This means that all the B_α-s are simple, but we have seen in Proposition 3 that a decomposition of F into simple rings does not exist.

Now we are able to prove the result for rings analogous to Theorem 2. Note that this result generalizes those of [4].

THEOREM 5. *There does not exist a semisimple class* **S** *of rings (different from the class of one element rings) such that every* **S***-ring is a complete or discrete direct sum of subdirectly irreducible rings.*

In the same way as it was done in the proof of Theorem 2, one can show that such a class **S** must contain a simple ring A or the zero-ring $Z(\infty)$ over the infinite cyclic group. If A is not a zero-ring, then consider the ring F constructed as in Propositions 3 and 4, and in view of these Propositions, all we have to show is that $F \in \mathbf{S}$, which can also be done in the same way as in the proof of Theorem 2. Suppose now that A is a simple zero-ring, then A is a zero-ring $Z(p)$ over a cyclic group of prime order p. Now $Z(\infty)$ belongs to **S**, for every non-zero ideal of $Z(\infty)$ can be mapped homomorphically onto $Z(p)$. Further $Z(\infty)$ is not subdirectly irreducible and has no proper direct summands. Hence the **S**-ring $Z(\infty)$ cannot be decomposed into a discrete or complete direct sum of subdirectly irreducible rings. This completes the proof of Theorem 5.

The assertion corresponding to Theorem 3 is also true.

THEOREM 6. *There dose not exist a radical class* $\mathbf{R}$ *(different from that of all one element rings) such that every* $\mathbf{R}$*-ring is a discrete or complete direct sum of simple rings.*

Assume $\mathbf{R}$ is a radical class admitting decompositions in the required form for each $\mathbf{R}$-ring. Then $\mathbf{R}$ contains simple rings. Take a simple ring A from the class $\mathbf{R}$, and construct the ring F described in Proposition 3. By Proposition 3, a contradiction will be obtained if we show that $F \in \mathbf{R}$, i.e. every non-zero homomorphic image of F has a non-zero ideal in $\mathbf{R}$. For the ideal D_0 of F we have $F/D_0 \cong A \in \mathbf{R}$. If the ideal J is properly contained in D_0, then $D_0/J \lhd F/J$ and $D_0 \in \mathbf{R}$ implies $D_0/J \in \mathbf{R}$. Let K be an ideal of F not contained in D_0. Then taking into account that $\mathbf{R}$ is homomorphically closed, it follows that

$$D_0/K \cap D_0 \cong (D_0+K)/K \lhd F/K \quad \text{and} \quad D_0/K \cap D_0 \in \mathbf{R}.$$

Hence $F \in \mathbf{R}$ is established.

Radicals were introduced for getting structure theorems for semisimple rings, meanwhile radical rings are considered pathological. From this point of view it is surprising that the assertion corresponding to Theorem 4 is not true for rings. There exist radical classes such that every radical ring is a discrete direct sum of subdirectly irreducible rings. Consider a set $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ of distinct primes and the set

$$\mathbf{P} = \{0, Z(p_1^\infty), \ldots, Z(p_n^\infty), \ldots\}$$

of zero-rings over the quasi-cyclic groups $C(p_1^\infty), \ldots, C(p_n^\infty), \ldots$. The set $\mathbf{P}$ is closed under taking homomorphic images, moreover the lower radical class $\mathcal{L}\mathbf{P}$ determined by $\mathbf{P}$ is the class

$$\mathcal{L}\mathbf{P} = \left\{ \text{all rings } A \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{every non-zero homomorphic image} \\ \text{of } A \text{ has a non-zero ideal in } \mathbf{P}\end{array} \right\}$$

(see e.g. [6]). Take a ring $A \in \mathcal{L}\mathbf{P}$ and denote the maximal divisible ideal of A by D. Now the factor ring A/D has no non-zero divisible ideal, consequently A/D has no ideal isomorphic to a $Z(p_n^\infty)$ either. Hence $A = D$ follows. As is well known, every $\mathcal{L}\mathbf{P}$-ring as a zero-ring over a divisible group, is a discrete direct sum of rings $Z(p_n^\infty)$. Moreover, any zero-ring $Z(p_n^\infty)$ is subdirectly irreducible, because the zero-ring $Z(p_n)$ of order p_n is the smallest ideal of $Z(p_n^\infty)$.

Now it is natural to ask whether there exist more radical classes with such an "unfair" behaviour. The following theorem shows that the above examples provide all exceptional cases.

THEOREM 7. *There does not exist a radical class* $\mathbf{R}$ *different from the classes* $\mathcal{L}\mathbf{P}$ *described above such that every* $\mathbf{R}$*-ring is a complete or discrete direct sum of subdirectly irreducible rings.*

Suppose there exists a radical class **R** such that **R** is not a class $\mathcal{L}\mathbf{P}$ and every **R**-ring can be decomposed into a complete or discrete direct sum of subdirectly irreducible rings.

Firstly we show that **R** contains a non-zero idempotent ring. Consider the lower radical class **Z** determined by the zero-rings $Z(p^\infty)$ for all primes p. By the assumption there is an **R**-ring B such that $0 \neq C = B/\mathbf{Z}(B)$. C as well as C/C^2 are again **R**-rings, moreover C/C^2 is a zero-ring. Hence by the hypothesis C/C^2 is a complete or discrete direct sum of subdirectly irreducible zero-rings. The subdirectly irreducible zero-rings, actually abelian groups, are just the zero-rings $Z(p_i^{n_i})$, $1 \leq n_i \leq \infty$. Taking into account $Z(C/C^2) = 0$, the subdirectly irreducible components of C/C^2 are finite. Since $Z(p^n) \in \mathbf{R}$ implies $Z(p) \cong Z(p^n)/Z(p^{n-1}) \in \mathbf{R}$, and **R** must not contain simple rings (cf. with the proof of Theorem 6), it follows that $C = C^2$. Thus **R** contains non-zero idempotent rings.

Since **R** is homomorphically closed, **R** contains an idempotent subdirectly irreducible ring $A \neq 0$. Let

$$H = \cap (J | 0 \neq J \lhd A)$$

be the heart of A.

Note that if $0 \neq x \in A$ and $xA = Ax = 0$, then there is a positive integer n such that $0 \neq nx \in H$. To see this observe that the characteristic of the subring S generated by x cannot be 0 or be divisible by two distinct primes, because A is subdirectly irreducible. Thus S has characteristic p^n for some prime p and integer $n > 1$. It follows that $0 \neq p^{n-1}x \in H$ (in fact, $p^{n-1}S = H$).

Construct the ring F as in Proposition 3. The ring F is in **R** because **R** is closed under discrete direct sums and extensions.

Since $A^2 = A$, there is at least one element $x \in A$ such that $AxA \neq 0$. Put $a = (x, x, \ldots, x, \ldots)$ and for $i = 1, 2, \ldots$ let $a_i = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$ be the element of F having x at the i-th coordinate. Also, let

$$A_i = \{(0, \ldots, 0, b, 0, \ldots) | b \in A\}$$

be the set of all elements of F having 0 components at every coordinate but the i-th. Thus F has elements $a_1, a_2, \ldots$ and ideals $A_1, A_2, \ldots$ such that:

1. $Fa_iF \neq 0$.
2. The ideals A_i are subdirectly irreducible as rings, $A_i \cap A_j = 0$ for $i \neq j$ and $a_i \in A_i$ for all $i = 1, 2, \ldots$.
3. For any $u \in F$, either FuF intersects only a finite number of the ideals A_i non-trivially or else FuF intersects all but a finite number of the ideals A_i nontrivially.
4. The ideal FaF intersects every non-zero ideal of F non-trivially.

1. and 2. are obviously true. To see 3. take an element $u \in F$. Then $u = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ is constant from some point on, say $x_i = x_j = x'$ for all $i, j > N$. If $x' = 0$, then FuF intersects at most the first N A_i's

non-trivially. If $x' \neq 0$ and FuF intersects A_j non-trivially for some $j > N$, then FuF intersects A_i non-trivially for all $i > N$.

Assertion 4. follows from the observation that, since $AxA \supseteq H$, FaF contains the set

$$\{(h_1, \ldots, h_n, \ldots) | h_i \in H, \text{ and for some } N, \ h_i = h_j \text{ for all } i, j > N\}.$$

For suppose J is a non-zero ideal of F and $0 \neq y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in J$. The element y is constant from some point on, say $y_i = y_j = y'$ for all $i, j > N$. If there is an i such that $A_i y A_i + y A_i + A_i y \neq 0$, then

$$J \supseteq \{(0, \ldots, 0, h, 0, \ldots) | h \in H\}$$

where h is at the i-th coordinate, and so does FaF. On the other hand, suppose that $A_i y A_i + y A_i + A_i y = 0$ for all $i = 1, 2, \ldots$. Then for each non-zero y_i there is a positive integer n_i such that $0 \neq n_i y \in H$, and only a finite number of different n_i's are required because y is constant from some point on. It follows that there is a positive integer k such that $ky = (ky_1, \ldots, ky_n, \ldots) \neq 0$ and $ky_i \in H$ for all $i = 1, 2, \ldots$. Now ky must be constant from some point on and so $ky \in FaF$.

We now show that a ring F satisfying 1.–4. cannot be the discrete or complete direct sum of subdirectly irreducible rings.

Suppose that there are subdirectly irreducible rings B_λ such that

$$\oplus B_\lambda \subseteq F \subseteq \Pi B_\lambda.$$

Here $\oplus B_\lambda$ denotes the discrete direct sum of the rings B_λ and ΠB_λ denotes the complete direct sum of the rings B_λ. Denote the ideal

$$\{(\ldots, 0, \ldots, 0, b_\lambda, 0, \ldots) | b_\lambda \in B_\lambda\}$$

by $\hat{B}_\lambda$. Take $a_i = (\ldots, b_{i\lambda_i}, \ldots)$. Since by 1. $Fa_i F \neq 0$, there is a λ_i such that $B_{\lambda_i} b_{i\lambda_i} B_{\lambda_i} \neq 0$. Notice that

$$0 \neq \hat{B}_{\lambda_i} (\ldots, 0, \ldots, 0, b_{i\lambda_i}, 0, \ldots) \hat{B}_{\lambda_i} = \hat{B}_{\lambda_i} a_i \hat{B}_{\lambda_i}$$

is an ideal of F contained in $A_i \cap \hat{B}_{\lambda_i}$. Since $A_i \cap A_j = 0$ for $i \neq j$ and the rings B_{λ_i} are subdirectly irreducible, it follows that $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$.

Suppose that $F = \oplus B_\lambda$. By the above paragraph the set of B_λ's must be infinite. However, $a \in F$ must be in a finite sum $\hat{B}_{\lambda'_1} + \ldots + \hat{B}_{\lambda'_k}$ and so by 4. every non-zero ideal of F intersects $\hat{B}_{\lambda'_1} + \ldots + \hat{B}_{\lambda'_k}$ non-trivially. Since $(\hat{B}_{\lambda'_1} + \ldots + B_{\lambda'_k}) \cap \hat{B}_\mu = 0$ for $\mu \neq \lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$, the set of B_λ's must be finite. This contradiction shows that F is not the discrete direct sum of subdirectly irreducible rings.

Now suppose that $F=\Pi B_\lambda$. Let $u=(\ldots,u_\lambda,\ldots)$ and $v=(\ldots,v_\lambda,\ldots)$ be defined by

$$u_\lambda=\begin{cases}b_{i\lambda_i} & \text{if } \lambda=\lambda_i \text{ and } i \text{ is even}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$v_\lambda=\begin{cases}b_{i\lambda_i} & \text{if } \lambda=\lambda_i \text{ and } i \text{ is odd}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

where the $b_{i\lambda_i}$-s are elements of B_{λ_i} defined above. Since $i\neq j$ implies $\lambda_i\neq\lambda_j$, $FuF\cap FvF=0$. Since each A_i is subdirectly irreducible, either $FuF\cap A_i=0$ or $FvF\cap A_i=0$ for all $i=1,2,\ldots$. For each even i

$$0\neq\hat{B}_{\lambda_i}u\,\hat{B}_{\lambda_i}=\hat{B}_{\lambda_i}a_i\,\hat{B}_{\lambda_i}\subseteq A_i$$

and so FuF intersects an infinite number of the ideals A_i non-trivially. Similarly, FvF intersects an infinite number of the ideals A_i non-trivially. Thus both FuF and FvF intersect an infinite number of the ideals A_i non-trivially and also have zero intersection with an infinite number of the ideals A_i. This contradicts 3. and so F is not the complete direct sum of subdirectly irreducible rings.

Combining Theorem 7 and a recent result of GARDNER [2] we arrive at the following.

COROLLARY. *The following conditions are equivalent for a radical class* **R**.

(i) **R** *consists of nilpotent rings;*

(ii) **R** *consists of zero-rings;*

(iii) *every* **R***-ring is a discrete or complete direct sum of subdirectly irreducible rings;*

(iv) *every* **R***-ring is a discrete direct sum of subdirectly irreducible rings;*

(v) **R** *is the class* $\mathcal{L}\mathbf{P}$ *of all zero-rings on divisible P-groups for some set P of primes.*

References

[1] N. DIVINSKY, *Rings and radicals*, George Allen & Unwin Ltd., 1965.

[2] B. J. GARDNER, On the scarcity of nilpotent radical classes, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math., **16** (1973), 23–24.

[3] Р. С. ГРИГОР: К теории радикалов полугрупп, I., *Мат. Исслед. Кишинев*, **6** (4) (1971), 37–55.

[4] R. WIEGANDT, A note on Kurosh–Amitsur radical properties, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math., **12** (1969), 63–65.

[5] R. WIEGANDT, On the structure of lower radical semigroups, *Czechoslovak Math. J.*, 22 (1972), 1–6.

[6] R. WIEGANDT, *Radical and semisimple classes of rings*, Queen's papers in pure and appl. math., **37**, Kingston, 1974.

CONGRUENCES AND SUBALGEBRAS

By

B. CSÁKÁNY

József Attila University, Szeged

(Received September 15, 1974)

Varieties whose algebras satisfy several conditions on congruences and/or subalgebras were studied by many authors. E. g., such conditions are: two congruences coincide provided they have a congruence class in common [3]; every two subalgebras have an element in common ([5], Theorem 5.6.); every subalgebra is a class of some congruence [4]. In what follows we shall consider the simplest such conditions and we characterize the varieties whose algebras fulfil them. Among others, we obtain some new Mal'cev-type theorems.

The basic terminology we use is that of [1]. Note, however, that we shall write "term" instead of "polynomial symbol". Furthermore, we say that a term f is essentially n-ary ($n \geq 0$) on the variety $\mathcal{V}$, if the polynomial $\mathbf{f}$ on the countably generated free $\mathcal{V}$-algebra depends on (exactly) n variables. "Operation" means basic operation, and "trivial operation" (or "trivial term") means projection. "Translation" is the same as "unary algebraic function". The set of all translations of the algebra $\mathfrak{A}$ will be denoted by $T(\mathfrak{A})$, and $P_n(\mathfrak{A})$ designates the set of all (formally) n-ary polynomials of $\mathfrak{A}$.

Consider a non-empty set M. We say that a subset S and an equivalence ϑ of M are *connected* if S is a class of ϑ. Let M be equipped with an algebraic structure; then the subsets and equivalences compatible with this structure (i.e., the subalgebras and congruences) will be referred to shortly as *compatible* subsets and equivalences. Observe that the above conditions are, in fact, requirements on connectedness, compatibility and equality of subsets and equivalences of the considered algebras (e. g., the first of them can be formulated as "if a subset is connected with two equivalences, which are compatible, then they are equal". It is not hard to construct a two-sorted first order logic with equality suitable to express all such requirements.) Now we introduce a series of very simple conditions (including also the above examples) based on

the notions just introduced. For this purpose, let us agree in the following notations:

1. α denotes anyone of the words "subset" and "equivalence". If α means "subset" in a given context, then $\bar{\alpha}$ means "equivalence" and vice versa.

2. $\mathbf{Q}$ denotes anyone of the expressions "at most one", "at least one" and "every".

The conditions we shall treat of are of the following form:

($*$) *For any (compatible)* α, $\mathbf{Q}$ α *connected with it is compatible.*

Performing all the meaningful substitutions for α and $\mathbf{Q}$, we get six distinct conditions if the word "compatible" in parentheses is neglected, and six further ones if it is considered effective. We shall describe those varieties whose members satisfy one particular (but arbitrary) condition. Denote the conditions of form ($*$) by (1)–(12) according to the following table:

α \ Q	at most one	at least one	every
subset	(1)	(3)	(5)
equivalence	(2)	(4)	(6)

The condition $(i+6)$ for $i = 1, \ldots, 6$ arises from (i) by the requirement that α is compatible.

THEOREM 1. *All algebras of the variety* $\mathcal{V}$ *satisfy* (1) *iff there exists a natural number* n *such that for some* 5*-ary, resp. ternary terms* $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ and $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$

$$\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ldots = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1(\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{z}, \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{p}_{i+1}(\mathbf{q}_{i+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{z}, \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{y}$$

hold identically in $\mathcal{V}$.

PROOF. As (1) means regularity [3] it is enough to notice that the identities in the theorem are equivalent to the corresponding ones in [3], and can be obtained by using Fichtner's symmetrization technique [2], which will be illustrated in the course of the proof of Theorem 6.

THEOREM 2. *All algebras of the variety* $\mathcal{V}$ *satisfy* (2) *iff there exists an at most unary term* $\mathbf{h}$ *which is essentially nullary in* $\mathcal{V}$.

PROOF. (2) means that no disjoint subsets can be subalgebras simultaneously, i.e., every two subalgebras (of any algebra in $\mathcal{V}$) have an element in common. Hence, as Taylor proved ([5], Therorem 5.6), the existence of the required **h** follows. The converse is obvious.

Note that (1) and (2) (in other words, regularity and Taylor's condition on subalgebras) are "dual" in the sense that they can be obtained from each other by replacing "subset" and "equivalence" by each other.

THEOREM 3. *For any variety $\mathcal{V}$, the following four conditions are equivalent:*

I. *All algebras of $\mathcal{V}$ satisfy* (3).
II. *All algebras of $\mathcal{V}$ satisfy* (5).
III. *All algebras of $\mathcal{V}$ satisfy* (11).
IV. *Each non-trivial operation in $\mathcal{V}$ is nullary.*

PROOF. Observe that IV $\rightarrow$ II $\rightarrow$ III and IV $\rightarrow$ I are trivial. Hence we have to prove I $\rightarrow$ IV and III $\rightarrow$ IV only.

I $\rightarrow$ IV. Let **f** be an n-ary ($n \geq 1$) term which depends essentially on its first variable in $\mathcal{V}$. Denote by $\mathfrak{F}_n$ the $\mathcal{V}$-free algebra freely generated by $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Then $f(x_0, x_2, \ldots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Further, (3) implies that any subset of $\mathfrak{F}_n$ is a class of some congruence on $\mathfrak{F}_n$, whence so does also the subset $\{x_0, x_1, f(x_0, x_2, \ldots, x_n)\}$. Now we have $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_0$ or x_1. The first case implies that **f** depends on none of its variables, a contradiction. Hence $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, i.e., **f** is trivial. Thus if an operation in $\mathcal{V}$ is nontrivial, it must be nullary.

III $\rightarrow$ IV. (11) means that in any algebra of $\mathcal{V}$ an equivalence having a subalgebra among its classes is a congruence. Let $\mathfrak{F}_2$ be freely generated in $\mathcal{V}$ by $\{x_0, x_1, x_2\}$ and denote the subalgebra $[x_0, x_1]$ by $\mathfrak{E}$. If $\mathcal{V}$ has an essentially at least binary term **f**, then $f(x_0, x_2) \notin \mathfrak{E}$. Define an equivalence ϑ on $\mathfrak{F}_2$ as follows: for $u, v \in \mathfrak{F}_2$ let $u \equiv v(\vartheta)$ if $u = v$ or $u, v \in \mathfrak{E}$. Then (11) implies that ϑ is a congruence and from $x_0 \equiv x_1(\vartheta)$ we have $f(x_0, x_2) \equiv f(x_1, x_2)(\vartheta)$. As $f(x_0, x_2) \notin \mathfrak{E}$, even $f(x_0, x_2) = f(x_1, x_2)$ holds, whence **f** is essentially at most unary, a contradiction.

Suppose $\mathcal{V}$ has no essentially nullary operations. Then $[x_0]$ and $[x_1, x_2]$ are disjoint. As the equivalences having $[x_0]$ as a class are congruences by (11), any equivalence on $[x_1, x_2]$ is a congruence. For $u, v \in [x_1, x_2]$ let $u \equiv v(\psi)$ if $u = x_1$, $v = x_1$ or $u = v$. Now ψ is a congruence on $[x_1, x_1]$, and if **f** is an essentially unary operation there we have $f(x_1) \equiv f(x_2)(\psi)$ and thus $f(x_1) = f(x_2)$ holds. This means that **f** is essentially nullary, a contradiction showing that $\mathcal{V}$ has no non-trivial operations in this case.

Now assume that $\mathcal{V}$ has essentially nullary operations. Denote by $\mathfrak{D}$ the subalgebra of $\mathfrak{F}_2$ generated by their values. If $\mathcal{V}$ has an essentially unary (non-trivial) operation **g**, then $x_0 \neq g(x_0)$. If, moreover, $g(g(x_0)) \neq x_0, g(x_0)$, then the equivalence on $\mathfrak{F}_2$ whose classes are D, $\{x_0, g(x_0)\}$ and the rest, is not a congruence there, which contradicts (11). If, finally,

$g(g(x_0)) = x_0$ or $g(g(x_0)) = g(x_0)$, then the equivalence with classes D, $\{x_0, g(x_0), x_1\}$ and the rest furnishes a contradiction. Thus, IV is proved.

THEOREM 4. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (4) *iff $\mathcal{V}$ has at most one at most nullary term (i. e., $\mathcal{V}$ is equivalent to the variety of sets or pointed sets).*

PROOF. Consider the free $\mathcal{V}$-algebra $\mathfrak{F}$ with the free generating set $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Suppose that there exists a term $\mathbf{f}$ which depends essentially on $n(>1)$ variables in $\mathcal{V}$. Then $f(x_n, \ldots, x_{2n-1}) \notin X$ and $f(x_n, \ldots, x_{2n-1}) \notin [x_0, \ldots, x_{n-1}]$. Denote the set $\{x_0, \ldots, x_{n-1}, f(x_n, \ldots, x_{2n-1})\}$ by D. We have $x_n, \ldots, x_{2n-1} \in F \setminus D$ and $f(x_n, \ldots, x_{2n-1}) \in F \setminus D$, whence $F \setminus D$ is not a subalgebra in $\mathfrak{F}$. As (4) means that among the classes of any equivalence there is a subalgebra, we may assert that D is a subalgebra in $\mathfrak{F}$. Hence either $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i \, (0 \leq i \leq n-1)$ or $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(x_n, \ldots, x_{2n-1})$. Both possibilities contradict, however, to the assumption on the essential arity of $\mathbf{f}$.

Let $\mathfrak{F}_1$ be the free $\mathcal{V}$-algebra with free generators x and y. If $\mathfrak{F}_1 = \{x, y\}$, then $\mathcal{V}$ is equivalent to the variety of sets. In the remaining case there exists an at most unary polynomial f of $\mathfrak{F}_1$ with $f(y) \neq y$. The set $\{x, f(y)\}$ is a subalgebra in $\mathfrak{F}_1$; indeed, its complement is not closed under f, and we can apply (4). Hence the unique at most unary term in $\mathcal{V}$ is $\mathbf{f}$, and it identically fulfils $\mathbf{f(x)} = \mathbf{f(y)}$. This means that $\mathcal{V}$ is equivalent to the variety of pointed sets.

On the other hand, sets and pointed sets satisfy (4) obviously.

THEOREM 5. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (6) *iff $\mathcal{V}$ is equivalent to the variety of sets.*

PROOF. (6) means exactly that in any algebra of $\mathcal{V}$ all subsets are subalgebras. Especially, the free generating set of a countably generated free $\mathcal{V}$-algebra is a subalgebra there, whence if follows that $\mathcal{V}$ has no non-trivial terms, i.e., it is equivalent to the variety of sets.

THEOREM 6. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (7) *iff for some natural number n there exist terms $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$; $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$; $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ (5-ary, ternary and unary, respectively) for which the identities*

$$(\beta) \qquad \mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ldots = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

$$(\beta_0) \qquad \mathbf{x} = \mathbf{p}_1(\mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{f}_1(\mathbf{z}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(\beta_i) \qquad \mathbf{p}_i(\mathbf{f}_i(\mathbf{z}), \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{p}_{i+1}(\mathbf{q}_{i+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{f}_{i+1}(\mathbf{z}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$
$$(i = 1, \ldots, n-1)$$

$$(\beta_n) \qquad \mathbf{p}_n(\mathbf{f}_n(\mathbf{z}), \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{y}$$

hold in $\mathcal{V}$.

PROOF. (7) means that two congruences coincide provided they have a congruence-class in common, which is a subalgebra. Especially, if an algebra $\mathfrak{A}$ has the property (7) and c is an idempotent element (i.e., an

one-element subalgebra) in $\mathfrak{A}$, then c is a class for the equality relation only. Hence using an argument due to Mal'cev [6], we get that if $a, b \in \mathfrak{A}$ are such that for any translation τ of $\mathfrak{A}$, the equality $\tau(a) = c$ is equivalent to $\tau(b) = c$, then $a = b$.

Now let the algebras of $\mathcal{V}$ fulfil (7) and consider the free $\mathcal{V}$-algebra $\mathfrak{F}_2$ with free generators x, y, z. Call a congruence ϑ on $\mathfrak{F}_2$ good, if all elements of $[z]$ are congruent under ϑ, and whenever anyone of x and y is translated into z by some translation π of $\mathfrak{F}_2$, the other one is translated by π into an element congruent with z under ϑ. The intersection of good congruences is also good; hence the intersection of all good congruences of $\mathfrak{F}_2$ is good, too; denote it by ψ. The class $\bar{z}$ of ψ containing z is a subalgebra in $\mathfrak{F}_2$. Thus $\bar{z}$ is an idempotent element of $\mathfrak{F}_2/\psi$. By the definition of good congruences, the elements $\bar{x}$ and $\bar{y}$ of $\mathfrak{F}_2/\psi$ (containing x and y, respectively) are such that for any translation τ of $\mathfrak{F}_2/\psi$, the equality $\tau(\bar{x}) = \bar{z}$ is equivalent to $\tau(\bar{y}) = \bar{z}$. Hence we get $\bar{x} = \bar{y}$, i.e., $x \equiv y(\psi)$.

Let σ^* be the congruence on $\mathfrak{F}_2$ generated by the relation

$$\sigma = \{\langle z, f(z)\rangle | f \in P_1(\mathfrak{F}_2)\} \cup$$

$$\cup \{\langle z, \tau(x)\rangle | \tau \in T(\mathfrak{F}_2) \wedge \tau(y) = z\} \cup \{\langle z, \tau(y)\rangle | \tau \in T(\mathfrak{F}_2) \wedge \tau(x) = z\}.$$

This definition guarantees that σ^* is good and any congruence of $\mathfrak{F}_2$ properly included in σ^* is not good. Thus, $\sigma^* = \psi$, whence $x \equiv y(\sigma^*)$. Consequently, σ has a finite subset

$$\sigma_1 = \{\langle z, \tilde{f}_1(z)\rangle, \ldots, \langle z, \tilde{f}_k(z)\rangle, \langle z, \tau_1(x)\rangle, \ldots, \langle z, \tau_l(x)\rangle,$$

$$\langle z, \varrho_1(y)\rangle, \ldots, \langle z, \varrho_m(y)\rangle\} \; (f_i \in P_1(\mathfrak{F}_2); \tau_i, \varrho_i \in T(\mathfrak{F}_2))$$

such that $x \equiv y(\sigma_1^*)$ also holds, where σ_1^* is the congruence generated by σ_1 in $\mathfrak{F}_2$.

Let $\mathbf{t}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ and $\mathbf{r}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ be such terms that for any $u \in \mathfrak{F}_2$, $\tau_i(u) = t_i(u, x, y, z)$ and $\varrho_j(u) = r_j(u, x, y, z)$. Furthermore, let $\tilde{\mathbf{q}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ $(i = 1, \ldots, l)$ and $\tilde{\mathbf{q}}_{l+j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{r}_j(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ $(j = 1, \ldots, m)$. Now for the $\tilde{\mathbf{q}}$'s just defined $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$ holds. Indeed, for $1 \leq i \leq l$ we have $z = \tau_i(y) = t_i(y, x, y, z)$. Then the identity $\mathbf{z} = \mathbf{t}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ is satisfied in $\mathcal{V}$, whence $\tilde{\mathbf{q}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. A similar argument is valid for $\tilde{\mathbf{q}}_{l+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{q}}_{l+m}$.

Return to the formula $x \equiv y(\sigma_1^*)$. It implies the existence of elements $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y \in \mathfrak{F}_2$ and translations $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in T(\mathfrak{F}_2)$ such that for $i = 1, \ldots, n$ the pair $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ arises from a pair in σ_1 (where the order of components is now irrelevant) by the translation γ_i. For any $w \in \mathfrak{F}_2$, let $\gamma_i(w) = g_i(w, x, y, z)$, where $\mathbf{g}_i$ is a suitable quaternary term. Now, for $i = 1, \ldots, n$, the terms $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{f}_i$ will be defined as follows:

If $x_{i-1} = \gamma_i(z)$, $x_i = \gamma_i(f_j(z))$, then

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}_1^2(\mathbf{g}_i(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{v}), \quad \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}, \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{f}}_j(\mathbf{z}).$$

If $x_{i-1} = \gamma_i(\tilde{f}_j(z))$, $x_i = \gamma_i(z)$, then

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}_2^2(\mathbf{u}, \mathbf{g}_i(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})), \quad \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}, \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{f}}_j(\mathbf{z}).$$

If $x_{i-1} = \gamma_i(z)$, $x_i = \gamma_i(\tilde{q}_j(x, y, z))$, then

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}_2^2(\mathbf{u}, \mathbf{g}_i(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})), \quad \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{q}}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{z}) = \mathbf{z}.$$

If $x_{i-1} = \gamma_i(\tilde{q}_j(x, y, z))$, $x_i = \gamma_i(z)$, then

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}_1^2(\mathbf{g}_i(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{v}), \quad \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{q}}_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{z}) = \mathbf{z}.$$

The validity of the identities (β), (β_0) (β_n) may be checked immediately. Thus the necessity of the above (Mal'cev-type) condition is proved.

To prove the sufficiency, first notice that $(\beta_0)-(\beta_n)$ imply the validity of the identical implication

$$(\beta') \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) = \ldots = \mathbf{f}_n(\mathbf{z}) = \mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \ldots = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}. \mathbf{z}) = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

in $\mathcal{V}$. Now suppose that for suitable terms $\mathbf{f}_i$ and $\mathbf{q}_i$ (β) and (β') hold identically in $\mathcal{V}$. Let $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ and assume that $\mathfrak{A}$ has a subalgebra $\mathfrak{C}$ which is a class of two different congruences φ_1, φ_2 on $\mathfrak{A}$. We can also suppose $\varphi_1 < \varphi_2$. The class C is an idempotent element in $\mathfrak{A}/\varphi_1$. Furthermore, there exist elements $a, b \in \mathfrak{A}$, such that $a \equiv b\,(\varphi_1)$ but $a \not\equiv b\,(\varphi_2)$. Thus the classes $\bar{a}$, $\bar{b}$ (containing a, resp. b) of the congruence φ_1 are distinct; and the congruence generated by the pair $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ on $\mathfrak{A}/\varphi_1$ is less than the congruence induced by φ_2 there. Hence the singleton $\{C\}$ is a class of φ_2. Therefore, any translation of $\mathfrak{A}/\varphi_1$, translating one of the elements a, $\bar{b}$ into C translates the other one into C too.

Let us consider the translations $\pi_i (i = 1, \ldots, n)$ of $\mathfrak{A}/\varphi_1$, defined by $\pi_i(w) = q_i(\bar{a}, w, C)$ $(w \in \mathfrak{A}/\varphi_1)$. In virtue of (β), we have $\pi_i(\bar{a}) = q_i(\bar{a}, \bar{a}, C) = C$, whence also $q_i(\bar{a}, \bar{b}, C) = \pi_i(\bar{b}) = C$. By the idempotency of C we infer $f_1(C) = \ldots = f_n(C) = C$. Applying (β'), we get $\bar{a} = b$, which contradicts the definition of a and b. Hence all algebras of $\mathcal{V}$ satisfy (7).

THEOREM 7. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (8) *iff for some natural number n there exist terms $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$; $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ (6-ary, and unary, respectively), for which the identities*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_1(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_i(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}_{i+1}(\mathbf{f}_{i+1}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{i+1}(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$(i = 1, \ldots, n-1)$$

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{f}_n(\mathbf{x}), \mathbf{f}_n(\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

hold in $\mathcal{V}$.

PROOF. It is analogous to that of the preceding theorem, and therefore will be sketched only. (8) means that no distinct subalgebras may be classes of the same congruence. If this condition is fulfilled by the algebra $\mathfrak{F}_1 \in \mathcal{V}$, freely generated by $\{x, y\}$, then the minimal congruence ϑ on $\mathfrak{F}_1$, under which any two elements of $[x]$ as well as any two elements of $[y]$ are congruent, fulfils $x \equiv y\,(\vartheta)$, too. Hence there exists a finite set of unary terms $\tilde{f}$ such that the set ϑ_1 of all pairs of form $\langle x, \tilde{f}(x)\rangle$, $\langle f, (x), x\rangle$, $\langle y, \tilde{f}(y)\rangle$ and $\langle \tilde{f}(y), y\rangle$ generate a congruence ϑ_1^* for which $x \equiv y\,(\vartheta_1^*)$. The further steps are left to the reader.

THEOREM 8. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (9) *iff for any n-ary* $(n \geq 1)$ *term* $\mathbf{f}$ *there exists a ternary term* $\mathbf{h}_f$ *such that the identity*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{h}_f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n))$$

holds in $\mathcal{V}$.

As (9) is just the Hamiltonian property, Theorem 8 coincides with Theorem 1 in KLUKOVITS' article [4].

THEOREM 9. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (10) *iff there exists an at most unary term* $\mathbf{f}$ *such that for any n-ary* $(n \geq 0)$ *term* $\mathbf{g}$ *the identity*

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

holds in $\mathcal{V}$.

PROOF. (10) means that among the classes of any congruence there is at least one subalgebra. This is the case also for the free $\mathcal{V}$-algebra $\mathfrak{F}_0$, freely generated by x, and for the equality relation. Thus there exists a one-element subalgebra in $\mathfrak{F}_0$ the unique element of which can be written in the form $f(x)$. Obviously, we have $g(f(x), \ldots, f(x)) = f(x)$ for any n-ary g in $\mathfrak{F}_0$, whence the identity in Theorem 9 holds in $\mathcal{V}$.

On the other hand, if the term $\mathbf{f}$ with the above property exists in $\mathcal{V}$, then in an arbitrary algebra $\mathfrak{A}$ of $\mathcal{V}$ any congruence admits classes which are subalgebras; any class containing an element of form $f(a)$ $(a \in \mathfrak{A})$ will be such a subalgebra.

THEOREM 10. *All algebras of the variety $\mathcal{V}$ satisfy* (12) *iff for any n-ary* $(n \geq 0)$ *term* $\mathbf{g}$ *the identity*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

holds in $\mathcal{V}$.

PROOF. It is enough to remark that both (12) and the considered identities characterize just the idempotent algebras.

References

[1] G. GRÄTZER,, *Universal Algebra,* Princeton, New Jersey, 1968.
[2] K. FICHTNER, Eine Bemerkung über Mannigfaltigkeiten universellen Algebren mit Idealen, *Monatsberichte der DAdW*, 1970.
[3] G. GRÄTZER, Two Mal'cev-Type Theorems in Universal Algebra, *Journal of Comb. Theory*, 8 (1970), 334–342.
[4] L. KLUKOVITS, Hamiltonian varieties of universal algebras, *Acta Sci. Math.*, **37** (1975), 11–15.
[5] W. TAYLOR, Characterizing Mal'cev conditions, *Algebra Univ.*, **3**, 3 (1973), 351–397.
[6] А. И. МАЛЬЦЕВ, К общей теории алгебраических систем, *Мат. Сборник*, **35** (77), (1954), 3–20.

ÜBER EIN LINEARES FLUCHTPROBLEM

Von

JORGE GONZÁLEZ GUZMÁN

(Eingegangen am 20. September 1974)

1. Wir untersuchen das Differentialspiel:

$$\dot{z} = Cz + v - u\,, \tag{1.1}$$

wobei $z \in \mathbf{R}^n$, C eine konstante $n \times n$-Matrix, $v \in Q$, $u \in P$, P und Q kompakte, konvexe Untermengen von $\mathbf{R}^n$ sind. Die Endmenge M ist ein Unterraum von $\mathbf{R}^n$ mit Dimension nicht größer als $n-2$, Sei ferner $L = M^{\perp}$ und $\pi : \mathbf{R}^n \to L$ die orthogonale Projektion. Wir betrachten das Spiel vom Standpunkt des Fliehenden aus. Hier ist v die Fluchtsteuerung und u die Verfolgungssteuerung. Das Spiel endet im Zeitpunkt $t > 0$, wenn $z(t) \in M$, oder, was gleichbedeutend ist, wenn $|\pi z(t)| = 0$. Wir fangen das Spiel im Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Anfangspunkt $z_0 \notin M$ an. Die Lösung der Gleichung (1.1) ist dann:

$$z(t) = e^{tC} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)C} \left(v(s) - u(s)\right) ds \tag{1.2}$$

wobei $u(t)$ und $v(t)$ meßbare Steuerungen sind. Wir definieren eine neue Hilfssteuerung $w(t)$ durch:

$$\int_0^t w(s)\, ds = \pi \int_0^t e^{(t-s)C} \left(v(s) - u(s)\right) ds\,.$$

Also durch Derivation erhält man:

$$\pi v(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} v(s)\, ds = w(t) + \pi u(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} u(s)\, ds \tag{1.3}$$

und aus (1.2) erhält man dann:

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)\,ds\,. \tag{1.4}$$

Die Methode, die wir anwenden werden, besteht darin, eine geeignete Hilfssteuerung $w(t)$ zu finden, so daß die Flucht gewährleistet wird, das heißt:

$$|\pi z(t)| = \left|\pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)ds\right| > 0\,, \quad \forall\, t \geq 0\,,$$

und eine geeignete Fluchtbedingung zu stellen, so daß bei jener $w(t)$ und bei beliebiger Steuerung $u(t)$ die Gleichung (1.3) nach $v(t) \in Q$ lösbar ist. Wir möchten hier noch bemerken, daß durch diese Methode die Stellung des Problems einer „optimalen" Flucht prinzipiell möglich ist; wir können ein Funktional $F(w)$ definieren über die Hilfssteuerungen $w(t)$ die die Flucht ermöglichen durch: $F(w) = \min_{t \geq 0} |\pi z(t)|$ und wir können nach einer Steuerung $w^*(t)$ fragen, die das $\max_w F(w)$ leistet.

2. Seien $\varepsilon, \vartheta > 0$ gegeben. Wir beweisen folgendes

LEMMA 2.1. – Es existiert eine stückweise konstante Funktion $w(t)$, definiert im Intervall $0 \leq t \leq \vartheta$, mit Werten im Raum L und mit $|w(t)| \leq \varepsilon$, $0 \leq t \leq \vartheta$, so daß:

$$\left|\pi e^{tC} z_0 + \int_0^t w(s)ds\right| > 0 \quad 0 \leq t \leq \vartheta\,.$$

BEWEIS. Falls $\pi e^{tC} z_0 \neq 0$, $0 \leq t \leq \vartheta$, braucht man nur $w(t) \equiv 0$ zu setzen. Nehmen wir also an, die Trajektorie $\pi e^{tC} z_0$ geht durch Null und sei τ_1 der erste Zeitpunkt, wo das geschieht: $\pi e^{\tau_1 C} z_0 = 0$, $0 < \tau_1 \leq \vartheta$. Wir bilden einen Kegel K_0 mit Null als Spitze, die Tangente an der Trajektorie im Nullpunkt als Achse und Winkel $\pi/2$. Während der Zeit, in der die Trajektorie innerhalb des Kegels bleibt, setzen wir $w(t) = \varepsilon_1$, wobei ε_1 ein Vektor mit Norm ε und normal zur Trajektorie im Nullpunkt ist. Auf diese Weise wird die Flucht in einem Intervall $[t_1, t_1 + \vartheta_1]$, $t_1 < \tau_1 \leq t_1 + \vartheta_1$ gewährleistet. Wenn $t_1 + \vartheta_1 \geq \vartheta$ ist, dann ist die Behauptung bewiesen. Sonst wiederholt man dieselbe Prozedur mit der modifizierten Trajektorie $\varphi(t) = \pi e^{tC} z_0 + \vartheta_1\ \varepsilon_1$ für die Zeit $t \geq t_1 + \vartheta_1$. So erhält man eine Folge von Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots t_m$;, $\tau_1, \ldots \tau_m$; und Zeitintervallen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_m$ mit den Beziehungen $t_n < \tau_n + \vartheta_n \leq t_{n+1}$, $n = 1, 2 \ldots m-1$. Es ist leicht zu sehen, daß $t_m + \vartheta_m \geq \vartheta$ fuer genügend großes m ist.

Es ist klar, daß dasselbe Lemma gültig ist, wenn man die Projektion π auf einem k-dimensionalen Unterraum W von L, $k \geq 2$, vornimmt.

3. Wir stellen folgende Fluchtbedingungen:

Es existiert ein k-dimensionaler Unterraum W von L und ein k-dimensionaler Unterraum W_0 von $\mathbf{R}^n$, $k \geq 2$, so daß:

(I) Die Projektion $\pi|_{W_0} : W_0 \to W$ ist umkehrbar. Wir bezeichnen durch $\pi' : W \to W_0$ die Inverse.

(II) Es gilt: $\mu \pi' \pi P \subset \operatorname{Int}(W_0 \cap Q)$, für eine Zahl $\mu > 1$. Unter diesen Voraussetzungen gilt folgendes

LEMMA 3.1. Es existieren $\varepsilon, \vartheta > 0$ und eine meßbare Funktion $v(t) \in \in Q \cap W_0$, so daß die Gleichung (1.3) erfüllt ist, für eine beliebige Steuerung $u(t) \in P$, für $|w(t)| \leq \varepsilon$ und im Intervall $0 \leq t \leq \vartheta$.

BEWEIS. Die Gleichung (1.3) wird im Raum W_0 in folgender Form gestellt:

$$v(t) + \int_0^t \pi' \pi C e^{(t-s)C} v(s)\, ds = \pi' f(t) \tag{3.1}$$

wobei

$$f(t) = w(t) + \pi u(t) + \int_0^t \pi C e^{(t-s)C} u(s)\, ds$$

ist. Mit Hilfe der Mikusinski Operatoren (siehe GAMKRELIDZE–CHARATISCHWILI [1]) bringt man die Gleichung (3.1) auf die Form:

$$(\hat{I} - K) * v = \pi' f \tag{3.2}$$

wobei $K(t) = -\pi' \pi C e^{tC}$ ist.

Die Inverse: $(\hat{I} - K)^{-1} = \hat{I} + K + K^2 + \ldots$ stellt eine ganze Matrix im Ring von Mikusinski dar, denn im Intervall $[0, \vartheta]$ gilt $\|K(t)\| \leq m_\vartheta < \infty$. Es gilt ferner die Abschätzung: (GAMKRELIDZE–CHARATISCHWILI [1])

$$\|K + K^2 + K^3 + \ldots\| \leq m_\vartheta e^{\vartheta m_\vartheta}. \tag{3.3}$$

Also man kann die Funktion $v(t)$ in der Form:

$$v = \pi' f + (K + K^2 + \ldots) * \pi' f = \pi' \pi u + R(\varepsilon, \vartheta) \tag{3.4}$$

ausdrücken, wobei:

$$R(\varepsilon, \vartheta) = \pi' w + \pi' \pi C e^{(\cdot)C} * u + (K + K^2 + \ldots) * \pi' f \tag{3.5}$$

ist, und es gilt folgende Abschätzung:

$$\|R(\varepsilon, \vartheta)\| \leq \varepsilon \|\pi'\| + \vartheta \|\pi' \pi C e^{(\cdot)C} u\| + \vartheta\, m_\vartheta\, e^{\vartheta m_\vartheta} \|\pi' f\|$$

das heißt:

$$\|R(\varepsilon, \vartheta)\| \leq \varepsilon K_2 + \vartheta K_2. \tag{3.6}$$

Man kann also ε und ϑ so klein wählen, daß $v(t) \in W_0 \cap Q$, $0 \leq t \leq \Theta$. ∎

Man kann also folgenden Satz stellen:

HAUPTSATZ. *Seien die Fluchtbedingungen* (I) *und* (II) *erfüllt. Dann hat das Fluchtproblem* (1.1) *eine Lösung.*

BEWEIS. Nach Lemma (3.1) kann man ε und ϑ finden, so daß die Gleichung (1.3) eine Lösung $v(t) \in Q$ für $0 \leq t \leq \vartheta$ und beliebige $u(t)$ und $w(t)$, $|w(t)| \leq \varepsilon$, besitzt. Nach Lemma (2.1) kann man $w(t)$, $|w(t)| \leq \varepsilon$, finden, so daß die Flucht im Intervall $0 \leq t \leq \vartheta$ gelingt. Man kann den Prozess wiederholen für Anfangspunkt $z(\vartheta)$ und Anfangszeit $t = \vartheta$. Somit wird die Flucht für $t \geq 0$ gewährleistet.

4. Das allgemeine Fluchtmanöver, das wir gestellt haben, kann wesentlich vereinfacht und verschärft werden, wenn man bestimmte Spezialfaelle betrachtet. Wir behandeln hier den Fall, wenn $C^2 = 0$ ist, also wenn die ungestörte Bewegung: $\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0$ gradlinig ist. (Das ist z.B. der Fall in dem bekannten Problem des „Krokodil und Kind").

Die Gleichung (1.4) wird in diesem Fall:

$$\pi z(t) = \pi z_0 + t \pi C z_0 + \int_0^t w(s)\, ds .$$

Sei $\delta = \varepsilon \vartheta$, wobei ε und ϑ durch Lemma (3.1) gegeben sind. Wir setzen $w(t) = 0$, solange die Entfernung des Punktes $\pi z(t)$ zum Nullpunkt größer ist als δ. (Man kann auch eine beliebige Steuerung $v(t)$ nehmen.) Wenn $|\pi z(t_1)| = \delta$, kann man eine geeignete Steuerung $w(t)$ die ganze Zeitspanne ϑ anwenden. Im Zeitpunkt $t_1 + \vartheta$ ist die Entfernung wieder größer oder gleich δ. Dieses Umgehungsmanöver kann beliebig oft wiederholt werden und man erhält folgende Abschätzung:

$$|\pi z(t)| \geq \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon \delta}{\sqrt{|\pi C z_0|^2 + \varepsilon^2}} \right\}$$

für alle $t_j\, 0 \leq t \leq \vartheta$.

Literatur

[1] GAMKRELIDZE—CHARATISCHWILI, Differentiale Fluchtspiele mit nichtlinearen Steuerungen, *Mat. Inst. A. B. Steklowa.*

ON THE CONNECTION BETWEEN THE CONCEPT OF A DERIVATIVE DEFINED ON THE DYADIC FIELD AND THE WALSH-FOURIER TRANSFORM

By

JENŐ PÁL

Department of Analysis No. 2, Eötvös Loránd University, Budapest

(Received October 2, 1974)

1. Introduction

Notion of the Walsh-Fourier transform developped with the aid of the characters of the additive group of the dyadic field was introduced by N. J. FINE [2], later R. B. CRITTENDEN [1] proved some theorems concerning the Walsh-Fourier transform. In this paper we continue our study, begun in [3]: we shall discuss the relation of the concept of a derivative introduced there and the Walsh-Fourier transform, we prove the analogue of characteristics concerning the concept of a derivative of the classic Fourier transform for the Walsh-Fourier transform. We shall see that the concept of a derivative introduced in [3] "fits" to the Walsh-Fourier transform. As a consequence of one of our theorems we get information concerning that how rapidly a Walsh-Fourier transform of a function tends to zero in the infinite, furthermore we give a derivative way of obtaining for Walsh-Fourier transforms of functions in $L^2(0, \infty)$. As this paper is continuing [3], we shall not enlist the essential notions and theorems to be used, we rely on the results of the mentioned paper.

2. Results concerning Walsh-Fourier transform of functions in $L(0, \infty)$

It was not possible to handle Walsh-Fourier transform with the aid of classical concept of a derivative, until now, but in case of the concept of a derivative introduced in [3] we shall be able to apply the characteristics of the classic Fourier transform connected with derivative to the Walsh-Fourier transform. In this section we are going to prove the analogue of the following theorems (cf. e.g. [4]). Proof of the following Theorem 2.1 occurs also in [5], for the sake of completeness we publish it here, too.

1° If function f is completely continuous, that is the integral function of its differential quotient existing almost everywhere, and $f, f' \in L(\mathbf{R})$, then

$$\mathcal{F}(f')(y) = iy\mathcal{F}(f)(y) \quad (y \in \mathbf{R}).$$

2° Let $f_1(x) := x f(x)\,(x\in\mathbf{R})$.
If $f,\ f_1\in L(\mathbf{R})$, then

$$\mathcal{F}(f_1)(y) = i\mathcal{F}(f)'(y)\,(y\in\mathbf{R}).$$

THEOREM 2.1. *If function $f\in L(0,\infty)$ is $D-L$ differentiable, then*

$$\mathcal{F}(D^{[1]}f)(y) = y\mathcal{F}(f)(y)\,(y\in[0,\infty)). \tag{2.1}$$

PROOF. By the definition of the derivative function we may write that

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\frac{1}{2}\sum_{j=-m}^{m}2^j[f-\tau_{2^{-(j+1)}}f]-D^{[1]}f\right\|_1 = 0. \tag{2.2}$$

Let us denote the m^{th} "difference quotient" function of function f by $d_m f$, that is let

$$d_m f := \frac{1}{2}\sum_{j=-m}^{m}2^j[f-\tau_{2^{-(j+1)}}f].$$

In this case (2.2) may be put in such a way that sequence of functions $d_m f\,(m\in\mathbf{N})$ in norm $\|\cdot\|_1$ converges to $D^{[1]}f$. Let us form the Walsh-Fourier transform of $d_m f$:

$$\mathcal{F}(d_m f)(y) = \frac{1}{2}\sum_{j=-m}^{m}2^j[\mathcal{F}(f)(y)-\psi_{2^{-(j+1)}}(y)\mathcal{F}(f)(y)] = \tag{2.3}$$

$$=\mathcal{F}(f)(y)\frac{1}{2}\sum_{j=-m}^{m}2^j[1-\psi_{2^{-(j+1)}}(y)] \equiv \mathcal{F}(f)(y)\,\sigma_m(y)\ \ (y\in[0,\infty),\ m\in\mathbf{N}).$$

Making use of the continuity of the Walsh-Fourier transform (cf. [3], (2.7)), by (2.2) we may write that

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{F}(d_m f)(y) = \mathcal{F}(D^{[1]}f)(y)\ \ (y\in[0,\infty)).$$

Since $\lim_{m\to\infty}\sigma_m(y) = y$ (cf. [3], (3.4)), considering (2.3), assertion

$$\mathcal{F}(D^{[1]}f)(y) = y\mathcal{F}(f)(y)\ \ (y\in[0,\infty))$$

follows, that was to be proved.

On the basis of the theorem just proved simply follow the forthcoming

COROLLARIES.

1° Making use of Theorem (2.1) we can prove by induction that if $f\in L(0,\infty)$ is r times $D-L$ differentiable, then

$$\mathcal{F}(D^{[r]}f)(y) = y^r\mathcal{F}(f)(y)\ \ (y\in[0,\infty)). \tag{2.4}$$

2° By the corollary worded in 1° we have got information: how rapidly $\mathcal{F}(f)(y)$ tends to 0 in case of $y\to\infty$.

As by (2.4)

$$|\mathcal{F}(f)(y)| = \frac{|\mathcal{F}(D^{[r]}f)(y)|}{y^r}$$

so — utilizing the Riemann-Lebesgue lemma (cf. [1]) — it follows that $\mathcal{F}(f)(y)$ tends to 0 more rapidly than $1/y^r$.

THEOREM 2.2. *Let* $f_1(x) := x \cdot f(x)$ $(x \in [0, \infty))$. *If* $f, f_1 \in L(0, \infty)$, *then* $\mathcal{F}(f) \in L^\infty(0, \infty)$ *is* $D-L^\infty$ *differentiable, and*

$$D^{[1]}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_1). \tag{2.5}$$

PROOF. Let us investigate the difference of $d_m\mathcal{F}(f)$ and $\mathcal{F}(f_1)$, that is, the expression

$$|d_m\mathcal{F}(f)(y) - \mathcal{F}(f_1)(y)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \sum_{j=-m}^{m} 2^j [\mathcal{F}(f)(y) - \mathcal{F}(f)(y \overset{\circ}{+} 2^{-(j+1)})] - \mathcal{F}(f_1)(y) \right|.$$

Replacing definitions of the transforms, we arrive at the result as follows

$$|d_m\mathcal{F}(f)(y) - \mathcal{F}(f_1)(y)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \sum_{j=-m}^{m} 2^j \left[\int_0^\infty f(x)\,\psi_y(x)\,dx - \int_0^\infty f(x)\,\psi_{y \overset{\circ}{+} 2^{-(j+1)}}(x)\,dx \right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty x f(x)\,\psi_y(x)\,dx \right| = \left| \int_0^\infty f(x)\,\psi_y(x)\,(\sigma_m(x) - x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^\infty x f(x)\,\psi_y(x) \left(\frac{1}{x}\sigma_m(x) - 1 \right) dx \right|,$$

where

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=-m}^{m} 2^j [1 - \psi_{2^{-(j+1)}}(x)] \quad \left(= \sum_{k=-m-1}^{m-1} x_k / 2^{k+1} \right).$$

Making use of Lebesgue's theorem and assertion

$$\lim_{m \to \infty} \sigma_m(x) = x \quad (x \in [0, \infty)),$$

from this it follows that

$$\lim_{m\to\infty}\left|d_m\mathcal{F}(f)(y)-\mathcal{F}(f_1)(y)\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\int_0^\infty x f(x)\psi_y(x)\left(\frac{1}{x}\sigma_m(x)-1\right)dx\right| \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty |xf(x)|\left|\frac{1}{x}\sigma_m(x)-1\right|dx = 0\,,$$

which was to be proved.

By induction it is easy to prove the following

COROLLARY. Let $f_k(x) := x^k f(x)$ $(x\in[0,\infty))$, moreover $f, f_1, \ldots, f_r\in L(0,\infty)$ for some $r\in\mathbf{N}$. Then $\mathcal{F}(f)$ is r times $D-L^\infty$ differentiable, and

$$D^{[k]}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

This is the dual of corollary 2° of Theorem 2.1: the more rapidly $\mathcal{F}(f)(y)$ tends to 0 in case of $y\to\infty$, its Walsh-Fourier transform is the more times $D-L^\infty$ differentiable.

3. Derivative obtaining of Walsh-Fourier transform of functions in $L^2(0,\infty)$

As an application of Theorem (4.2) in [3] concerning "differentiability of integral functions" the following theorem, concerning the way of obtaining of Walsh-Fourier transform of functions in $L^2(0,\infty)$ as derivatives, may be proved. The theorem is the analogue of the classic development (cf. e.g. [4])

$$\mathcal{F}(f)(y) = \frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ixy}-1}{-ix}dx\right\}.$$

THEOREM 3.1. *Let $f\in L^2(0,\infty)$ be an arbitrary function, for which $\mathcal{F}(f)(y) = 0\,(0\leq y<a)$. Then for the Walsh-Fourier transform of f*

$$\mathcal{F}(f)(x) = D_x^{[1]}\left(\int_a^\infty f(t)\frac{1}{t}\psi_x(t)\,dt\right) \tag{3.1}$$

in norm $\|\cdot\|_2$, where $D_x^{[1]}$ denotes the differentiation by x.

PROOF. Let us define function $W_{a,\Omega}$ in the following way

$$W_{a,\Omega}(x) := \begin{cases} W_a(x) & (0\leq x<\Omega) \\ 0 & (\Omega\leq x<\infty) \end{cases},$$

and form convolutions $W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f)$, $W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f)_\omega$, where

$$\mathcal{F}(f_\omega)(x) := \int_0^\omega f(t)\,\psi_x(t)\,dt\,.$$

Then

$$|(W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f))(x) - (W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f_\omega))(x) =$$
$$= |(W_{a,\Omega} * (\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_\omega))(x)| \le \|W_{a,\Omega}\|_2 \,\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_\omega)\|_2 \to 0 \quad (\omega \to \infty),$$

thus

$$(W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f))(x) = \lim_{\omega \to \infty} (W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f_\omega))(x) \tag{3.2}$$

for arbitrary number $x \in [0, \infty)$.

Let us transform the convolution $W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f_\omega)$ according to what follows:

$$(W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f_\omega))(x) = \int_0^\Omega W_{a,\Omega}(y)\,\mathcal{F}(f_\omega)(x \dot{+} y)\,dy =$$
$$= \int_0^\Omega W_{a,\Omega}(y) \left(\int_0^\omega f(t)\,\psi_{x \dot{+} y}(t)\,dt \right) dy =$$
$$= \int_0^\omega f(t) \left(\int_0^\Omega W_{a,\Omega}(y)\,\psi_t(x \dot{+} y)\,dy \right) dt =$$
$$= \int_0^\omega f(t)\,(W_{a,\Omega} * \psi_t)(x)\,dt\,.$$

Considering this — taking (3.2) into account — we get that

$$(W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f))(x) = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega f(t)\,(W_{a,\Omega} * \psi_t)(x)\,dt\,. \tag{3.3}$$

But

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega f(t)\,(W_{a,\Omega} * \psi_t)(x)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,(W_{a,\Omega} * \psi_t)(x)\,dt$$

again,

$$(W_{a,\Omega} * \psi_t)(x) = \int_0^\Omega W_{a,\Omega}(y)\,\psi_t(x \dot{+} y)\,dy =$$
$$= \psi_t(x) \int_0^\Omega W_{a,\Omega}(y)\,\psi_t(y)\,dy = \psi_t(x)\,\mathcal{F}W_{a,\Omega}(t)\,.$$

Replacing these into (3.3),

$$(W_{a,\Omega} * \mathcal{F}(f)(x) = \int_0^\infty f(t)\,\psi_t(x)\,\mathcal{F}W_{a,\Omega}(t)\,dt$$

follows.

As $\|W_{a,\Omega} - W_a\|_2 \to 0$ $(\Omega \to \infty)$, so because of the isometry property of the Walsh-Fourier transform $\|\mathcal{F}W_{a,\Omega} - \mathcal{F}W_a\|_2 \to 0$ $(\Omega \to \infty)$. Making use of this and the definition of $\mathcal{F}W_a$ we receive that

$$(W_a * \mathcal{F}(f))(x) = \int_a^\infty f(t)\,\frac{1}{t}\,\psi_x(t)\,dt\,,$$

and

$$D_x^{[1]}(W_a * \mathcal{F}(f))(x) = D_x^{[1]}\left(\int_a^\infty f(t)\,\frac{1}{t}\,\psi_x(t)\,dt\right)$$

respectively.

Applying Theorem 4.2 in [3] from this we reach equation (3.1) which was to be proved.

References

[1] CRITTENDEN, R. B., Walsh-Fourier transforms. *Applications of Walsh functions.* Proc. Symp. and Workshop, Naval Res. Lab., Washington D. C., 1970, 170 – 174.

[2] FINE, N. J., The generalized Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 66 – 77.

[3] PÁL J., On a concept of a derivative among functions defined on the dyadic field (to appear). in SIAM Journal of Math. Anal.)

[4] SZŐKEFALVI – NAGY B., *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions,* Oxford Univ. Press, 1965.

[5] BUTZER,, P. L., and WAGNER, H. J., A calculus for Walsh functions defined on $\mathbf{R}_+$ *Applications of Walsh Functions* (Proc. Sympos. Naval Res. Lab., Washington D. C., 18 – 20. April 1973; in print).

О ЧИСЛЕ КОНГРУЭНТНЫХ ШАРОВ, ЗАКРЫВАЮЩИХ ДАННЫЙ ШАР

Г. ЧОКА

Кафедра Начертательной и Проективной Геометрии Университета им Л. Этвеша Будапешт

К шестидесятилетию со дня рождения Л. Фейеша Тота

(Поступило 9. 10. 1974)

Пусть $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n - n+1$ шаров, не имеющих, общих внутренних точек. Говорят, что шары $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ образуют облако для шара $\mathbf{K}_0$, если полупрямые, исходящие из центра $\mathbf{O}$ шара $\mathbf{K}_0$, имеют общую точку одним из других шаров.

Х. ХОРНИХ поставил вопрос, сколько будет $\mathbf{N} = \text{мин}\,(n)$? Л. ФЕЙЕШ ТОТ [1] доказал, что в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$, если шары конгруэнтны, $\mathbf{N} \geqq 19$. Позже А. ХЕППЕШ показал [2], что $\mathbf{N} \geqq 24$. Л. ДАНЗЕР конструировал [3] облако для шара $\mathbf{K}_0$ из 42 конгруэнтных им шаров, т. е. он показал, что $\mathbf{N} \leqq 42$.

В этой статье мы изучаем проблему в гиперболическом пространстве кривизны-$\varkappa$. В теореме мы даем оценку для числа шаров в том случае, когда $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ конгруэнтные шары радиусом R, потом мы улучшим этот результат рекурсивным методом. Функция $\mathbf{N}(R)$ находится в таблице на конце стати.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathbf{K}_0\, \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ *конгруэнтные шары в гиперболическом пространстве* $\mathbf{H}^3$ *радиусом* R, *не имеющих общих внутренних точек, далее шары* $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_n$ *образуют облако для шара* $\mathbf{K}_0$. *Для числа* $\mathbf{N}(R) = \text{мин}\,(n)$ *имеют места оценки с снизу.*

$$\mathbf{N} \geqq \left[\frac{2 - n_0(1-\cos\alpha_0)}{1-\cos\alpha_1} + n_0\right] + 1,$$

где

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa}R}{\operatorname{sh} 2\sqrt{\varkappa}R}, \quad a$$

$$n_0 = \left[\frac{4\pi}{2\pi - 12\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\alpha_1+\alpha_0)\right]}\right] + 1 \quad \text{и}$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} \sqrt{\varkappa} R}{\operatorname{sh}\left(\operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{\varkappa} R}{\operatorname{ch} \sqrt{\varkappa} R} + 2 \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{th} \sqrt{\varkappa} R\right)}.$$

Сперва мы вводим несколько обозначений и доказываем три леммы.

С проектируем шар $\mathbf{K}_i$ — из центра шара $\mathbf{K}_0$ на сферу $\mathbf{K}_0$ и обозначим полученный сферический круг через $\mathbf{C}_i$ и его радиус через ϱ_i. Очевидно, если шары $\mathbf{K}_i (i = 1, \ldots, n)$ радиусом R образуют облако для шара $\mathbf{K}_0$ радиусом R, то сферические круги $\mathbf{C}_i$ покрывают сферу $\mathbf{K}_0$. Очевидно, что $\varrho_i \leqq \alpha_1$, где

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\varkappa} R}{\operatorname{sh} 2\sqrt{\varkappa} R},$$

и имеет место равенство $\varrho_i = \alpha_1$, если $\mathbf{K}_i$ касается $\mathbf{K}_0$.

ЛЕММА 1. *Пусть t — прямая, далее три шара радиусом R и центром $\mathbf{O}_i (i = 1, 2, 3)$, не имеющих общих внутренних точек. А*

$$\tau(R) = \text{мин}\{\text{макс}(\mathbf{O}_1'\mathbf{O}_2', \mathbf{O}_1'\mathbf{O}_3', \mathbf{O}_2'\mathbf{O}_3')\},$$

где $\mathbf{O}_i'$ — перпендикулярная проекция точек $\mathbf{O}_i$ на t. Если прямая касается, или вполне пробадает три шара, то

$$\tau(R) = 2 \operatorname{Arsh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{th} \sqrt{\varkappa} R\right).$$

Это достигается, если два шара в том же точке касаются прямой, а третий касается прамой и других шаров.

Доказательство леммы 1 находится в [4[.

ЛЕММА 2. *Если три сферических круга, определяющихся по центральной проекции трех шаров на средней сфере $\mathbf{K}_0$, — имеют общую точку то радиус наименьшего круга не дольше, чем α_0.*

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} \sqrt{\varkappa} R}{\operatorname{sh}\left(\operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{\varkappa} R}{\operatorname{ch} \sqrt{\varkappa} R} + 2 \operatorname{Arsh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{th} \sqrt{\varkappa} R\right)\right)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{K}_0$ — средний шар и $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ — три шара из облака такие, что их проекции $\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ на сфере $\mathbf{K}_0$ имеют общую точку. Далее мы предположим, что $\mathbf{O}_0\mathbf{O}_1 \leqq \mathbf{O}_0\mathbf{O}_2 \leqq \mathbf{O}_0\mathbf{O}_3$, — где $\mathbf{O}_i$ — центр шара $\mathbf{K}_i (i = 1, 2, 3, 0)$. Обозначим через $\mathbf{O}_i''$ централные проекции центров $\mathbf{O}_i$ на сфере $\mathbf{K}_0$, а перпендикулярные проекции центров $\mathbf{O}_i$ на прямую $\mathbf{OP}$ через $\mathbf{O}_i' (i = 1, 2, 3)$ (рис. 1).

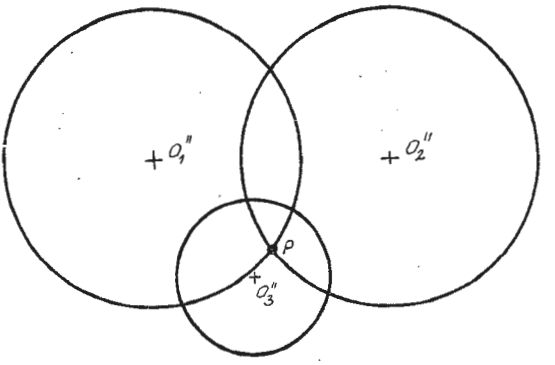


Рис. 1.

Так как полупрямая **OP** касается или вполне пробадает шаров $\mathbf{K}_i$, из леммы 1 следует, что $\mathbf{O}_1'\mathbf{O}_2' \geqq \tau(r)$ (рис. 2). Далее

$$\mathbf{OO}_1' \geqq \operatorname{Arch} \frac{\operatorname{ch} 2\sqrt{\varkappa}R}{\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa}R},$$

поэтому $\mathbf{OO}_3' \geqq \mathbf{OO}_1' + \tau(n)$, т. е. $(\mathbf{O}_3\mathbf{OO}_3') \preccurlyeq \leqq \alpha_0$.

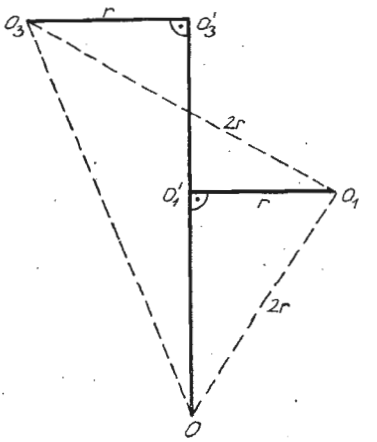


Рис. 2.

ЛЕММА 3. *Если* $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ *образуют облако для шара* $\mathbf{K}_0$, *то число* n_0 *сферических кругов* $\mathbf{C}_i$, *у которых радиус* $\varrho_i \leqq \alpha_0$, *по крайней мере*

$$\left[\frac{4\pi}{2\pi - 12\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\alpha_1+\alpha_0)\right]}\right] + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Сперва мы даем полигоналное разделение средней сферы $\mathbf{K}_0$, которое и дальше мы используем. Рассмотрим облако и допустим, что все шары необходимые, т. е. все сферические круги $\mathbf{C}_i$ имеют такую внутренную точку, которую только из шаров обака закрывает. Смотрим тот выпуклый многогранник, который определяется несущими плоскостами сферических окружностей. Число граней этого многогранника равен числу шаров облака. Централные проекции ребер этого многогранника на сферу $\mathbf{K}_0$ дают полигоналное разделение сферы $\mathbf{K}_0$ на сферические полигоны.

Все полигоны находятся внутры соответствующего сферического круга. Так как все точки сферы $\mathbf{K}_0$ находятся в каком-нибудь полигоне, радиус описанного круга которого $\leqq \alpha_1$, расстояние любой точки сферы от одной из вершин сферических полигонов меньше чем α_1. Площадь k-угольника в сферическим круге $\mathbf{A}_R(\alpha)$ радиусом α, обозначим через $\mathbf{A}_R(k, \alpha)$. Известно, что $\mathbf{A}_R(k, \alpha)$ максимальна, если полигон правилен. В этом случае

$$(1) \qquad \mathbf{A}_R(k,\alpha) = \frac{1}{\varkappa} \operatorname{sh}^2 \sqrt{\varkappa}\, R \left[2\pi - 2k \operatorname{arctg}\left(\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{k}\right)\right].$$

Эта функция строго возвращающая выпуклая (снизу) по k, поэтому можно исползовать неравенство ЙЕНСЕНА. Если $\bar{k}$ обозначит среднюю величину числа сторон планигонов, вписанных в сферический круг радисом α, тогда средняя площадь этих сферических полигонов меньше чем $\mathbf{A}_R(\bar{k}, \alpha)$ А из гюбой вершины выходят не меньше чем три стороны, по формулам Эйлера $\bar{k} \leqq 6 - \dfrac{12}{n} < 6$.

Но любая вершина покрывается тремя сферическими кругами, по этому вершины покрываются и одном маленьким сферическим кругом. Из этого следует, что сферические круги радиусом $\varrho = (\alpha_0 + \alpha_1)$, концентрические маленькими сферическими кругами, покывают сферу $\mathbf{K}_0$. Вместо площади сферических кругов нам достаточно принимать в внимание только верхную оценку области полигонов полигонного разделения. Частное площадей сферы и этого $\mathbf{A}_R(6, \alpha_0 + \alpha_1)$ дает нижную оценку для числа n_0 маленьких сферических кругов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. По лемме 3 мы знаем, что по крайней мере n_0 маленьких сферических кругов ($\varrho \leqq \alpha_0$) находится в покрытии, а радиус других сферических кругов $\leqq \alpha_1$. Если мы вычитаем из площади сферы $\mathbf{K}_0$ области маленьких сферических кругов и мы ее отделим площадей сферических кругов радиусом α_1 — мы получим нижную оценку для числа тех сферических кругов, которые еще участвуют в покрытии. Нижную оценку для числа шаров облака дает формула, находящаяся в теореме.

Таким образом теорема доказана.

Полученная нижная оценка груба, ведь не возможно делать покрытие на сфере только касательными сферическими кругами.

Увеличим сферические круги покрытия следующем способом: обменяем сферические круги, радиус которых менше чем α_0 — сферическими кругами радиусом α_0, а большие круги сферическими кругами радиусом α_1. Эта система тоже является покрытием сферы и проекции всех вершин находятся тоже в маленьких сферических кругах.

Пусть число маленьких и больших сферических кругов: u и v, число вершин и сторон в волигонном разделение: c и e соответственно. Можем допустить, что из любой вершины выходят три стороны, так

$$3c = 2e \text{ и по формулам Эйлера } (u+v+c = e+2), \tag{2}$$
$$2e = 6(u+v)-2.$$

Обозначим через k_u и k_v среднее число сторон полигонов, вписанных в маленьких или больших сферических кругов. Тогда

$$2e = u \cdot k_u + v \cdot k_v. \tag{3}$$

Рассмотрим два случая:

(a) Если $k_u \geqq 6$, то из (2) и (3),

$$k_v \leqq \frac{6v-2}{v} \text{ и } A_R(k_u, \alpha_0) < A_R(\alpha_0).$$

Пусть $u = n_0$ и $v = (N - n_0)$, по теоремы

$$u \cdot A_R(\alpha_0) + v \cdot A_R\left(\frac{6v-2}{v}, \alpha_1\right) < \frac{1}{\varkappa} 4\pi \operatorname{sh}^2 \sqrt{\varkappa} R. \tag{4}$$

Проведем расчет при $u = n_0$, $v = [(\mathbf{N}+j) - n_0]$ $j = 1, 2, 3, \ldots$, если выполняется неравенство (4). Обозначним наиболшее число $\mathbf{N}+j$ через $\mathbf{N}_{\max}(R)$. Так в случае (a) число шаров облака по крайней мере $\mathbf{N}_{\max}(R)+1$.

($б$) Если $k_u < 6$, то $A_R(k_u, \alpha_0) < A_R(6, \alpha_0)$ и

$$u \cdot A_R(6\alpha_0) + v \cdot A_R(k_v, \alpha_1) < \frac{1}{-\varkappa} 4\pi \operatorname{sh}^2 \sqrt{\varkappa} R. \tag{5}$$

Так как все вершины разделении находятся в маленьком сферическом круге: $u \cdot k_u \geq C$. Используя (2) и (3), получим $k_v \leqq \frac{12u}{v}$. В дальнейшем циклически повторяются вычисления: Пусть $u = n_0$, $v = \mathbf{N}_{\max}(R) - n_0$ и посмотрим, неравенство (5) исполняется, или нет.

Если нет, тогда пусть $u = n_0$

$$v = (\mathbf{N}_{\max}(R) - j) - n_0, \quad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

тогда наиболшее число $(\mathbf{N}_{\max}(R) - j) = \mathbf{N}^1_{\max}(R)$, для которого уже неравенство (5) выполняется, дает решение.

Если выполняется (5), тогда пусть $\mathbf{N}^1_{\max}(R) = \mathbf{N}_{\max}(R)$. В виду того, что u и k_v возрастают вместе, надо вычислить цикл в случаях $u = n_0 + i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, f)$ $v = \mathbf{N}^1_{\max}(R) - u$, где мы обозначили через f, то число, у которого неравенство

$$(n_0 + f)\, A_R(6, \alpha_0) + \left(\mathbf{N}^1_{\max}(R) - n_0 - f\right) A_R(\alpha_1) < \frac{1}{-\varkappa}\, 4\pi \operatorname{sh}^2 \sqrt{\varkappa}\, R\,,$$

выполняется первый раз.

Каждый из расчетов $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ дает одну оценку для числа шаров облака. Самое маленькое из этих чисел подствалено в таблице, выражающей полученные нами оценки:

Таблица

$\sqrt{\varkappa}\,R$	n	$N(R)-1$	$\sqrt{\varkappa}\,R$	n	$N(R)-1$	$\sqrt{\varkappa}\,R$	n	$N(R)-1$
0 – 0,1	7	23	0,65	13	39	0,89	20	56
0,11 – 0,16	8	24	0,66 – 0,67	14	40	o,9	21	57
0,17 – 0,25	8	25	0,68 – 0,69	14	41	0,91 – 0,92	21	58
0,26 – 0,29	8	26	0,7	15	42	0,93 – 0,94	22	60
0,3 – 0,34	9	27	0,71 – 0,73	15	43	0,95	22	61
0,35 – 0,39	9	28	0,74 – 0,75	16	45	0,96 – 0,97	23	63
0,4 – 0,41	10	29	0,76 – 0,77	16	46	0,98	24	65
0,42 – 0,45	10	30	0,78	17	47	0,99	24	66
0,46 – 0,47	10	31	0,79 – 0,8	17	48	1	25	67
0,48 – 0,5	11	32	0,81 – 0,82	18	50	1,01	25	68
0,51 – 0,54	11	33	0,83	18	51	1,02	25	69
0,55 – 0,59	12	35	0,84 – 0,85	19	52	1,03	26	70
0,6	12	36	0,86	19	53	1,04	26	71
0,61 – 0,62	13	37	0,87	20	54	1,05 – 1,06	37	73
0,63 – 0,64	13	38	0,88	20	55	1,07	28	75

Дитература

[1] Fejes-Tóth, L., Verdeckung einer Kugel durch Kugeln, *Publ. Math.*, **6** (1959) 234 – 40.

[2] Heppes, A., On the number of spheres wich can hide a given sphere, *Can. J. Math.* **19** (1967), 413 – 18.

[3] Danzer, L., Drei Beispiele zu Lagerungsproblemen, *Arch. Math.*, **11** (1960), 159 – 65.

[4] Чока, Г., О плотнейшей упаковки шаров в цилнграх гиперьолического пространства, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **18** (1975), 60 – 67.

О ПЛОТНЕЙШЕЙ УПАКОВКЕ ШАРОВ В ЦИЛИНДРАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Г. ЧСКА

Кафедра Начертательной и Проективной Геометрий Университета им. Л. Этвеша, Будапешт

(Поступило 9. 10. 1974)

На соревновании по математике им. Миклоша Швейзера в 1962-ом году Л. ФЕЙЕШ ТОТ и А. ХЕППЕШ наметили следующую задачу: „Доказываем, что отрезок h умеет вполне прободать или касаться по крайней мере $2\left[\frac{h}{\sqrt{2}}\right]+2$ единичных шаров, не имеюших общих внутренних точек".

Утверждение этой задачи в евклидовом пространстве можно составить по следуюшем способе: Число единичных шаров, не имеюших общих внутренних точек и лежаших в цилиндре радиусом 2 и высотой $h > 2$ по крайней мере $2\left[\frac{h-2}{\sqrt{2}}\right]+2$.

В n-мерном ($n \geqq 3$) евклидовом пространстве Е. ХОРВАТ [1] дал верхную оценку для числа единичных шаров, лежаших в цилиндре радиусом r ($1 \leqq r \leqq 2$) и высотой $h \geqq 2$ и решил плотнейшую упаковку единичными шарами в бесконечном цилиндре радиусом r. Он показал, что максимальное число шаров и положение их центров в случае плотнейшей упаковки независима от размера пространства.

В этой статье мы рассмотрим аналогичную проблему в n-мерных гиперболических пространствах ($n \geqq 3$).

Данна в пространстве прямая „t". Множество тех точек, расстояние которых от t не больше чем $2r$, называем бесконечным цилиндром радиусом $2r$ и осей t, и обозначим через $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r)$. Если в две точки оси t, расстояние которых h, мы расположим плоскости, перпендикулярные на t, тогда часть цилиндра, ограничена этими плоскостами, обозначим через $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r, h)$.

В этой статье мы решим максимальное число шаров $\mathbf{K}^n(r)$, которые можно расположить в $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r, h)$, далее решим плотнейшую упаковку шарами $\mathbf{K}^n(r)$ в цилиндре $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r)$.

Определяем плотность $\delta_n(r)$ шаров $\mathbf{K}^n(r)$ в $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r)$ Пусть $\boldsymbol{A}$ — любая точка, фиксированная на оси цилиндра $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r)$ и $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r, h)$ — такой n-мерный цилиндр, симметрическая точка которого будет точкой $\boldsymbol{A}$ его обьем $V(h, 2r)$.

$$\delta_n(r) = \overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{N_{2h}\cdot \mathbf{K}^n(r)}{V(h, 2r)},$$

где N_h является числом шаров в $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r, h)$ и $\mathbf{K}^n(r)$ объемом n-мерного шара радиусом r.

Легко доказывать [2], что $\delta_n(r)$ независим от выбора точки $\boldsymbol{A}$, так как в цилиндре данной конечной высотой можно расположить только шары конечного числа. Мы доказываем следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *В n-мерном ($n \geqq 3$) гипеболическом пространстве кривизны $\varkappa$ число шаров $\mathbf{K}^n(r)$, не имеюших обших внутренних точек и располагающихся в цилиндре $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r, h)$ по крайней мере*

$$\left[\frac{h - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arcsin(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r)}{2\,\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r\right)}\right] + 2$$

где $h \geqq \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\cdot \arcsin \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r$.

ТЕОРЕМА 2. *В n-мерном ($n \geqq 3$) гиперболическом и евклидовом пространстве плотность плотнейшей упаковки цилиндра $\boldsymbol{Z}^n(t, 2r)$ шарами $\mathbf{K}^n(r)$ по крайней мере*

$$\delta_n(r) = \frac{\mathbf{K}^n(r)\cdot 2}{V\left(2r, \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r\right)\right)}.$$

Это достигается, если шаров составляют пары, которые касаются t в том же точке, а шары этой пары тоже касаются прежпой пары.

Для доказательства теоремы 1 необходимая

ЛЕММА. *Пусть t — прямая гиперболического пространства далее 3 шара радиусом r и цептром $\mathbf{O}_i$ ($i = 1, 2, 3$), не имеюших обших внутренних точек.*

$$\tau(r) = \min\{\max(O_1'O_2',\ O_1'O_3',\ O_2'O_3')\} \tag{1}$$

где $\mathbf{O}_i'$ — перпендикулярная проекция точек $\mathbf{O}_i$ на t. Если прямая касается или вполне пробадает три шара, то $-\varkappa$ ставим вместо $\varkappa$

$$\tau(r) = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\operatorname{Arsh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\, r\right),$$

Это достигается, если два шара в том же точке касаются прямой, а третий касается прямой и других шаров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ: Рассмотрим прямую t, шары $\mathbf{K}_i$ и их центров $\mathbf{O}_i (i = 1, 2,)$ — очевидно, что существует связь между отрезком $\mathbf{O}_1' \mathbf{O}_2' = 2x$ и углом полуплоскостей $[\mathbf{O}_1, t]$ и $[\mathbf{O}_2, t]$, если шары $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ касаются (рис. 1. и 2.).

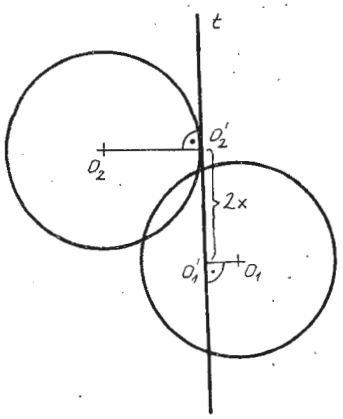


Рис. 1.

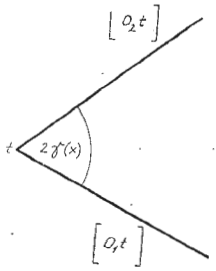


Рис. 2.

Обозначим через $2\gamma(x)$ угол между полуплоскостями $[\mathbf{O}_1, t]$ и $[\mathbf{O}_2, t]$. Пусть x_0 отрезка у которой $\gamma(x_0) = 45°$. Легко видеть что при $x < x_0$ если прямая t пересекается шарами, тогда можно удалить от t в направлении $\mathbf{O}_i \mathbf{O}_i'$. Принимая этот и дальнейшие факты во внимание видно, что когда мы ищем функцию $\tau(r)$ — достаточно смотреть только шары, касающиеся оси.

Если $x = 0$, тогда $\gamma(x) = 90°$, а если x возрашается, то $\gamma(x)$ уменьшается. Покажем, что $\gamma\left(\frac{\tau(r)}{2}\right) = 45°$ т. е. $2x_0 = \tau(r)$ — в этом случае $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_3$ касают в том же точке прямой t, а $\mathbf{K}_2$ касается их и t. Покажем, что это наилучшее рассположение трех шара, потому что фиксируя $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ так, что $\mathbf{O}_1' \mathbf{O}_2' < 2x_0$ — отрезку $\mathbf{O}_1' \mathbf{O}_2'$ другой шар $\mathbf{K}_3$ не умеет касаться.

Рассмотрим плоскость S, перпендикулярную и делающую по полам отрезок $\mathbf{O}_1' \mathbf{O}_2'$. Утверждаем, что

$$\gamma\left(\frac{\mathbf{O}_1' \mathbf{O}_3'}{2}\right) + \gamma\left(\frac{\mathbf{O}_2' \mathbf{O}_3'}{2}\right) > 135°,$$

если $\mathbf{O}_3' \neq \mathbf{O}_1'$ и $\mathbf{O}_3' \neq \mathbf{O}_2'$. Если расстояние $\mathbf{O}_1'\mathbf{O}_3' = x_0 + y$, тогда расстояние $\mathbf{O}_3'\mathbf{O}_2' = x_0 - y$, поэтому если функция $\gamma(x)$ в интервалле (O, x_0) вогнутая (внизу), тогда

$$\gamma\left(\frac{x_0}{2}+y\right)+\gamma\left(\frac{x_0}{2}-y\right) > 2\gamma\left(\frac{x_0}{2}\right) > 135^\circ$$

(рис. 3. и 4.).

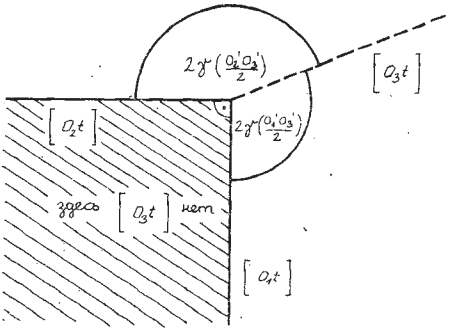


Рис. 3.

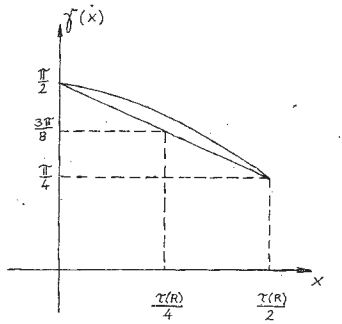


Рис. 4.

Это мы покажем следующим способон: Плоскость S пересекает из шара $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ конгруентные круга k_1 и k_2 (рис. 5.). Если $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ касаются, тогда и круги k_1 и k_2 касаются (рис. 6.). Касательные отрезки,

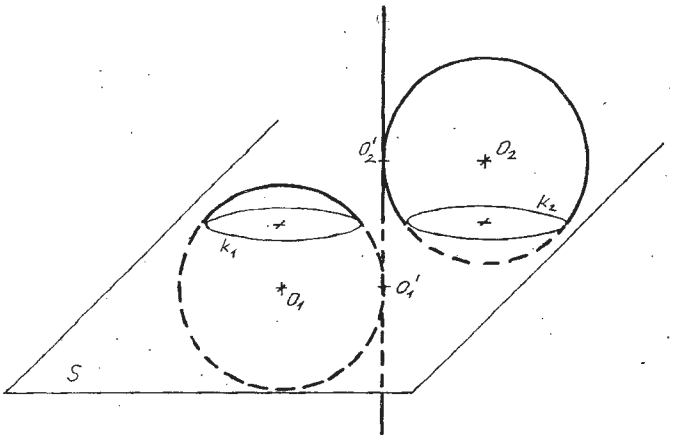


Рис. 5.

исходящие из точки **F**, равны, т. е. $\mathbf{FO}_1' = \mathbf{FN}_1 = \mathbf{FO}_2' = \mathbf{FN}_2$. На основании 7—8-ой рисунок

$$\cos\gamma(x) = \frac{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\,x}{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\,\mathbf{FC}}.$$

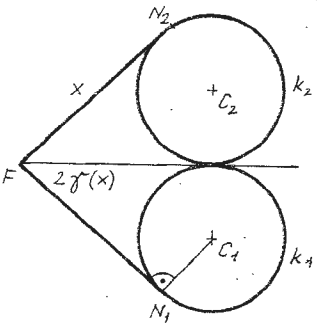


Рис. 6.

В четвероугольнике $\mathbf{OO'FC}$: $\sin\delta = \cos(90° - \delta)$, так

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa}\,r}{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa}\,\mathbf{OF}} = \frac{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\,\mathbf{FC}}{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\,\mathbf{OF}}, \quad \text{и} \quad \cos\gamma(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa}\,x}{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\,r}.$$

Но так

$$\gamma'(x) = -\frac{1}{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\,r} \cdot \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa}\,x}{\sin\gamma(x)} > 0,$$

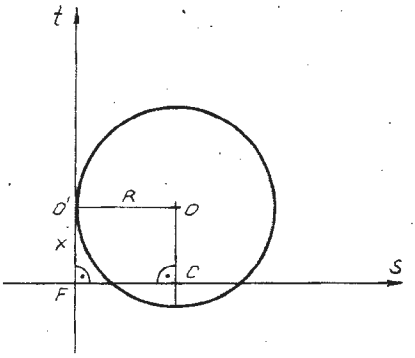


Рис. 7.

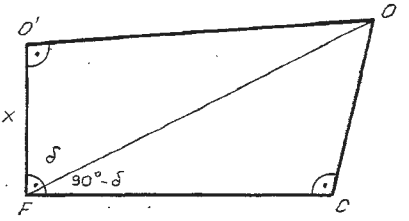


Рис. 8.

$$\gamma''(x) = -\frac{1}{\operatorname{th}\sqrt{\varkappa}\, r} \cdot \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa}\, x \cdot \sin\gamma(x) - \operatorname{ch}\sqrt{\varkappa}\, x \cdot \cos\gamma(x) \cdot \gamma'(x)}{\sin^2\gamma(x)} < 0.$$

В гиперболическом и евклидовом пространстве функция $\gamma(x)$ вогнутая (внизу). Таким образом лемма доказана, $2x_0 = \tau(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. геометрическое значение функции $d(r)$ видно на 9-ой рисунке.

Сперва мы докажем теорему вслучае $n = 3$, а потом $n > 3$.

Пусть $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_m$ шары в цилиндре $\mathbf{Z}^n(t, 2r, h)$, а $\mathbf{O}'_1, \mathbf{O}'_2, \ldots, \mathbf{O}'_m$ – перпендикулярная проекция их центров на оси t. Очевидно, что можно обозначить шары так, что $\mathbf{O}'_{i+1}$ находится на отрезке $\mathbf{O}'_i\,\mathbf{O}'_{i+2}$. Точки $\mathbf{O}'_1, \ldots, \mathbf{O}'_m$ расположены на отрезке длинности $h - 2d(r) > 0$.

(а) $n = 3$. По лемме $\mathbf{O}'_i\,\mathbf{O}'_{i+2} \cong \tau(r)$, и $m \leqq 2\left[\dfrac{h-2d(r)}{\tau(r)}\right] + 2$.

(б) $n > 3$. Покажем, что $\mathbf{O}'_i\,\mathbf{O}'_{i+2} \cong \tau(r)$, где равенство тогда и только тогда, когда t и центры $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}\,\mathbf{O}_{i+2}$ расположены в 3-мерном подпространстве.

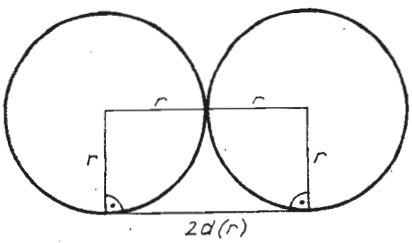


Рис. 9.

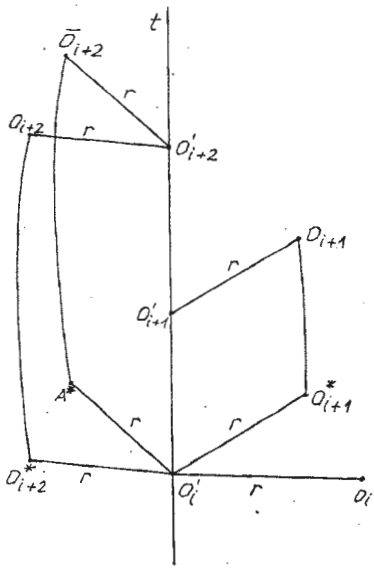


Рис. 10.

Поставим, что t и центры $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}$, и $\mathbf{O}_{i+2}$ не находятся в 3-мерном подпространстве, тогда существует 4-мерное подпространство, в котором находятся t и центры $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}, \mathbf{O}_{i+2}$. Легко видеть, что можно поставить, что шары $\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{i+1}, \mathbf{K}_{i+2}$ касают t.

Носим точки $\mathbf{O}_{i+1}$ и $\mathbf{O}_{i+2}$ на полуплоскости $[\mathbf{O}_{i+1}, t]$ или $[\mathbf{O}_{i+2}, t]$ вдоль эквидистанта, принадлежающего к оси t, в 3-мерное подпрост-

ранство Π — которое перпендикулярное на оси t в точке $\mathbf{O}_i'$. Обозначим эти точки через $\mathbf{O}_{i+1}^*$ и $\mathbf{O}_{i+2}^*$ (рис. 10.).

Очевидно, что точки $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}^*, \mathbf{O}_{i+2}^*$ находятся на 2-мерной сфере центром $\mathbf{O}_i'$ и радиусом r и они не находятся на одной большой окружности. На этой сфере сушествует точка $\mathbf{A}^*$, которая находится на плоскости $[O_i' O_i O_{i+1}^*]$ и

$$\mathbf{A}^* \mathbf{O}_i \cong \mathbf{O}_{i+2}^* \mathbf{O}_i\,, \qquad \mathbf{A}^* \mathbf{O}_{i+1}^* \cong \mathbf{O}_{i+2}^* \mathbf{O}_{i+1}^* \tag{2}$$

выполняются и равенство в обоих неравенствах только тогда, если $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}^*$ и $\mathbf{O}_{i+2}^*$ на большой окружности, т. е. $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}, \mathbf{O}_{i+2}$ и t в 3-мерном подпространстве.

Рассмотрим САККЕРИ-четверехугольник $\mathbf{O}_{i+2}' \mathbf{O}_i' \mathbf{O}_{i+2}^* \mathbf{O}_{i+2}$ и расположим на плоскости $[\mathbf{A}^* t]$ так, что

$$\mathbf{O}_{i+2}' \mathbf{O}_i' \mathbf{O}_{i+2}^* \mathbf{O}_{i+2} \square \cong \mathbf{O}_{i+2}' \mathbf{O}_i' \mathbf{A}^* \overline{\mathbf{O}}_{i+2} \square .$$

Из неравенств (2) следует, что

$$\overline{\mathbf{O}}_{i+2} \mathbf{O}_i \cong \mathbf{O}_{i+2} \mathbf{O}_i \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{O}}_{i+2} \mathbf{O}_{i+1} = \mathbf{O}_{i+2} \mathbf{O}_{i+1}\,,$$

т. е. шар, центром $\overline{\mathbf{O}}_{i+2}$ и радиусом r не имеет общих внутренних точек шарами $\mathbf{K}_i$ и $\mathbf{K}_{i+1}$, далее центры $\mathbf{O}_i, \mathbf{O}_{i+1}, \overline{\mathbf{O}}_{i+2}$ и t находятся в одном 3-мерном подпространстве. Поэтому

$$\mathbf{O}_{i+2}' \mathbf{O}_i' = \overline{\mathbf{O}}_{i+2}' \mathbf{O}_i' \cong \tau(r)\,.$$

Таким образом теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Эта теорема является следствием первой теоремы.

Литература

[1] ХОРВАТ, Е., О плотнейшей упаковки n-мерного цилиндра единичными шарами, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math. **15** (1972), 139–143.

[2] ФЕЙЕШ ТОТ, Л., *Расположение на плоскости, на сфере и в просмранстве*, Москва, 1958.

MAXIMUM OF NUMBER-THEORETICAL FUNCTIONS IN SHORT INTERVALS

By

I. KÁTAI

Department for Numerical Mathematic of the L. Eötvös University, Budapest

(Received October 10, 1974)

1. Let $c, c_1, c_2, \ldots$ denote suitable positive constants, $p, p_1, p_2, \ldots$ denote prime numbers.

It is a well known fact that a large set of additive functions has a limit-distribution. This is guaranted by the theorem of Erdős–Kac, which states the following assertion. An additive function $g(n)$ has a limit-distribution function if and only if the three series'

$$\sum_{|g(p)|\leq 1} \frac{g(p)}{p}, \qquad \sum_{|g(p)|\leq 1} \frac{g^2(p)}{p}, \qquad \sum_{|g(p)|>1} \frac{1}{p}$$

converge. As it is easy to see, the convergence of these series is a sufficient condition to the existence of the limit distribution for

$$f_k(n) = \max_{j=1,\ldots,k} g(n+j), \tag{1.1}$$

if k is an arbitrary but fixed integer.

Now we shall consider (1.1) as a function of k.

Assuming that $g(n)$ is non-negative and $g(p^\alpha) \geq g(p^{\alpha-1})$ for every prime power p^α, we can deduce immediately that

$$f_k(n) \geq f_k(0) \tag{1.2}$$

holds for every n and $k \geq 0$.

Indeed, let

$$f_k(0) = g(h), \quad 1 \leq h \leq k.$$

Observing that h is a divisor of $n+j$ for at least one j in $j \in [1, k]$, we get

$$f_k(n) = \max_{j=1,\ldots,k} g(n+j) \geq g(h) = f_k(0).$$

It seems to be probable that

$$f_k(n) \leq (1+\eta) f_k(0)$$

for every $\eta > 0$, every large k and for almost all n.

In this paper we shall prove such theorems for two special cases.

2. Let $\Omega(n)$ and $\omega(n)$ defined as the number of all prime factors or distinct prime factors of n, i.e. for n having the prime decomposition

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

let $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$, $\omega(n) = r$.

Let $\Delta(n) = \Omega(n) - \omega(n)$.

Let

$$f_k(n) = \max_{j=1,\dots,k} \Delta(n+j). \tag{2.1}$$

From (1.2) we get

$$f_k(n) \geq \left[\frac{\log k}{\log 2}\right] - 1. \tag{2.2}$$

We see that (2.2) is a quite good estimation in the following sense.

THEOREM 1. *Let T be an arbitrary positive number, c be a suitable positive absolute constant. Let $\alpha > \log 2$ be an arbitrary but fixed number.*

Let $M(x)$ denote the number of those integers $n \leq x$, for which there is a $k \geq T$ so that the inequality

$$f_k(n) \leq \frac{\log k}{\log 2} + \alpha \log\log k + c \tag{2.3}$$

does not hold. Then

$$M(x) < c_1 x (\log T)^{1-\alpha/\log 2},$$

c_1 depends only on α and c.

PROOF. Let K denote squarefull numbers. First we prove that

$$A_y \overset{\text{def}}{=} \sum_{\Delta(K)\geq y} \frac{1}{K} \leq \frac{c_2}{2^y}. \tag{2.4}$$

Let $K = K_1 K_2$ where $K_1 = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, $K_2 = \Pi p_i^{\gamma_i}$, $p_i \geq 5$.

Since

$$\log K_2 = \sum \gamma_i \log p_i \geq \log 5 \cdot \Delta(K_2),$$

therefore

$$\sum_{\Delta(K_2)\geq z} \frac{1}{K_2} \leq \sum_{K_2 \geq 5^z} \frac{1}{K_2}. \tag{2.5}$$

Furthermore, as it is easy to see, the number of K's not exceeding x is $O(\sqrt{x})$. So the right hand side of (2.5) is majorized by $O(5^{-z/2})$. Hence

$$A_y = \sum_{K_1=2^\alpha\cdot 3^\beta} \frac{1}{K_1}\left(\sum_{\Delta(K_2)\geqq y-\alpha-\beta-2}\frac{1}{K_2}\right) \leqq$$

$$\leqq 5\cdot \sum_{\alpha+\beta\geqq y+2}\frac{(\sqrt{5})^{\alpha+\beta}}{2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot(\sqrt{5})^y} + \sum_{\alpha+\beta\geqq y+2}\frac{1}{2^\alpha\cdot 3^\beta}\left\{\sum\frac{1}{K_2}\right\}.$$

Hence, by an easy calculation we get (2.5).

Now we write every n as $n = K\cdot m$, where $n = K\cdot m$, $(K, m) = 1$, m is a square free number. It is clear that $\Delta(n) = \Delta(K)$.

Let $M(x, y)$ be the number of those n's not exceeding x for which $\Delta(n) \geqq y$. It is obvious that the number of $n \leqq x$ so that $f_k(n) > y$ not greater than $kM(x, y)$. Furthermore,

$$M(x, y) \leqq \sum_{\Delta(K)>y}\left[\frac{x}{k}\right] \leqq x\,A_y .$$

So, by (2.4)

$$M(x, y) \leqq c_2\, x/2^y \tag{2.6}$$

holds.

Let

$$k_i = 2^i, \quad y_i = \frac{\log k_i}{\log 2} + \alpha\log\frac{\log k_i}{\log 2} = i + \alpha\log i .$$

Let $T = 2^t$.

The inequality

$$f_k(n) \leqq \frac{\log k}{\log 2} + \alpha\log\frac{\log k}{\log 2}, \quad k = k_i, \quad i \geqq t$$

holds for all $n \leqq x$ with the exception

$$\sum_{i\geqq t} k_i M(x, y_i) \leqq c_2\, x \sum_{i\geqq t}\frac{1}{i^{\alpha/\log 2}}$$

of them. The right hand side of the last inequality is

$$O\left(x(\log T)^{1-\alpha/\log 2}\right).$$

Observing that $f_k(n)$ is a monotonic function of k, and that $\log k_{i+1} - \log k_i = \log 2$,

$$\log\log k_{i+1} - \log\log k_i = \log(1 + 1/i) < 1/i ,$$

hence our assertion immediately follows.

3. Let now $g(n)$ be a non-negative additive function so that

$$g(p^\alpha) = g(p) \quad (\alpha = 2, 3, \ldots)$$

for every p. We assume that the inequality

$$(0 <) c_1 < g(p) \cdot p < c_2 \tag{3.1}$$

holds for every p. c_1, c_2 are positive constants.

We consider

$$f_k(n) = \max_{j=1,\ldots,k} g(n+j). \tag{3.2}$$

Let $p_1 < p_2 < \ldots$ be the sequence of all prime numbers. We define t_k by the inequality

$$t_k = p_1 \ldots p_\mu \leq k < t_k p_{\mu+1}. \tag{3.3}$$

Since t_k is a divisor of $n+j$ for at least one $j \in [1, k]$ we have

$$f_k(n) \geq \sum_{i=1}^{\mu} g(p_i). \tag{3.4}$$

Let

$$\psi(y) = \sum_{p \leq y} g(p). \tag{3.5}$$

Since

$$\sum_{p \leq y} \frac{1}{p} = \log\log y + O(1),$$

therefore

$$0 < c_3 < \frac{\psi(y)}{\log\log y} < c_4.$$

From (3.4) it follows that

$$f_k(n) \geq \psi(p_\mu).$$

From (3.3) it follows that $p_\mu = (1+o(1)) \log k$, and so

$$f_k(n) \geq \psi(\log k) - c_1, \quad c_1 > 0 \tag{3.6}$$

holds for every n and every k.

Let $y \geq 1$,

$$\tilde{g}(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ p \leq y}} g(p), \tag{3.7}$$

and

$$h(n) = z^{\tilde{g}(n)}, \quad z \geq 1. \tag{3.8}$$

Then

$$h(n) = \sum_{d|n} t(d),$$

where

$$t(p) = z^{g(p)} - 1; \quad t(p^\alpha) = 0, \text{ if } \alpha \geq 2 \text{ and } p \geq y,$$

and

$$t(p^\alpha) = 0, \text{ if } p < y \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

So we have

$$A \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} z^{\tilde{g}(n)} = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} t(d) = \sum_{d=1}^{\infty} t(d) \left[\frac{x}{d}\right] \leq$$

$$\leq x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{t(d)}{d} = x \prod_{y \leq p \leq x} \left(1 + \frac{z^{g(p)} - 1}{p}\right).$$

Now we choose z so that

$$c_2 \log z < y/4.$$

Then for $p > y$ we get

$$1 + \frac{z^{g(p)} - 1}{p} < 1 + \frac{2g(p) \log z}{p} < \exp\left(4 (\log z) \frac{g(p)}{p}\right).$$

Hence it follows that

$$A \leq x \exp\left(4 (\log z) \sum_{p \geq y} \frac{g(p)}{p}\right) \leq x \exp\left(c_5 \log z/(y \log y)\right).$$

Let $\Delta \geq 1$, and

$$S_\Delta \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \leq x \\ \tilde{g}(n) \geq \Delta}} 1.$$

Then

$$S_\Delta \leq z^{-\Delta} A \leq x \exp\left(c_5 \log z/(y \log y)\right) \cdot \exp(-\Delta \log z). \tag{3.9}$$

The number of the n's not exceeding x for which

$$\max_{j=1, \ldots, k} \tilde{g}(n+j) \geq \Delta$$

is majorised by $O(k S_\Delta)$.

By using (3.9) we get

$$k S_\Delta \leq x \exp\left(c_5 \frac{\log z}{y \log y} - \Delta \log z + \log k\right).$$

Let

$$y = \log k, \quad \log z = \frac{y}{4c_2} = \frac{\log k}{4c_2}, \quad \Delta = 16 c_2.$$

Then

$$k S_{\Delta} \leq x \exp(-3 \log k) = \frac{x}{k^3}.$$

Since

$$f_k(n) \leq \psi(\log k) + \max_{j=1,\dots,k} \tilde{g}(n+j)$$

therefore the following assertion holds.

THEOREM 2. *The inequality*

$$f_k(n) \leq \psi(\log k) + \Delta$$

holds for $k \geq k_0$ *and for every* $n \leq x$ *with the exception of at most* $O(x/k_0^2)$ *of them.* Δ *is a constant.*

Using that

$$\log \frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{p|n} \frac{1}{p} + O(1),$$

$$\log \frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{p|n} \frac{1}{p} + O(1),$$

where $\varphi(n)$ denotes the Euler function, and $\sigma(n)$ denotes the sum of divisors of n, from Theorem 2 we can deduce immediately the following assertion.

THEOREM 3. *The inequalities*

$$\frac{c_1}{\log \log k} \leq \min_{j=1,\dots,k} \frac{\varphi(n+j)}{n+j} \leq \frac{c_2}{\log \log k},$$

$$c_1 \log \log k \leq \max_{j=1,\dots,k} \frac{\sigma(n+j)}{n+j} \leq c_2 \log \log k$$

hold for every $k \geq k_0$, *and for every but* $O(x/k_0^2)$ *of* $n \leq x$. c_1, c_2 *are suitable absolute positive constants.*

DOPPELGITTERFÖRMIGE LAGERUNGEN INKONGRUENTER KREISE UND KUGELN

Von

MÁRTA HOLLAI

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie der Eötvös Loránd Univesität, Budapest

Herrn Professor L. FEJES TÓTH zum 60. Geburtstag gewidmet

(Eingegangen am 24. Oktober 1974.)

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der sog. doppelgitterförmigen Ausfüllung der euklidischen Ebene und des Raumes durch inkongruente Kreise und Kugeln.

DEFINITION 1. Verschieben wir die Punkte eines Gitters Γ mit einem Vektor $\mathbf{e}$. Die Vereinigung der Punkte von diesen zwei Gittern bildet das zu Γ und $\mathbf{e}$ gehörende Doppelgitter.

DEFINITION 2. Von doppelgitterförmiger einfacher Kugelpackung reden wir, wenn wir um die Punkte des Gitters Γ Einheitskugeln und um die Punkte des verschobenen Gitters Kugeln mit gegebenem Radius $0 < r \leq 1$ schreiben, wo die Kugeln keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

Im Weiteren bestimmen wir die maximale Dichte der Packung in der Funktion von r.

SATZ 1. *Die Dichte einer doppelgitterförmigen einfachen Kreispackung ist höchstens*

$$\pi \frac{r^2+1}{2\sqrt{3}}, \qquad \text{wenn} \quad 0 \leq r \leq 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1,$$

$$\pi \frac{r^2+1}{4\sin\left(2\arccos(r+1)^{-1}\right)}, \qquad \text{wenn} \quad 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \leq r \leq \sqrt{2} - 1,$$

$$\pi \frac{r^2+1}{4\sqrt{r^2+2r}}, \qquad \text{wenn} \quad \sqrt{2} - 1 \leq r \leq 1 \text{ ist.}$$

Eine qudratische Form des Gitters, womit wir die dichteste Packung verwirklichen können, ist in den oberen drei Intervallen:

$4\,(x_1^2+x_2^2+x_1\,x_2)$,

$4\left(x_1^2+x_2^2+2\cos\left(2\arccos\frac{1}{r+1}\right)x_1\,x_2\right)=4\left(x_1^2+x_2^2+2\,\frac{2-(r+1)^2}{(r+1)^2}\,x_1\,x_2\right)$,

$4\,(x_1^2+(r^2+2r)\,x_2^2)$.

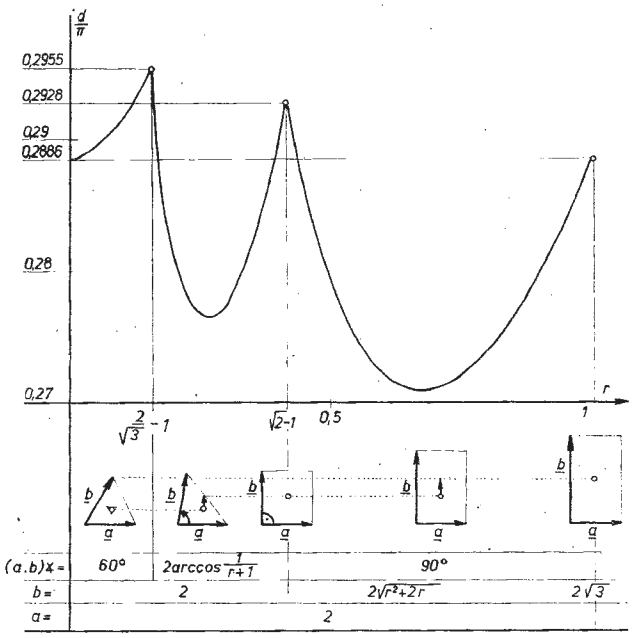
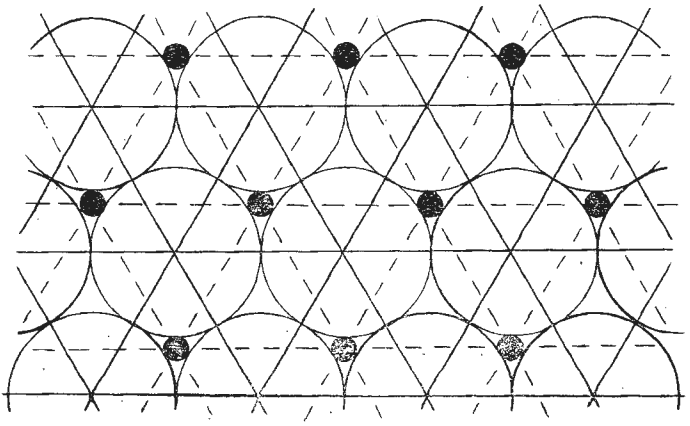


Fig. 1.



Im ersten Fall führt der Vektor der Translation vom Gitterpunkt zu irgendeinem Punkt jenes Ebenteiles, der die um die Gitterpunkte umschriebenen Kreise mit Radius $r+1$ nicht überdeckt. In den anderen Fällen zeigt der Vektor der Translation zum Mittelpunkt eines Stützkreises.

Die Definition von Stützkreis, Stützkugel, Stützpoligon und Stützpolytop siehe in [1].

ANMERKUNG 1. Ist $r = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$, so ist die Dichte maximal. (S. Fig. 1).

SATZ 2. *Die Dichte der doppelgitterförmigen einfachen Kugelpackung ist höchstens*

$$\pi \frac{r^3+1}{\sqrt{18}}, \qquad \text{wenn} \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}-1,$$

$$\pi \frac{r^3+1}{3(r^2+2r)\sqrt{4-(r+1)^2}}, \qquad \text{wenn} \quad \sqrt{2}-1 \leq r \leq \sqrt{3}-1,$$

$$\pi \frac{r^3+1}{6\sqrt{(r+1)^2-2}}, \qquad \text{wenn} \quad \sqrt{3}-1 \leq r \leq 1 \text{ ist,}$$

und die dazu gehörende qudratische Form ist

$$4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1),$$

$$4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+k(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)),$$

wo $k = 2\cos\left(2\arcsin\frac{(r+1)^2-1}{2}\right)$ *ist,*

$$4(x_1^2+x_2^2+(r^2+2r-1)x_3^2).$$

Der Vektor der Translation zeigt wie oben zum Mittelpunkt einer maximalen Stützkugel, bzw. im ersten Intervall zu einem Punkt der bestimmten Umgebung des Mittelpunktes.

ANMERKUNG 2. Die Dichte ist maximal, wenn $r = \sqrt{2}-1$ ist.

Fig. 1 und Fig. 2 fassen unsere Ergebnisse zusammen. (Die Dichte der Packung wird mit d bezeichnet.)

Beim Beweis benützen wir folgende Hilfssätze:

HIFFSSATZ 1. Hat eine Kugel mit Radius r mit den Einheitskugeln eines Gitters keinen gemeinsamen inneren Punkt, dann hat auch die um den Mittelpunkt der Stützkugel mit maximalem Radius umbeschriebene Kugel mit den Einheitskugeln des Gitters keine gemeinsamen inneren Punkte.

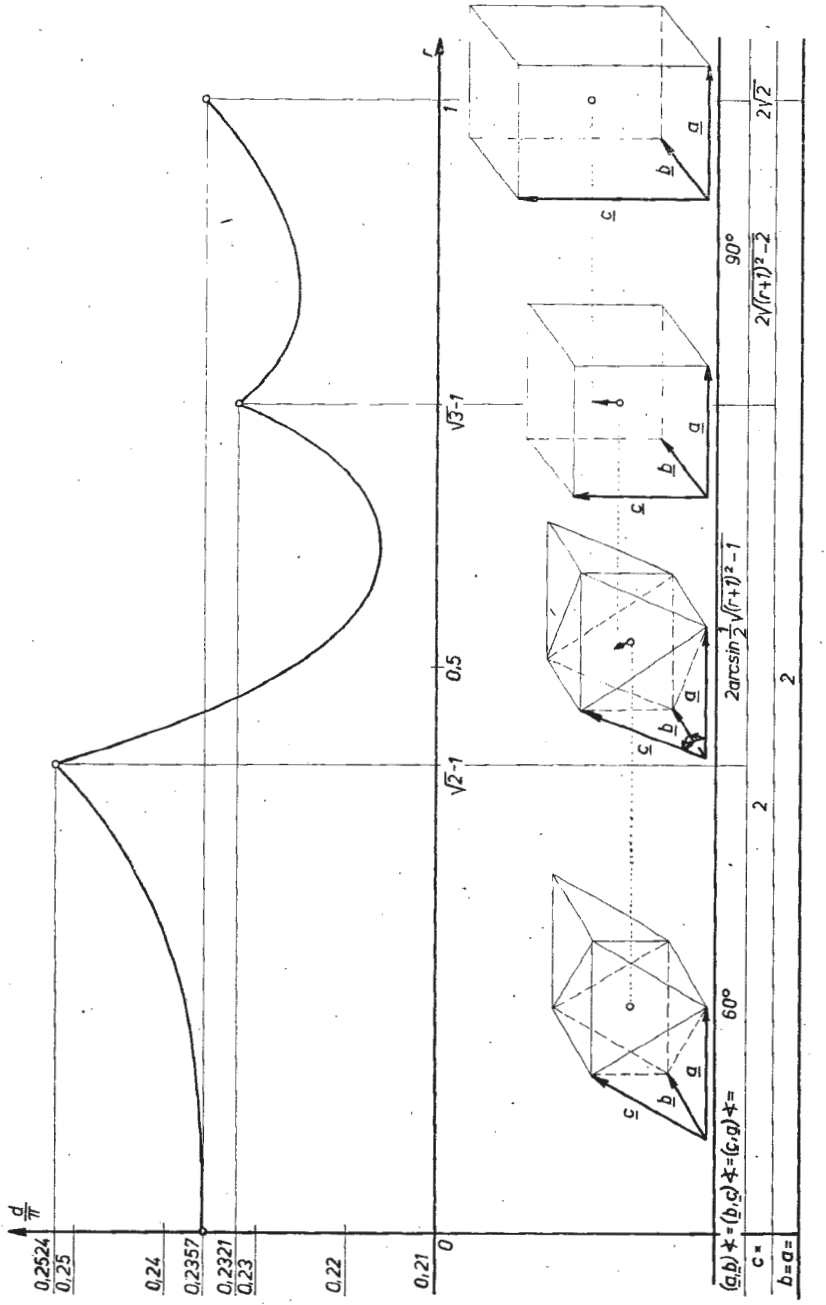

d/π
0,2524
0,25
0,24
0,2357
0,2321
0,23
0,22
0,21
0
r
1
√3-1
0,5
√2-1
(a,b) ∢ = (b,c) ∢ = (c,a) ∢ =
60°
2arcsin ½√(r+1)² - 1
90°
c =
2
2
2√2
b = a =
2
2√(r+1)² - 2

Fig. 2.

BEWEIS. Betrachten wir die Zerlegung des Raumes durch die Stützpolyeder des Gitters. Das ist die sog. L-Zerlegung. Der Mittelpunkt O der Kugel mit Radius r ist ein innerer oder Grenzpunkt eines Polyeders. Ist O nicht die Zentrale des Polyeders, so gibt es wenigstens eine Polyeder-Ecke (O_i) für die die Ungleichung $R > OO_i \geq r+1$ gilt, wo R der Radius der um den Polyeder umbeschriebenen Stützkugel ist.

HILFSSATZ 2. In einer L-Zerlegung – die zu einem dreidimensionalen Gitter gehört – ist der Mittelpunkt der Stützkugel mit maximalem Radius im Inneren des dazu gehörenden Polyeders.

BEWEIS. Nehmen wir an, daß der Mittelpunkt O der Kugel $\mathbf{G}$ kein innerer Punkt vom Polyeder $\mathbf{P}$ ist. Dann gibt es wenigstens eine Seitenfläche $\mathbf{S}$ vom Polyeder $\mathbf{P}$, deren Ebene die anderen Ecken und den Mittelpunkt O trennt, oder $O \in \mathbf{S}$ ist. Zur Seitenfläche $\mathbf{S}$ gehört noch eine Stützkugel $\overline{\mathbf{G}}$. Der Mittelpunkt $\overline{O}$ von $\overline{\mathbf{G}}$ ist nicht identisch mit O, sonst hätte die Kugel $\mathbf{G} = \overline{\mathbf{G}}$ weitere Gitterpunkte. Die Halbgerade $O\overline{O}$ kann nicht zum Polyeder $\mathbf{P}$ zeigen, denn da wären die Punkte O_i im Inneren von $\overline{\mathbf{G}}$. $O\overline{O}$ kann den Polyeder $\mathbf{P}$ nicht schneiden, denn da wäre der Radius von $\mathbf{G}$ größer als der vorausgesetzte maximale Radius von $\mathbf{G}$. Damit ist dieser Hilfssatz bewiesen.

BEWEIS DER SÄTZE. Im ersten Intervall – ist $r+1$ kleiner als der Radius des maximalen Stützkreises (Kugel) vom Gitter, das Gitter gehört zur dichtesten gitterförmigen Kreis- (Kugel) Packung – ist die Behauptung evident. Wenn im Raum $r \leq \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 = 0{,}2247\ldots$ ist, so können wir das Gitter auch in den zum Mittelpunkt des regulären Tetraeders, bzw. in seine geeignete Umgebung verschieben, aber im Falle $\sqrt{\frac{3}{2}} < r+1 \leq \sqrt{2}$ kann nur die Umgebung des Mittelpunktes vom regulären Oktaeder in Anschlag kommen.

In den weiteren Intervallen verfolgen wir folgenden Gedankengang (Einfachheitshalber wird hier bloß von den dreidimensionalen Fall die Rede sein.):

Betrachten wir ein Gitter. Sei R, der Radius der größten Stützkugel, konstant. Wir ändern das Gitter, bzw. wir ersetzen es mit einem anderen Gitter so, daß

- die Entfernung der Gitterpunkte ≥ 2 bleibt,
- das Volumen Δ des Grundparallelepipedons des Gitters nicht wächst,
- der Typus des Gitters sich höchstens derart verändert, daß die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand der maximalen Stützkugel wächst. (Die Typen der Gitter finden wir in [2].)

Wir untersuchen bei gegebenen Werten des Radius R, welcher Typus unter den obigen Veränderungen vorkommt, und welches Gitter von ihnen einen minimalen Grundrauminhalt hat. Wir zeigen, daß der Raum-

inhalt des Grundparallelepipedons solcher Gitter mit der Vergrößerung von R wächst. Deswegen und statt des Hilfssatzes 1 ($R \geq r+1$) ergibt ein Gitter die maximale Dichte das zum $R = r+1$ Wert gehört.

Im Weiteren wird der Beweis der beiden Sätze einzeln besprochen.

In der Ebene untersuchen wir jetzt die Gitter, wo der Radius des Stützkreises größer als $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ist, und der Stützkreis genau 3 Gitterpunkte enthält. (Das ist das primitive Gitter). Bezeichnen wir den Mittelpunkt des Stützkreises mit O und die auf diesem Stützkreis liegenden Gitterpunkte mit O_i, so besteht folgende Ungleichung: $2 = O_1O_2 \leq O_1O_3 \leq O_2O_3$. Wenn $O_1O_2 > 2$ ist, bewegen wir den Punkt O_1 zu O_2 dem Kreis entlang (O_1') (S. Fig. 3). Mit dieser Bewegung nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks ab, weil $O_1O_2 \leq O_1O_3$ war. Im nachfolgenden setzen wir immer voraus, daß kein neuerer Gitterpunkt während der Bewegung auf den Kreis kommt, andernfalls führen wir die Veränderung bei der Untersuchung des geeigneten Gittertypus fort. So können wir voraussetzen, daß $O_1'O_2 = 2$ und der Winkel $O_3O_2O_1' < 90°$ ist. Wir wiederholen die obige Bewegung mit dem Punkt O_3. Wenn z.B. $O_1'O_3 \leq O_2O_3$ war, so gilt im entstehenden Dreieck $O_3''O_1' = O_1'O_2 = 2$ und

$$60° < \sphericalangle\, O_3''O_1'O_2 = 2 \arccos \frac{1}{R} < 90°,$$

d.h. daß ein primitives Gitter nur dann vorkommt, wenn $R < \sqrt{2}$ ist. Der Flächeninhalt des Grundparallelogramms ist

$$A = 4 \sin\left(2 \arccos \frac{1}{R}\right),$$

der im Interväll $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$ zunimmt.

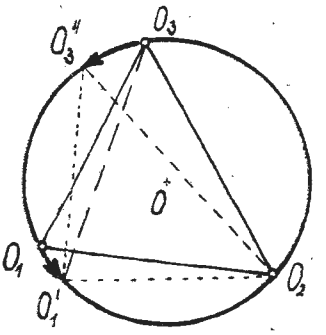


Fig. 3.

Hat der Stützkreis 4 Gitterpunkte $(O_1 O_2 O_3 O_4)$ – das ist ein rechteckiges Gitter – dann drehen wir eine Diagonale so, daß die Fläche abnimmt, und $O_1' O_2 = O_3' O_4 = 2$ wird. (S. Fig. 4). Da erhalten wir $O_1' O_4 = O_2 O_3' = 2\sqrt{R^2 - 1}$, was wegen $O_1' O_4 = O_2 O_3' \geq 2$ nur im Fall $R \geq \sqrt{2}$ sein kann. Jetzt haben wir $\Delta = 4\sqrt{R^2 - 1}$. Diese Funktion ist offensichtlich zunehmend.

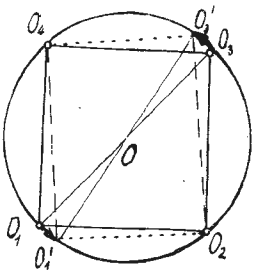


Fig. 4.

1. Im Raum betrachten wir zuerst auch das sog. primitive Gitter, wo alle Polyeder der L-Zerlegung Tetraeder sind. Wir bezeichnen den Mittelpunkt und den Radius einer maximalem Stützkugel mit O und R, die Ecken des Tetraeders mit A, B, C, D, und die Orthogonalprojektion auf die Ebene ABC der Punkte D, O mit D', O'. Der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises k ist gleich mit O'. In einer L-Zerlegung sind die Dreiecke spitzwinklig, darum ist O' ein innerer Punkt des Dreiecks. Ist der Punkt D' im Winkelbereich $AO'B$, und ist $AD \leq BD$, so bewegen wir den Punkt D dem zur Ebene ABC parallel laufenden Kreis der Kugel entlang bis zur die Strecke AB senkrecht halbierenden Ebene $(\overline{D})$. Offensichtlich bleibt das Volumen des Tetraeders bei dieser Bewegung unverändert. Es ist auch leicht einzusehen, daß alle Abstände der Gitterpunkte ≥ 2 bleiben, daß der Abstand AD zunimmt.

Wir beenden die Bewegung, wenn ein Kantenwinkel 90° erreicht, d.h. der Typus der Gitters sich verändert hat.

Bewegen wir den Punkt D einem Großkreis entlang in der die Strecke AB senkrecht halbierenden Ebene, so nimmt der Rauminhalt ab. Bezeichnen wir mit C_0 den Punkt des Kreises k der C gegenüberliegt. Die Winkel DAC und DBC sind nur dann Spitzwinkel, wenn der Punkt D' im Winkelbereich AC_0B ist. Da es genügt die Stützkugel mit maximalem Radius zu untersuchen, separiert die Ebene ABC die Punkte D und O nicht (Hilfssatz 2). Die Projektion des obigen Großkreisbogens schneidet die Grenze des Winkels AC_0B, d.h. entweder verändert sich der Typus des Gitters, oder kann erreicht werden, daß $D^*A = D^*B = 2$ besteht. In diesem Fall wiederholen wir den obigen Prozeß mit dem Punkt C. Dann hat das Tetraeder bloß 2 windschiefe Kanten, die größer als 2 Einheiten sind oder sind alle drei Kanten einer Fläche 2 Einheiten lang. Im letzteren

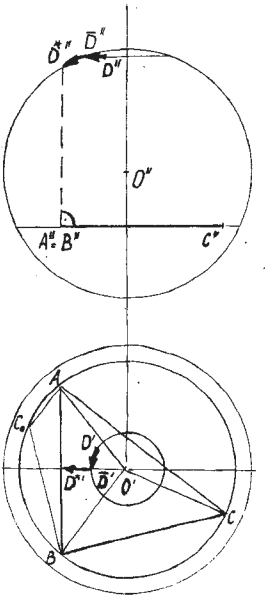


Fig. 5.

Fall verwenden wir noch einmal den obigen Prozeß auf den vierten Punkt. Wir erhalten auch jetzt ein Tetraeder, wo z.B.

$$D\,A = D\,B = C\,A = C\,B = 2 \quad \text{ist;}$$

$2 \leq A\,B = 2a < 2\sqrt{2}$ ist, weil $\sphericalangle\, A\,D\,B < 90°$ ist;

$2 \leq C\,D = 2b < 2\sqrt{2}$ ist, weil $\sphericalangle\, C\,A\,D < 90°$ ist (S. Fig. 6).

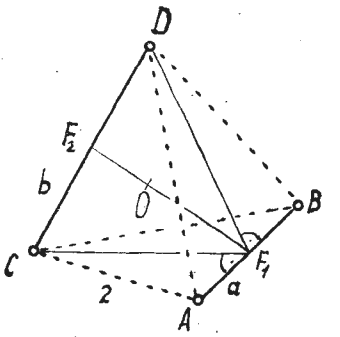


Fig. 6.

Vom Radius der um dieses Tetraeder umbeschriebenen Kugel kann mit kurzer Rechnung bewiesen werden, daß er kleiner als $\sqrt{2}$ ist, d.h. daß während der Bewegung der Typus des Gitters sich verändert hat.

2. Hat die maximale Stützkugel des Gitters fünf Gitterpunkte (A, B, C, D, E), so ist $A\,B\,C\,D\,E$ eine Pyramide, wo z.B. $A\,B\,C\,D$ ein Rechteck ist [2]. Die orthogonale Projektion (E') des Punktes E auf der Ebene $A\,B\,C\,D$ ist im Rechteck, weil die Seitenflächen der Pyramide spitzwinklige Dreiecke sind. Das Volumen der Pyramide, und damit auch Δ unverändert, wenn wir den Punkt E auf der Kugeloberfläche parallel zur Ebene $A\,B\,C\,D$ bewegen. Immer beenden wir die Bewegung, wenn E' auf die Grenze des Rechtecks $A\,B\,C\,D$ kommt, weil da bereits auch ein sechster Gitterpunkt zur Stützkugel gehört. Wenn $A\,E = B\,E \leq C\,E = D\,E$ ist, so führen wir die Bewegung des Punktes E in der die Strecke $A\,B$ senkrecht halbierenden Ebene, einem Großkreis entlang fort. Das Volumen der Pyramide nimmt ab, wenn der Abstand $A\,E$ abnimmt. Wir können $A\,E = B\,E = 2 \leq A\,B < 2\sqrt{2}$ erreichen.

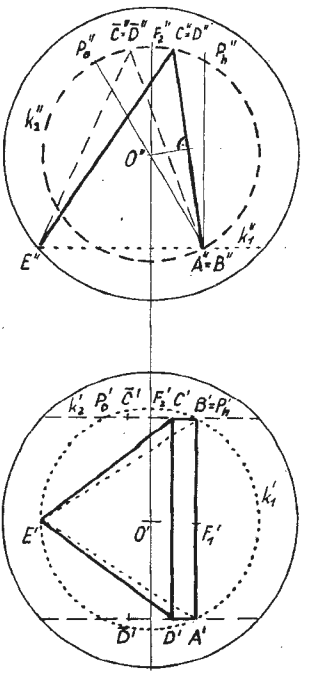


Fig. 7.

Wir haben (S. Fig. 7) das gleichschenklige Dreieck $A\,B\,E$ so in die erste Bildebene gelegt, daß die Strecke $A\,B$ senkrecht auf die zweite Bildebene sei. Wir bezeichnen das erste bzw. zweite Bild eines punktes X

mit X' bzw. X''. Der Mittelpunkt von AB ist F_1, der Umkreis des Dreiecks ABE ist k_1. Der Kreis k_2 geht durch die Punkte B, C, und seine Ebene senkrecht auf AB. P_0, F_2, P_h und $\overline{C}$ seien die Punkte des Krises k_2, für welche $\sphericalangle P_0'' O'' B'' = 180°$, $F_2'' O'' \perp E'' A''$, $P_h'' B'' \perp B'' E''$, und $\overline{C}'' C'' \| P_0 P_h \| E F_1$ gilt. Ist $C = P_h$, dann ist die sechste Ecke des geraden Prismas mit Basis ABE auf der Kugel. Wenn $C = P_0$ ist, so ist der E gegenüberstehende Punkt auch ein Gitterpunkt, d.h. in der Kugel liegt ein Gitteroktaeder. Wenn $C \in F_2 P_h$ ist, d.h. wenn $0 < C' B' \leq O' F_1'$ ist, so können wir die Ecken C und D durch ihre Spiegelbildern $\overline{C}$ und $\overline{D}$ an der Ebene **S** ersetzen, wo **S** die durch OF_2 gehende, auf die Ebene ABE senkrechte Ebene ist. Wegen $AB \geq AE = BE = 2\ 2O' F_1' \leq O' E'$ ist, also haben wir $E\overline{C} > E''\overline{C}'' > B''C'' = BC \geq 2$. Das Volumen der Pyramide bleibt unverändert.

Wenn wir jetzt den Punkt $\overline{C}$ auf dem Kreis k_2 in der Richtung von P_0 bewegen, dann nimmt das Volumen der Pyramide ab. Die Pyramide enthält den Mittelpunkt O der Kugel, deshalb ist es nicht möglich, daß im Fall $R > \sqrt{2}$ $EC = ED = EA = EB = 2$ sei, d.h. daß wir in diesem Fall das „Pyramidengitter" mit dem „Oktaedergitter" ersetzen können.

3. Sei das Gitter durch ein gerades Prisma mit einem spitzwinkligen Dreieck ABC als Basis bestimmt. Das kann — mit der Veränderung des ersten Falles von Satz 1 — zu einem geraden Prisma mit der gleichschenkeligen Dreieck-Basis $A'B'E'$, dessen Schenkel zwei Einheiten lang sind, verändert werden. Dabei kann das Volumen des Prismas höchstens abnehmen. Danach können wir auf die in **2.** beschriebene Weise den Punkt P_h durch den Punkt P_0 ersetzen.

4. Sei auf der maximalen Stützkugel des Gitters ein Gitteroktaeder $ABCDEF$. Das Symmetriezentrum des Oktaeders ist mit dem Mittelpunkt der Kugel identisch, d.h. daß die Ecken drei Rechtecke bestimmen ($ABCD$, $AECF$, $BEDF$). Wir drehen eine Diagonale des Rechtecks $ABCD$ in der Weise, daß der Rauminhalt abnimmt. Da wird entweder ein Seitenpaar zwei Einheiten lang, oder kommen weitere Gitterpunkte auf die Kugel. Letzter Fall wird im Abschnitt **5** weiter untersucht. Darum kann vorausgesetzt werden, daß $AB = CD = 2$ und $AE \leq BE \leq DE \leq CE$ ist. Sei E' die orthogonale Projektion des Punktes E auf der Ebene $ABCD$. Sei der Mittelpunkt der Kugel O und ihr Radius R. Offensichtlich genügt es sich nur auf den Fall $\sqrt{2} < R \leq 2$ zubeschränken. Die obere Grenze ergibt sich aus $r = 1$, wo wir die dichteste Kugelpackung des Raumes als ein Doppelgitter auffassen. So ist

$$2 < AD = BC = 2b \leq 2\sqrt{3},$$

$$\sphericalangle OAD = \alpha \geq 30°.$$

Ist

$$F_1 \in AB \quad \text{und} \quad AF_1 = F_1B,$$
$$P \in OF_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle DAP = 2\alpha,$$
$$Q \in BD \quad \text{und} \quad AQ \perp BD,$$

dann ist

(1) $$\sphericalangle DAQ = 90° - \alpha \leq 60° \leq 2\alpha = \sphericalangle DAP.$$

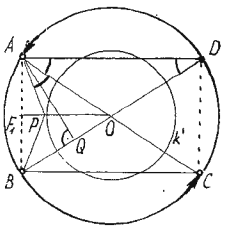


Fig. 8.

Wenn wir das rechteckige Dreieck BED um die Hypotenuse BD in der Ebene $ABCD$ drehen (E^*), dann kommt wegen $BE \geq 2$ der Punkt E^* auf den im Winkelbereich von AQD befindlichen Bogen AD des Großkreises. Wegen (1) kann der Punkt E' nicht im konvexen Winkelbereich PAB liegen. Darum ist das Spiegelbild von E' auf der Diagonale AC im Dreieck AOD.

Spiegeln wir den Punkt E auf die Ebene, die durch AOC geht und auf die Ebene $ABCD$ senkrecht ist ($\overline{E}$). Also ist $\overline{E}$ auf dem zur Ebene $ABCD$ parallel-laufenden Kreis k der Kugel. Wegen der Gleichheit $E'A = \overline{E}'A$ gilt auch $2 \leq EA = \overline{E}A < \overline{E}D$, d.h. daß E durch $\overline{E}$ ersetzt werden kann. So genügt es diejenigen Gitter zu untersuchen, wo der Punkt E' im stumpfwinkligen Winkelbereich der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ liegt. Bewegen wir E dem Kreis k entlang bis zur Ebene, die die Strecke AD senkrecht halbiert. Wir untersuchen den Fall nicht, wo wir während der Bewegung zu einem Quadergitter gelangen. Dann bewegen wir den Punkt E dem auf die Strecke AD senkrechten Großkreis entlang weiter, bis $AE = DE = 2$ wird. Wenn also genau sechs Punkte auf der Stützkugel in Oktaeder-artiger Lagerung sind, so erreicht das Volumen des Oktaeders sein minimum, wenn je ein Seitenpaar der drei Rechteckschnitte des Oktaeders zwei Einheiten lang sind. Diese Seiten bilden ein windschiefes Sechseck (S. Fig. 9).

$$AE = ED = DC = CF = FB = BA = 2,$$
$$BE = EC = CB = AD = DF = FA = 2b < 2\sqrt{2},$$
$$BH = HC = AG = GD = b.$$

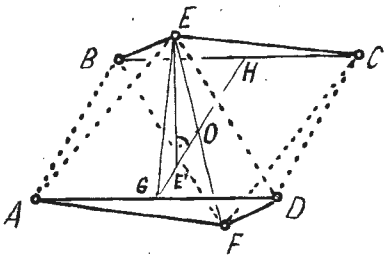


Fig. 9.

Mit der Anwendung obiger Bezeichnungen ergeben sich folgende Zussammenhänge:

$$R^2 = b^2+1 < \sqrt{3},$$

$$EG^2 = 4-b^2 = 5-R^2,$$

$$EH^2 = 3b^2,$$

$$(EE')^2 = (R^2-1)(4-R^2).$$

Das Volumen des zu diesem Gitteroktaeder gehörenden Grundparallelepipedons ist:

$$\Delta = 4(R^2-1)\sqrt{4-R^2}, \quad \text{wo} \quad \sqrt{2} \leq R < \sqrt{3} \quad \text{ist.}$$

Die nicht parallelen, 2 Einheiten langen Kanten des Gitters bilden identische Neigungswinkel.
Die Ableitung der Funktion $\Delta(R)$ ist im gegebenen Intervall positiv, also ist das Volumen ein wachsende Funktion von R.

5. Sei Γ ein Quadergitter, so ist der Radius der Stützkugel mindestens $\sqrt{3}$. Das Volumen eines in eine Kugel mit Radius R einbeschriebenen Quaders ist minimal, wenn die Seitenrechtecke ein optimales ebenes Gitter bilden. Laut Satz 1 ist ein Seitenpaar des Rechtecks zwei Einheiten lang. Also ist ein Seitenflächenpaar des Quaders je ein Quadrat von zwei Einheiten langen Seiten, die übrigen Kanten sind $2\sqrt{R^2-2}$ lang. In diesem Fall ist das Volumen des Grundparallelepipedons:

$$\Delta = 8\sqrt{R^2-2}, \quad \text{wenn} \quad R \geq \sqrt{3} \quad \text{ist.}$$

Offensichtlich ist dies eine wachsende Funktion, also kann $R = r+1$ erreicht werden.

Ist $R \geq \sqrt{3}$, so können andere Gittertypen nicht vorkommen.
Somit haben wir unseren Satz bewiesen.

Literatur

[1] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Budapest, 1965.
[2] ДЕЛОНЕ, Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм, *Успехи мат. наук*, 3 (1937), 16–62, 4 (1938), 102–164.

SUR LES EMPILEMENTS OPTIMAUX DES SPHÈRES DANS UNE SPHÈRE DE L'ESPACE À COURBURE COSTANTE À n DIMENSIONS

de

J. MOLNÁR

Chaire de Géométrie, Université L. Eötvös, Budapest

(Reçu 28 octobre 1974)

Au 60-ème anniversaire du L. FEJES TÓTH

On entend par un espace à courbure costante $\varkappa$, l'espace euclidien ($\varkappa = 0$), l'espace sphérique ($\varkappa > 0$) et l'espace hyperbolique ($\varkappa < 0$). En cas de dimension 2, au lieu de l'espace on utilise la notion de surface à courbure costante, plus précisement le plan euclidien, la surface sphérique resp. le plan hyperbolique. La sphère de l'espace à 2 dimensions est le cercle.

Considérons dans une sphère S de l'espace à courbure costante de dimension $n \geqq 2$ un système $\{S_i\}$ de sphères disjointes. On appelle densité d'empilement de $\{S_i\}$ par rapport a S, ou simplement densité d'empilement de $\{S_i\}$, la valeur $\frac{\sum S_i}{S}$. Un système de sphères disjointes ayant une densité d'empilement maximale est appelé empilement optimal.

Dans le plan euclidien sont bien connu les empilements optimaux de cercles congruents dans un cercle pour $k \leqq 7$,[1] où k denote le nombre de cercles empilés. PIRL [11] a determiné les empilements optimaux de cercles congruents si $k = 8, 9, 10$.

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions des résultats analogues concernant les configurations optimales des sphères sont dus à HADWIGER [7] si $k \leqq 6$.

En 1963 BLACHMAN [1] s'appuyant sur un résultat de RANKIN [12] a généralisé le résultat de HADWIGER en obtenant des theorèmes qui nous amènent aux certaines configurations optimales dans l'espace euclidien de dimension $n \geqq 3$. Dans un résultat récent MÁRTA HOLLAI [9] a donné

[1] Voir par ex. Шклярский – Ченцов – Яглом [14] (p. 108), resp. PIRL [11]. Grâce aux articles de GOLDBERG [6], KRAVITZ [10] et PIRL [11] nous connaissons configurations de cercles supposées optimales si $11 \leqq k \leqq 20$.

les configurations optimales dans l'espace euclidien à 3 dimensions si $7 \leq k \leq 12$.[2]

Dans notre article en étendant certains résultats de BLACHMAN [1] dans l'espace à courbure costante, on obtient des nombreux empilements optimaux. Parmi nos résultats nous mentionons ici l'extension et la généralisation du résultat de PIRL concernant l'empilement optimal de huit cercles dans un cercle et les configurations optimales de 120 resp. 121 sphères dans une sphère de l'espace hyperbolique à 4 dimensions. Nos résultats sont les fruits d'une extension simple du lemme de BLACHMAN[3] dans l'espace à courbure costante.

Dans l'espace à courbure costante à n dimensions désignons par $m(r, R)$, où $r < R\left(R < \frac{\pi}{2}\right)$[4], une configuration d'empilement optimal des sphères de rayon r, dans une sqhère de rayon $r+R$.

LEMME.[5] Soit dans l'espace à courbure costante $\varkappa$ de dimension $n \geq 2$ une sphère S de centre O et de rayon $R\left(R < \frac{\pi}{2}\right)$ et soit $m(r, R)$ une configuration d'empilement optimal de sphères de rayon r et de centre $\{O_i\}$ sur S ou dans $S \cdot \mathrm{Si}\, r > \frac{R}{2}$, il existe un $m(r, R)$ dont tous les O_i sont sur $S \cdot \mathrm{Si}\, r < \frac{R}{2}$ il existe un $m(r, R)$ avec les O_i soit sur S, soit à une distance de O moins que $R - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, 2r \operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\, R\right)$. Si les sphères empilées sont de rayon $\frac{R}{2}$, alors dans la configuration optimale un centre O_i est en O et les autres sont sur S.

[2] Les configurations optimales de HOLLAI sont des empilements correspondants aux solutions du problème de TAMMES [15]. Les configurations de HOLLAI se peuvent obtenir aussi grâce aux résultats de BLACHMAN. HOLLAI [8] a généralisé aussi le résultat de HADWIGER en considérant dans une sphère deux sortes de sphères en nombre de $k \leq 6$.

[3] Cf. BLACHMAN [1].

[4] Condition concernant seulement l'espace sphérique. La restriction concernant R est toujours supposée dans notre note en cas de l'espace sphérique.

[5] Un lemme analogue se peut enoncer si la configuration d'empilement n'est pas optimal. La seule différence est qu'en cas de $r = \frac{R}{2}$, on ne peut pas assurer l'existence de $O_i = 0$.

Le lemme se peut généraliser facilement en considérant un système de sphères incongruentes ayant le rayon minimal r et le rayon maximal a, empilé dans une sphère S^* de rayon $a+R$, où R est le rayon de la sphère S, contenante les centres des sphères empilées et concentrique à S^*.

La signification géométrique de

$$R - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, 2r \operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\, R\right) = \varrho$$

est la suivante: Considérons le triangle isocèle ABC ayant $AB = AC = R$ et $BC = 2r$ $(2r < R)$ et soit D sur AC tel que $BD = BC$, alors $\varrho = AD$ (Fig. 1).

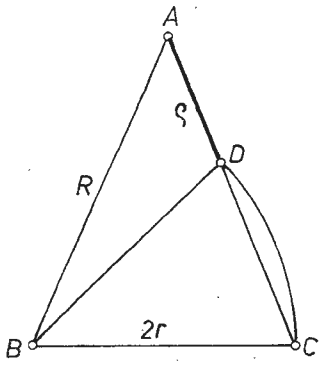


Fig. 1.

Démonstration du lemme. Soit S la sphère de centre O et de rayon R. Supposons qu'il existe une configuration $m(r, R)$ ayant un point O_i dans S tel que

$$O\,O_i \geq R - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, 2r \operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\, R\right) = \varrho\,.$$

Comme la sphère de rayon r correspondante à O_i est disjointe avec toutes les autres sphères de centre O_j (pour tout j différent de i), O_j doit etre extérieur à la sphère ouverte S_i de centre O_i et de rayon $2r$. Soit $O\,O_i' = R$ le segment contenant O_i (Fig. 2) et soit $\overline{S}_i'$ une sphère de centre O_i' et de rayon $2r$. L'intersection de la frontière de $\overline{S}_i$ et de $\overline{S}_i'$ est dans le plan Π médratrice du segment $O_i O_i' \leq R - \varrho$, donc elle est audehors de S ou sur S. Les points P de S, contenus dans le demiespace determiné par Π et contenant O, ont la propriété que $PO' > PO$, par conséquence les points frontiers de $\overline{S}_i'$ dans S sont aussi dans $\overline{S}_i$, on a donc $\overline{S}_i' \cap S \subset \overline{S}_i \cap S$. Ainsi si nous remplaçons O_i par O_i', le système correspondant de sphères reste disjoint et determine une nouvelle configuration $m(r, R)$ ayant P_i' sur S. Si toutes les sphères de centre O_i ont le même rayon $r = \frac{R}{2}$ et un de ces centres est dans O, alors les autres doivent être naturellement sur S. ∎

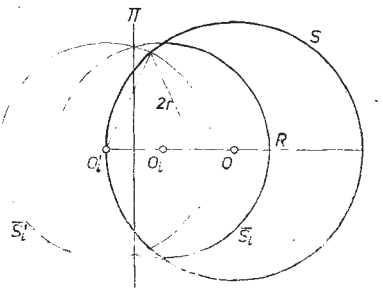


Fig. 2.

À l'aide de ce lemme on peut obtenir des theorèmes analogues à ceux de BLACHMAN.

Soit dans l'espace à courbure costante $\varkappa$ à n dimensions une sphère S de centre O et de rayon R et soit S_i une sphère de rayon $r < R$ ayant le centre sur S. Les tangents à S_i passants par O forment un cone de revolution de sommet O et d'angle $2\varphi = 2\arcsin(\sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R)$. L'intersection de ce cone avec S determine sur S une calotte sphérique de rayon angulaire φ.

En cas d'un système $\{S_i\}$ de sphères disjointes de rayon $r\left(\dfrac{R}{2} < r < R\right)$ le nombre maximal $M(r, R)$ des sphères disjointes de rayon r empilées dans une sphère de rayon $r+R$, selon notre lemme est donné par $N(\varphi)$, ou $N(\varphi)$ est le nombre maximal des calottes sphèriques disjointes de rayon angulaire φ qui se peuvent placer sur S. Alors on peut enoncer le

THEORÈME 1. *Dans l'espace à courbure costante $\varkappa$ à n dimensions le nombre maximal de sphères disjointes de rayon r qui se peuvent placer dans une sphère de rayon $r+R$ est égal au nombre maximal de calottes sphériques disjointes de rayon angulaire $\varphi = \arcsin(\sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R)$ qui se peuvent placer sur la sphère de rayon R, soit*

$$M(r, R) = N(\arcsin(\sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R)) \quad si \quad r > \frac{R}{2}.$$

En utilisant les notations déjà introduites nous enonçons brièvement le theorème suivant sous la forme

THEORÈME 2.

$$M(r, R) = N(\arcsin(\sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R)) +$$
$$+ M\left(r, R - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, 2r \operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\, R)\right) \quad si \quad r \leq \frac{R}{2}.$$

DÉMONSTRATION. On voit facilement que dans l'espace à courbure costante le nombre maximal de sphères de rayon r qui se peuvent placer dans une sphère de rayon $r < R$ si $r \leq \frac{R}{2}$, est au moins égal avec la somme du nombre maximal de calottes sphériques disjointes de rayon angulaire φ qui se peuvent placer sur la sphère de rayon R et du nombre de sphères de rayon r qui se peuvent empiler dans une sphère de rayon

$$R-\frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,r\,\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,2r\,\operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\,R\right)+r. \blacksquare$$

Puisque dans une sphère ouverte de rayon

$$R-\frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,r\,\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,2r\,\operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\,R\right) < r$$

c'est impossible de placer deux points à une distance au moins $2r$, alors est vrai le

THEORÈME 3.

$$M(r,R) = N\left(\arcsin\left(\sin\sqrt{\varkappa}\,r\,\operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\,R\right)\right)+1$$

si

$$R-\frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,r\,\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,2r\,\operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\,R\right) \leq r \leq \frac{R}{2}.$$

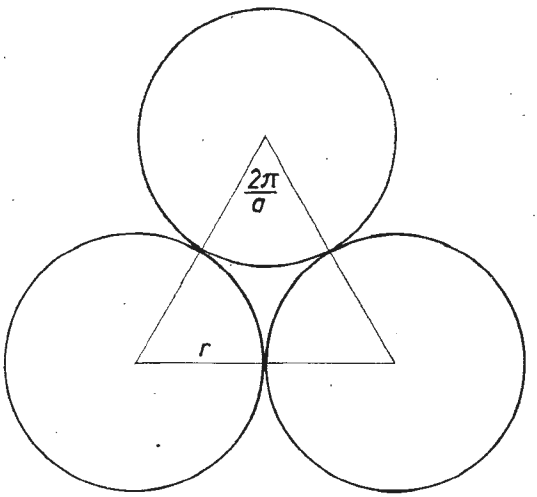


Fig. 3.

COROLLAIRE.

$$M(r, R) = N\left(\arcsin\left(\sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R\right)\right) + 1 \quad si \quad r = \frac{R}{2}.$$

REMARQUES. 1. À l'aide de notre corollaire on obtient facilement sur les surfaces à courbure costante des configurations optimales si r est arbitraire. En effet ça suffit de penser aux configurations $m(r, 2r)$ de $k = [a] + 1$ cercles, où $\sin\frac{\pi}{a} = \frac{1}{2\cos\sqrt{\varkappa}\, r}$.[6] Si a est entier, les cercles extérieurs en nombre de a se touchent cycliquement. Si a n'est pas entier, la touche cyclique des cercles périfériques ne se réalise pas.

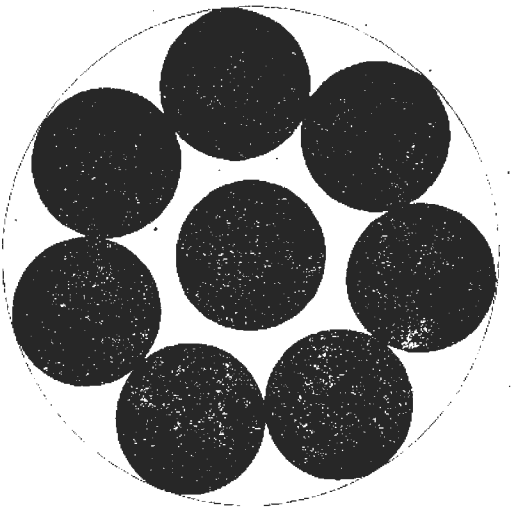


Fig. 4.

2. En cas du plan euclidien, le theorème 3 nous fournit une nouvelle démonstration concernant le résultat de PIRL si $k = 8$.[7] (Fig. 4). Grâce au theorème 3 on obtient facilement des résultats analogues sur la sphère et dans le plan hyperboilque si $k = 8$ (Fig. 5, 6).

[6] La signification géométrique de a : Soit trois cercles de rayon r tangents entre eux: (Fig. 3). Désignant par $\frac{2\pi}{a}$ l'angle du triangle equilateral determiné par les centres des cercles, a exprime le nombre de cercles disjointes de rayon r qui se peuvent placer tangentielement autour d'un cercle de rayon r.

[7] En effet si $R = 1$, $\varrho = 1 - \left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 < r = \sin\frac{\pi}{7}$, c'est-á-dire $0{,}2477\ldots < 0{,}4338\ldots$

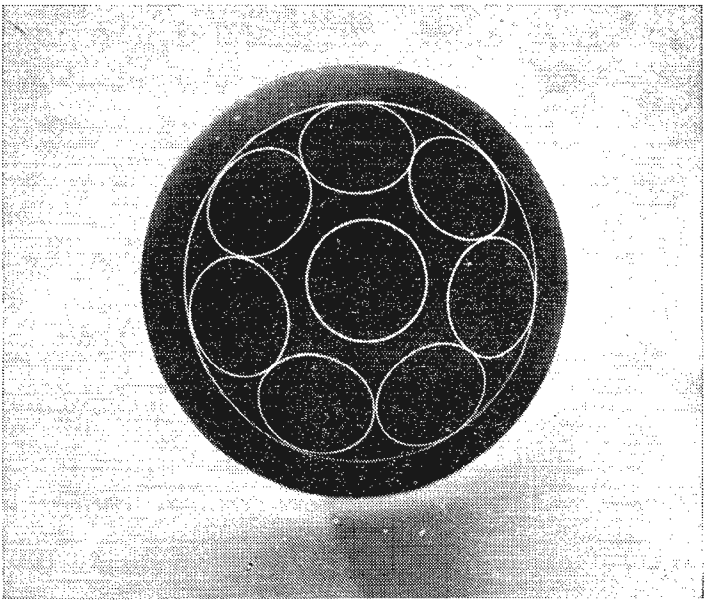


Fig. 5.

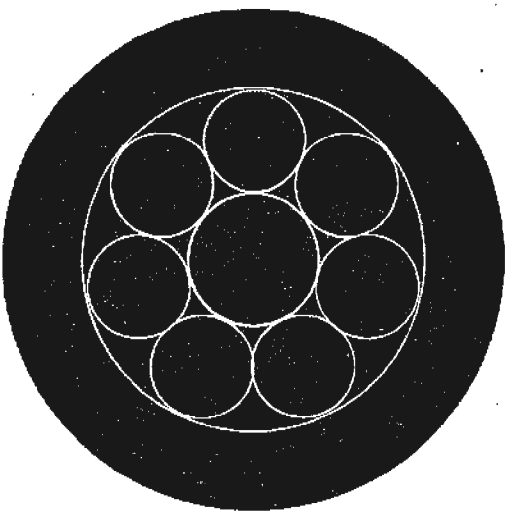


Fig. 6.

3. Soit $\mu = \sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R$, où R est le rayon de S tel que se réalise

$$R - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, 2r \operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\, R\right) = r\,,$$

c'est-à-dire la borne inférieure de r du theorème 3 prend sa valeur maximale. La fig. 7 illustre les valeurs de μ en fonction de a resp. de a^*, où $\sin\frac{\pi}{a} = \frac{1}{2\cos\sqrt{\varkappa}\, r}$ resp. $\sin\frac{\pi}{a^*} = \sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R$ (Fig. 8). En cas du plan euclidien ($a = 6$) on obtient

$$\mu = \lim_{r\to 0} \sin\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{cosec}\sqrt{\varkappa}\, R = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{17}-1}{8} = 0{,}390\ldots\,,$$

valeur signalée par BLACHMAN.

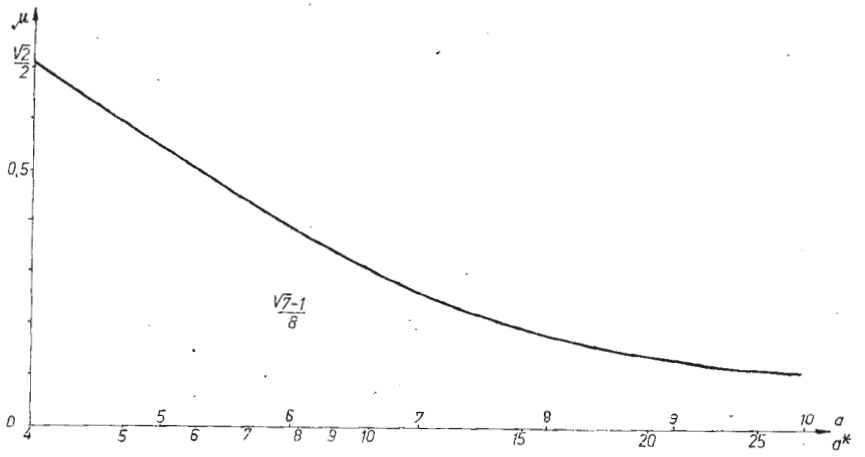


Fig. 7.

Désignons par $\{1, [a]\}$ les configurations $m(r, R)$ si

$$2r \leq R \leq r + \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, r \operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\, 2r \operatorname{ctg}\sqrt{\varkappa}\, R\right)$$

appélées, à cause de leurs forme (Fig. 4, 5, 6) rosettes à noyeau. Les calculs numériques[8] montrent qu'en cas d'un a donné les configurations de type

[8] Je remercie l'aide précieux du J. SZÉKELY concernant les calculs numériques des couples (r, R) necessaires á l'illustration 7. Les calculs ont été effectués par l'ordinateur ODRA 1304 de l'Université L. Eötvös. Nous remercions aussi l'aide précieux donné par la Chaire de Math. Numérique et Mécanique dirigée par I. KÁTAI.

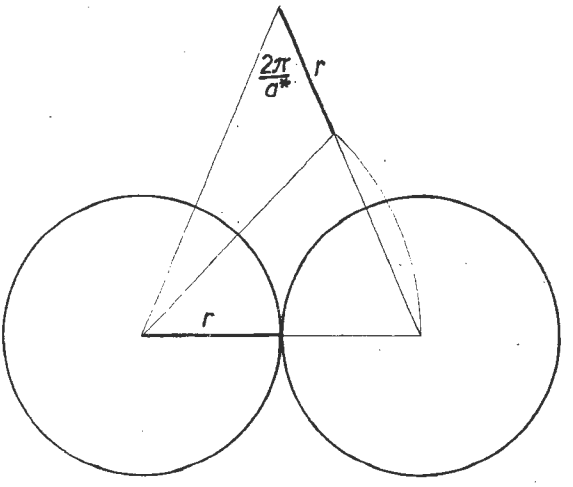


Fig. 8.

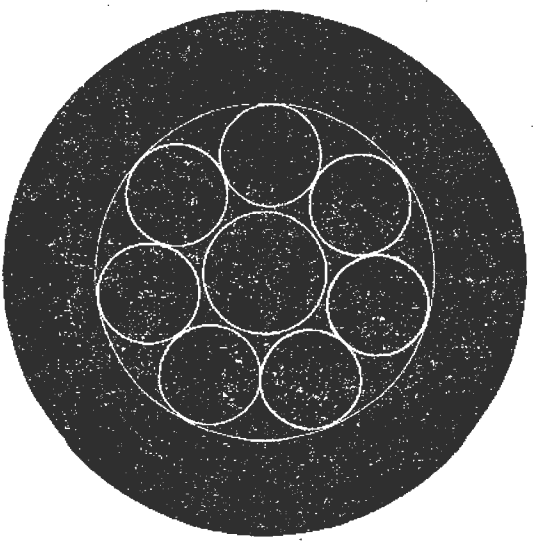


Fig. 9.

$\{1, [a]\}$ sont des configurations optimales dans l'intervalle (a_*, a) où a_* est la valeur de a correspondante sur la fig. 7 au $a^* = a$. Par ex. en cas de $a = 7$, les rosettes à noyeau de type $\{1,7\}$ sont des configurations optimales si $5{,}6 \ldots \leq a \leq 7$ (Fig. 6, 9).[9] Etant donné que dans ce cas

[9] Les fig. 6 et 9 illustrent les configurations optimales de type $\{1,7\}$ correspondantes á $a = 5{,}6 \ldots$ resp. á $a = 7$.

$a = 5{,}6\ldots < 6$, selon notre theorème 3 on peut affirmer que toutes les configurations de type $\{1,7\}$ du plan euclidien et du plan hyperbolique sont optimales. D'autre part si

$$r = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \arccos\left(2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a}\right), \quad \text{où} \quad a > 7,$$

notre theorème nous fournit les configurations de type $\{0,7\}$, les rosettes sans noyeau.

4. Grâce au résultat de ROBINSON [13] concernant la solution du problème de TAMMES [15] pour $N = 24$, notre corollaire nous fournit dans l'espace hyperbolique à 3 dimensions la configuration optimale $m(0{,}773626\ldots, 1{,}54732\ldots)$ en cas de $k = 25$ et notre theorème 1 nous amène aux configurations optimales de type $\{0,24\}$, soit $k = 24$ si $r > 0{,}773626\ldots$. Désignons par $a(r)$ la valeur de a correspondante à r. Avec le même raisonnement comme dans notre remarque précedente, nous obtenons des configurations de type $\{1,24\}$, pour $k = 25$ si $6{,}0743\ldots \leq a \leq 8{,}053\ldots$, où $6{,}0743\ldots = a(0{,}1475\ldots)$ et $8{,}053\ldots = a(0{,}773626\ldots)$.

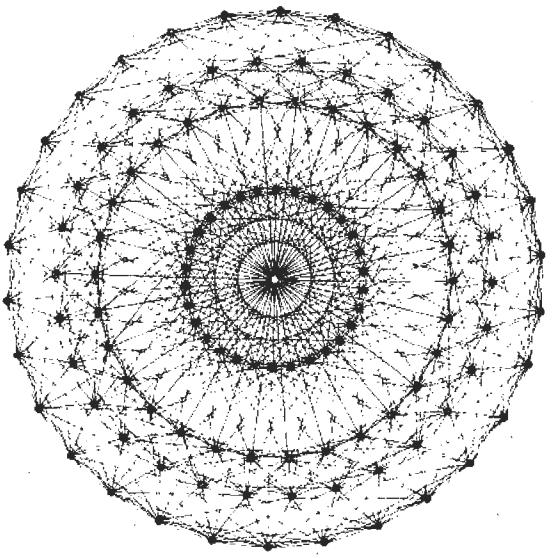


Fig. 10.

Dans l'espace à courbure costante à 3 dimensions, grâce aux solutions du probleme de TAMMES[10] pour $N \leqq 12$, on peut donner facilement les configurations optimales correspondantes.

[10] V. FEJES TÓTH 4 p. 168.

Ici nous mentionons seulement qu'en cas de l'espace sphérique à 3 dimensions on obtient des configurations optimales de type {1,12}, pour $k = 13$ si $5{,}35\ldots \leq a \leq 5{,}72\ldots$.

5. Selon un résultat de Böröczky [2][11] dans l'espace sphèrique á 3 dimensions, les sommets du polytope {3, 3, 5} donne la solution du problème d'empilement de cet espace par 120 sphères congruentes. Grâce à ce résultat et au notre theorème 3 nous obtenons des configurations optimales de type {1,120} pour $k = 121$ dans l'espace hyperbolique à 4 dimensions si $6{,}6380\ldots \leq a \leq 10$.[12] En même temps on obtient naturellement les configurations de type {0,120} pour $k = 120$ si $a > 10$.

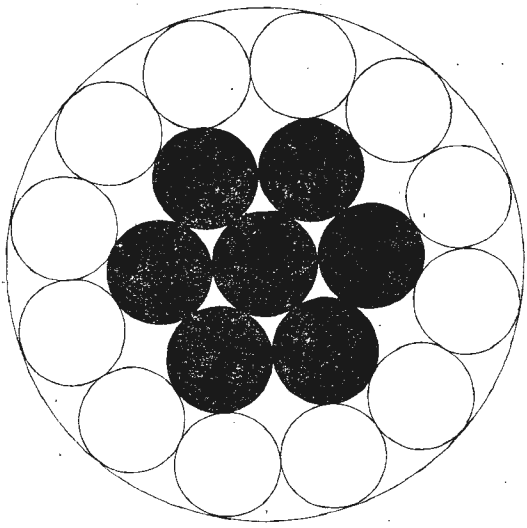


Fig. 11.

6. Des recherches récents, basés surtout sur la généralisation du theorème 2 nous nous a conduit aux nombreux empilements optimaux des sphères ayant des noyeaux plus complexes que les rosettes dèjà considerées. Parmi eux se trouve par ex. la configuration optimale de 19 cercles congruents dans un cercle du plan euclidien (Fig. 11), oú le noyeau formé d'un système de 7 cercles est lui même une rosette à noyeau. Les résultats de ces recherches feront l'objet d'une note prochaine.

[11] V. aussi Fejes Tóth [4] p. 212–213, [5] p. 324–325.

[12] La fig. 10 illustre le cas ou $a = 10$. Le rayon angulaire de la calotte sphèrique correspondante est de $\frac{\pi}{10}$ (V. Coxéter [3] p. 292–293).

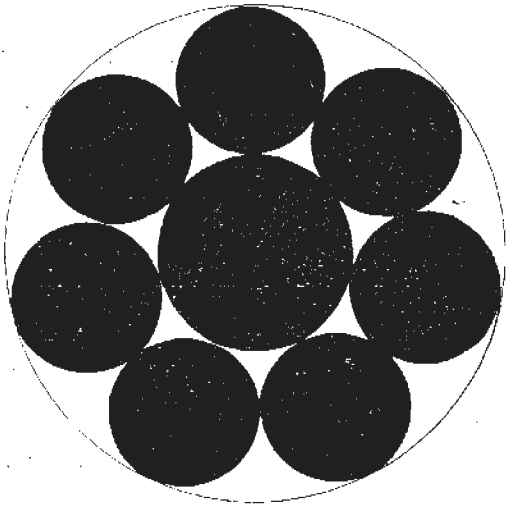


Fig. 12.

7. C'est facile de voir que dans le plan euclidien la configuration optimale {1,7} nous amène à un autre empilement optimal concernant des cercles de rayon 1 et $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{7}-1$ dans le cercle de rayon $1+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{7}$ (Fig. 12). Il semble que cette configuration est aussi optimale si dans le cercle de rayon $1+\operatorname{cosec}\frac{\pi}{7}$ nous considérons cercles empilés dont leurs rayon sont des valeurs de l'intervalle $\left(1, \operatorname{cosec}\frac{\pi}{7}-1\right)$.

Bibliographie

[1] BLACHMAN, N. M., The closest packing of equal sphere in a larger sphere, Amer. *Math. Monthly*, **70/5** (1963), 526–529.
[2] BÖRÖCZKY, K.–FLORIAN A., Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **15** (1964), 237–245.
[3] COXETER, H. S. M., *Regular Polytopes*, London, 1948.
[4] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
[5] FEJES TÓTH, L., *Regular Figures*, Oxford–London–New York–Paris, 1964.
[6] GOLDBERG, M., Packing of 14, 16, 17 and 20 circles in a circle, *Math. Magazine*, **44/3** (1971), 134–139.
[7] HADWIGER, H., Einlagerung kongruenter Kugel in einer Kugel, *Elemente Mat.*, **7** (1952), 97–103.
[8] HOLLAI, M., Lagerungen inkongruenter Kugeln I, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math. **17** (1974), 73–90.

[9] HOLLAI, M., Lagerungen inkongruenter Kugeln II, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Sect. Math. **18** (1975), 101–116.
[10] KRAVITZ, S., Packing cylinders into cylindrical containers, *Math. Magazine*, **40** (1967), 65–71.
[11] PIRL, U., Der Mindestabstand von n in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten, *Math. Nachrichten*, **40** (1969), 111–124.
[12] RANKIN, R. A., The closest packing of spherical caps in n dimensions, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* **2** (1955), 139–144.
[13] ROBINSON, R. M., Arrangement of 24 points on a sphere, *Math. Ann.*, **144** (1961), 17–48.
[14] ШКЛЯРСКИЙ Д. О. – ЧЕНЦОВ, Н. Н. – ЯГЛОМ, И. М., *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрий*, Москва, 1974.
[15] TAMMES, P. M. L., On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains, *Rec. Trav. bot. neerl.*, **27** (1930), 1–84.

LAGERUNGEN INKONGRUENTER KUGELN II.

Von

MÁRTA HOLLAI

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 4 November 1974)

Das in der Molekulargeometrie aufgetauchte Problem inkongruenter Kugellagerungen wurde in [3] unter folgenden geometrischen Voraussetzungen gelöst. Bezeichen wir mit $\langle n, k\rangle$ eine Lagerung von $n \leq 6$ kongruenten Kugeln mit $r > 1$, und von $k \leq 6-n$ Einheitskugeln. In der Funktion von r wird das Kugelsystem in der Weise bestimmt, daß die Kugeln **G** und **Γ** einen Minimalradius (R und P) haben sollen, wo

– die Kugelmittelpunkte der Lagerung auf der Oberfläche der Kugel **G** sind: $|n, k|$,

– die Kugel **Γ** die Kugeln der Lagerung enthält: $[n, k]$.

Im **§ 1** dieser Arbeit berühren die Kugeln der Lagerung eine Kugel γ von außen. (In der Molekulargeometrie entspricht γ dem Zentriatom.) Der Minimalradius $\varrho\{n, k\}$ von γ und die dazugehörige Optimallagerung mit den Graphen wird angegeben.

Im **§ 2** werden die drei Typen der Lagerung miteinander verglichen.

Im **§ 3** befassen wir uns mit der Lagerung in einer Kugel von $k \leq 12$ kongruenten Kugeln.

§ 1. SATZ 1. *Wenn die nicht übereinandergreifenden n kongruenten Kugeln mit Radius $r > 1$ und die $k \leq 6$-n Einheitskugeln eine Kugelfläche von außen berühren, so ist der Minimalradius $\varrho\{n, k\}$ dieser Kugel und der dazugehörigen Lagerung der folgende:*

{0, k}

$$\varrho\{0,1\} = 0,$$

$$\varrho\{0,2 \leq k \leq 6\} = P[0,k] - 2.$$

$$\{0, k\} = [0, k]$$

{1, k}

$$\varrho\{1,k \leq 4\} = r\,\frac{-(2r+2-r_k^2)+2\sqrt{(r+1)^2-r_k^2}}{4r-r_k^2}.$$

$$\{1,k \leq 4\} = [1,k],$$

wo r_k den Radius des um das reguläre k-Eck mit 2 Einheiten langen Seiten umbeschriebenen Kreises bezeichnet.

$\varrho\{1,5\}$ ist die Lösung der Gleichung, die größer als $\sqrt{2}-1$ ist:

$$\varrho^3+(r+2)\varrho^2+r\varrho-r=0.$$

{2, k}

$$\varrho\{2,1\}=\frac{r+1-\sqrt{2r+1}}{r-1+\sqrt{2r+1}}.$$

$$\varrho\{2(r\neq 2+\sqrt{3}),2\}=r\frac{-(r+1)+\sqrt{6r}}{-r^2+4r-1},$$

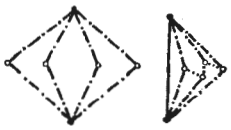
$$\varrho\{2(r=2+\sqrt{3}),2\}=\frac{3+\sqrt{3}}{12}.$$

$\varrho\{2,3\}$ ist die Lösung der Gleichung, die größer als $\sqrt{2}-1$ ist:

$$(r^2-3r+1)\varrho^3-(4-r)r^2\varrho^2-(2r-1)r^2\varrho+r^3=0.$$

$$\varrho\{2,4\}=\frac{-(r+1)+\sqrt{r^2+6r+1}}{2},$$

wo der Minimalradius auf zwei grundverschiedene Weise realisiert werden kann.

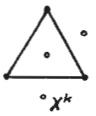


{3, k}

$$\varrho\left\{3\left(\begin{matrix}r\leq 3+\sqrt{3}\\ \neq 3\end{matrix}\right),1\right\}=\frac{-(r+3)+\sqrt{-3r^2+18r+9}}{2(3-r)},$$

$$\varrho\{3(r=3),1\}=\frac{1}{2}.$$

$\varrho\{3(r \geq 3+\sqrt{3}),\ k \leq 2\} =$
$= \varrho\{3(r \geq \mu_2),\ k \leq 6\} = r(r_3 - 1)$, wo
$\mu_2 = 5+2\sqrt{3} = 8{,}4641\ldots$ ist.



$$\varrho\{3(r \leq 3+\sqrt{3}), 2\} = \frac{-(r+1)+\sqrt{r^2+6r+1}}{2}.$$

$$\varrho\left\{3\left(r \begin{matrix} \leq \mu_2 \\ \neq 2+\sqrt{3} \end{matrix}\right), 3\right\} = r\,\frac{-(r+1)+\sqrt{-r^2+10r-1}}{-r^2+4r-1},$$

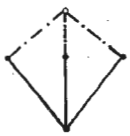
$$\varrho\{3(r = 2+\sqrt{3}), 3\} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

a *b*

Ist $1 < r < \mu_1 = 6{,}0696\ldots$, so kann der Minimalradius nur durch die Lagerung „a" zustandekommen, ist $\mu_1 \leq r \leq \mu_2$, so können beide Lagerung („a", „b") vorkommen.

{4, k}

$\varrho\{4(r \leq 4+\sqrt{6}), 1\} =$

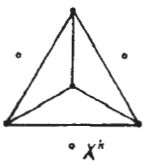


$= \varrho\{4(r \leq 4+\sqrt{6}), 2\}$

ist die positive Lösung der Gleichung:

$$\varrho^3 + (2r+1)\varrho^2 + r\varrho - r^2 = 0.$$

$$\varrho\{4(r \geq 4+\sqrt{6}),\ k \leq 4\} = r\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right).$$



{5, k}

$$\varrho\{5,1\} = \varrho\{5,0\} = \varrho\{6,0\} = r(\sqrt{2}-1).$$

BEWEIS.

{0, k}

Wenn der Radius der in [2] bewiesenen $[0,k]$ Lagerung um 2 Einheiten vermindert wird, so gelangen wir zur entsprechenden Lagerung $\{0,k>1\}$, denn $\varrho\{0,k\}<P[0,k]-2$ kann offensichtlich nicht bestehen, und jede Kugel der Lagerung berührt die innere Kugel.

{1, k}

Ist $k\leq 4$, so bilden die Mittelpunkte der Einheitskugeln (X^i) ein reguläres k-Eck mit 2 Einheiten langen Seiten, und die Kugel mit Radius $r(\mathbf{E})$ berührt alle Einheitskungeln. Aus der Gleichung

$$(r+1)^2-r_k^2 = (\sqrt{(\varrho+1)^2-r_k^2}+\varrho+r)^2$$

erhalten wir die Gleichung

$$(4r-r_k^2)\varrho^2+2r(2r+2-r_k^2)\varrho-r_k^2r^2 = 0,$$

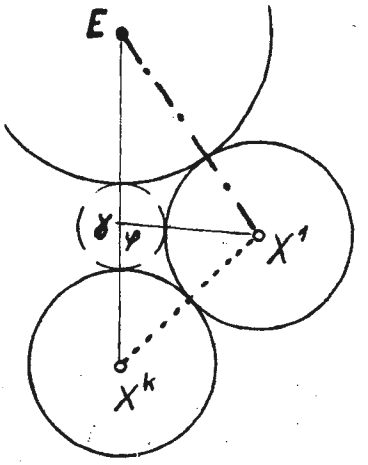


Fig. 1.

deren positive Lösung dem im Satz 1 figurierenden Wert entspricht. Der Beweis dessen, daß der Radiuswert nicht weiter vermindert werden kann, und auch dieser Wert bloß bei den gegebenen Konstruktionen vorkommt, ist der Lagerung $|1,k|$ ähnlich, wird also nicht erörtert.

$$k = 5$$

Betrachten wir ein Dreieck EX^1X^k (S. Fig. 1), wo

$$EX^1 = r+1,\ X^1X^k = 2,$$

und

$$\gamma \in EX^k,\ \gamma X^k = \varrho+1,\ \gamma E = \varrho+r,\ \sphericalangle X^1\gamma X^k = \varphi,$$

(mit γ bezeichnen wir den Mittelpunkt der Kugel γ).

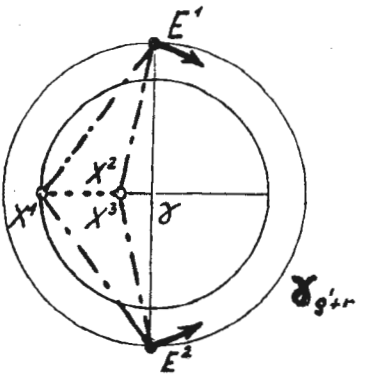


Fig. 2.

Aus diesen Bedingungen geht folgendes Gleichungssystem hervor:

$$(\varrho+1)^2+(\varrho+r)^2+2(\varrho+1)(\varrho+r)\cos\varphi = (r+1)^2$$
$$2(\varrho+1)^2-2(\varrho+1)^2\cos\varphi = 4,$$

aus dem für ϱ sich die im Satz 1 figurierende Gleichung dritten Grades ergibt. Wenn wir aus dieser Gleichung r ausdrücken, und die Ungleichung

$$r = \frac{\varrho^3+2\varrho^2}{-\varrho^2-\varrho+1} > 1$$

mit der Bedingung $\varrho > 0$ lösen, so gelangen wir zur Beschränkung

$$\sqrt{2}-1 < \varrho < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Also erreicht $\varrho+1$ den Wert

$$R|1(\sqrt{5}),5| = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

nicht, d.h. daß die Lagerung {1,5} vom Oktaedertypus nicht in die fünfeckige Pyramidenkonstruktion übergeht, wie es bei den Lagerungen |1,5| und [1,5] vorgekommen ist. Der weitere Beweis ist dem unter [3] Beschriebenen ähnlich.

{2, k}

Sei $k \leq 3$. Ähnlich der Lagerung $[2,k]$ kann auch hier gezeigt werden, daß wenn der Radius minimal ist und die Endpunkte einer Strecke XE von der Länge $r+1$ auf den Kugeloberflächen mit Mittelpunkt γ so gelagert werden, daß $\varrho\, X = \varrho+1$ und $\gamma\, E = \varrho+r$ sei, dann gilt $\sphericalangle X\gamma E > 90°$ (S. Fig. 2) d.h.

$$0 < \varrho < \frac{-(r+1)+\sqrt{r^2+6r+1}}{2}$$

ist.
Ist $k = 4$, so steht auf der rechten Seite obiger Ungleichung eine Gleichheit, woraus die Existenz der zweierlei Konstruktionen und ihre Extremaleigenschaft, ähnlich wie bei der Lagerung [2,4] bewiesen werden kann.

{3, k} und **{4, k}**

Die Berechnung der Grenzen des Konstruktionswechsels von r und die weiteren Schritte des Beweises können ähnlich dem bei dem Beweis der Lagerungen $|3,k|$ bzw. $|4,k|$ erfolgen.

{5, 1}

Bei [2] konnten wir sehen, daß $P[0,5] = P[0,6]$ ist, so gilt $P[5,0] = P[6,0]$. Wird eine der sechs Kugeln mit Radius r durch eine Einheitskugel auf die Weise ersetzt, daß sie die im Zentrum befindliche Kugel γ berührt, dann gelangen wir zur Lagerung {5,1}. Der Radius der Kugel γ kann, wie es aus obiger Gleichheit offensichtlich ist, nicht vermindert werden.

ANMERKUNG. Die in diesem Satz angeführten Lagerungstypen können auch mit einer Verallgemeinerung des Problems der sog. Newton–Zahl in Zusammenhang gebracht werden.

§ 2. Bei den Beweisen der Lagerungen verschiedenen Typs konnten wir sehen, daß in einem gewissen Intervall von r die Graphen der drei verschiedenen Lagerungen auch dann identisch sein können, wenn die Konstruktionen verschieden sind. Die Lagerungen werden auf folgende Weise charakterisiert:

Enthält ein Graph einen isolierten Punkt, so wird sie „Lagerung mit isoliertem Punkt" benannt.

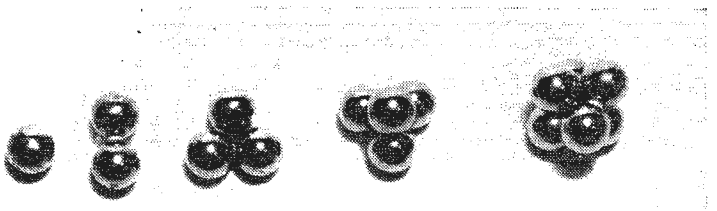
Wenn der Polyeder, um dessen Ecken die Kugeln vom entsprechenden Radius umbeschrieben werden sollen, durch den Graphen eindeutig bestimmt ist, so bedeutet die Identität der Graphen zugleich auch die „Identität der Konstruktionen".

Der zu einem Graphen gehörende Polyeder ist nicht eindeutig bestimmt. Da – wenn er keine isolierten Punkte enthält – alle Punkte auf der in den verschiedenen Konstruktionen bestimmten Kugeloberflächen vom Radius R; $P-r$ bzw. $P-1$; $\varrho+r$ bzw. $\varrho+1$ sein müssen, ist es möglich, daß diese Bedingung die Lage der einzelnen Kugeln zueinander bereits bestimmt. In diesem Fall wird die Lagerung „stabil", sonst „labil" benannt.

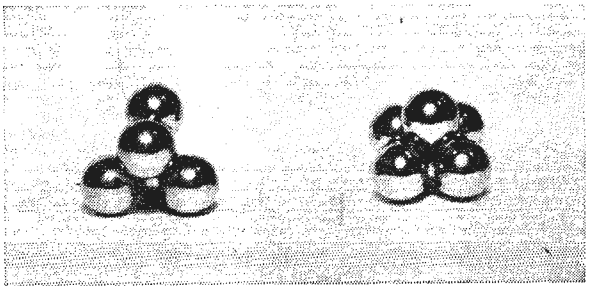
Wenn alle drei Lagerungstypen vorkommen, so benützen wir die Bezeichnung $\langle n, k\rangle$.

$\langle 0, k\rangle$

Ist $k \neq 5$, so ist die Lagerung stabil.

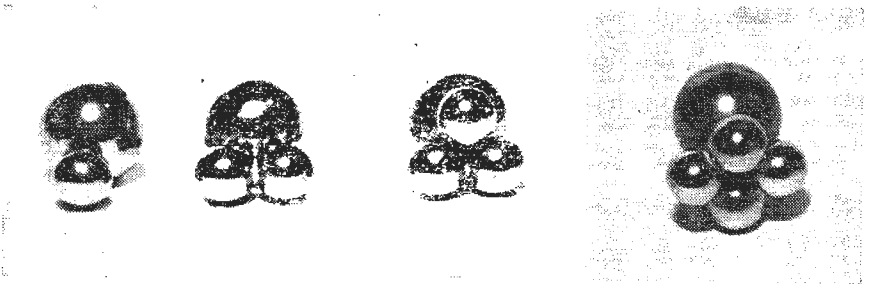


Ist $k = 5$, so sind zwei Mittelpunkte immer gegenüberliegend, die übrigen drei können auf dem Äquatorialkreis verschoben werden. In der Chemie wird dies eine trigonale Doppelpyramide genannt, rollen wir aber die Kugeln zueinander, so können wir auch eine quadratische Pyramide erhalten.



⟨1, k⟩

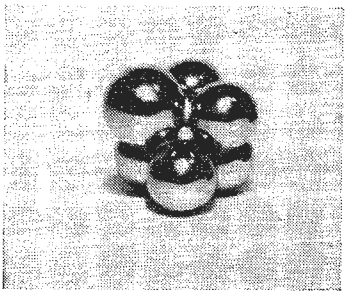
Ist $k \leq 4$, so sind die drei Lagerungen identisch. (Die Lagerung ⟨1,4⟩ kann auch als eine degenerierte trigonale Doppelpyramide aufgefaßt werden).



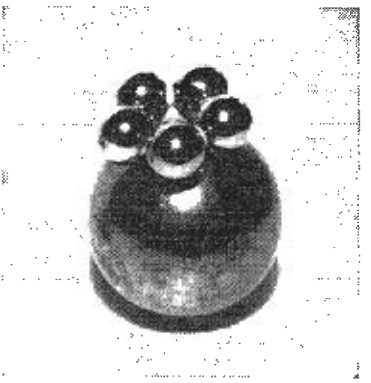
Ist $k = 5$, so ist im folgenden Intervall die Lagerung labil.

$$|1(r < \sqrt{5} = 2{,}2360\ldots),5|; \qquad [1(r < b = 1{,}6808\ldots),\ 5]; \qquad \{1,5\}.$$

Diese Konstruktionen sind Oktaeder-artig.



Ist r größer als der obige Wert, dann ist die Konstruktion eindeutig: eine reguläre Fünfeckpyramide. Also ist $r > 2{,}236\ldots$ so sind die Konstruktionen |1,5| und [1,5] identisch.

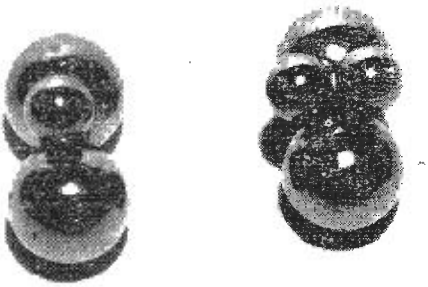


⟨2, k⟩

Ist $k \leq 2$, und ist

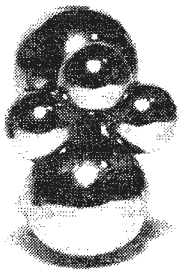
$r < 1+\sqrt{2} = 2{,}4142\ldots$; $r < 1{,}5$; alle $r > 1$,

so bestimmt der Graph die Konstruktion eindeutig, darum sind die Lagerungen im gemeinsamen Intervall (1; 1,5) identisch.

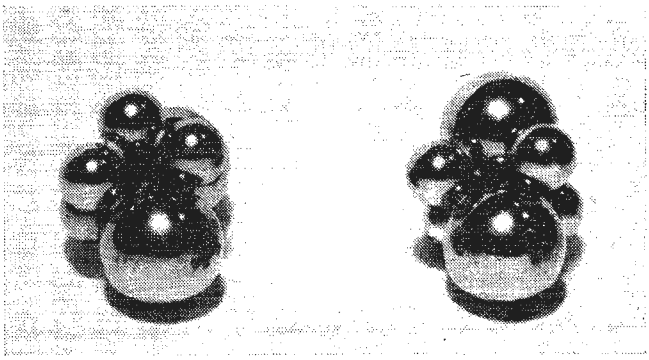


Ist r größer als der obige Wert, so ist es eine Lagerung mit isoliertem Punkt. Die beiden größeren Kugeln berühren sich, und auf der Aquatorialebene bzw. in ihrer Umgebung können die Mittelpunkte von mindestens sechs Einheitskugeln gelagert werden.

Ist $k = 3$, so ist bei obigen Radiuswert die Lagerung stabil, aber die drei Konstruktionen sind nicht identisch. Der Winkel der Ebenen von den zwei gleichschenkeligen Dreiecken mit Seiten von der Länge $2r$, $r+1$, $r+1$, ist bei den drei Konstruktionstypen verschieden.



Die Lagerung $|2(r<1+\sqrt{2}), 4|$ ist stabil, wenn R minimal ist. Die Lagerungen $[2(r<1{,}5), 4]$ und $\{2,4\}$ sind auch $|2,4|$ ähnlich, aber nicht mit identischer stabiler Konstruktion realisierbar, und auch so, daß die Mittelpunkte der Einheitskugeln in der Äquatorialebene der einander nicht berührenden, gegenüberliegenden „Großkugeln" zueinander verschoben werden können (Ein Oktaeder-artiger Typus).



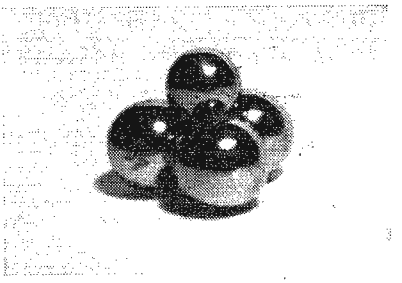
Ist r größer als obiger Wert, so ist es eine Lagerung mit isoliertem Punkt.

⟨3, k⟩

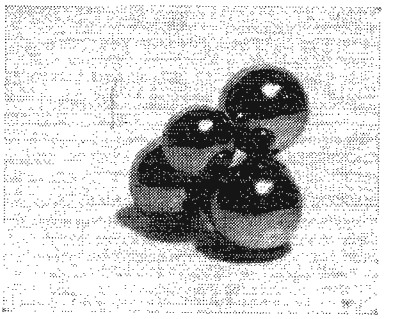
Ist r kleiner als die Werte

$$\frac{3+2\sqrt{6}}{5} = 1{,}5797\ldots; \qquad 3-\sqrt{3} = 1{,}2679\ldots; \qquad 3+\sqrt{3} = 4{,}7321\ldots,$$

so gehört zu $k = 1$ eine eindeutige Lagerung vom Tetraeder-Typus, wenn also $r<1{,}2679\ldots$ ist, dann sind die drei Konfigurationen identisch.



Ist $k = 2$ und r im obigen Intervall, so ist die Lagerung labil. Die „Großkugel" berühren die gegenüberliegenden Einheitskugeln, aber ihre Mittelpunkte sind auf dem Äquatorialkreis zueinander verschiebbar. (Eine trigonale Doppelpyramide).



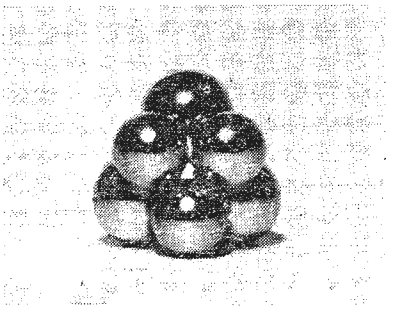
Der Winkel $X^1E^iX^2$ ist in den drei Typen

ein rechter Winkel; ein Stumpfwinkel; ein Spitzwinkel.

Ist r größer als die obige Schranke, so ist die Lage der Einheitskugeln 1 bzw. 2 nicht fixiert, es ist eine Lagerung mit isoliertem Punkt.

$$k = 3$$

Ist r kleiner als M_1, so sind die Lagerungen eindeutig (Ein Oktaeder Typus). Also wenn $r < M_1$ ist, sind die drei Konfigurationen identisch.



Im Inervall $(M_1; M_2)$ ist die Lage einer, im Fall $r > M_2$ bereits die Lage aller drei Einheitskuneln nicht fixiert, bloß die Berührung der „Großkugeln" ist notwendig.

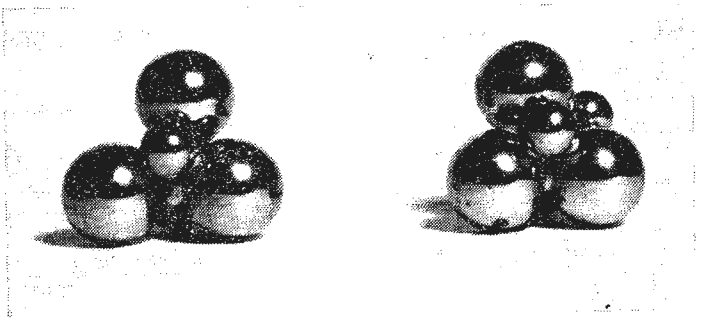
⟨4. k⟩

Ist r in den drei Typen größer als die Werte

$$1+\sqrt{2} = 2{,}4142\ldots; \qquad 4-\sqrt{6} = 1{,}551\ldots; \qquad 4+\sqrt{6} = 6{,}449\ldots$$

so ist es eine Lagerung mit isoliertem Punkt. Nur die Lage der „Großkugeln" ist fixiert: ein erguläres Tetraeder.

Ist r kleiner als obige Werte, so wird die Konstruktion auch im Fall $k = 1$ nicht eindeutig, der Winkel $X^1E^2E^1$ ist in den drei Typen der Lagerungen verschieden.



Ist $k = 2$, so sind die drei Lagerungen auch nicht identisch, aber sie sind stabil.

⟨5, k⟩

⟨5,1⟩ ergibt in allen Fällen eine Lagerung mit isoliertem Punkt.

§3. Wir zeigen, wie im Fall $k \leq 12$ das sog. TAMMES-Problem zur Lagerung von kongruenten Kugeln in einer Kugel umgewandelt werden kann. Das in der Biologie aufgetauchte Problem kann vom Standpunkt der Konstruktion folgendermaßen aufgefaßt werden: Wie kann man auf einer Kugel k Punkte so lagern, daß der kleinste Abstand zwischen den Punkten möglichst groß sei. Bezeichnen wir den kleinsten sphärischen Abstand zwischen den Punkten mit δ, und schreiben wir um jeden Punkt einen Kreis mit Radius $\delta/2$, dann entsteht eine Kreispackung.

SATZ 2. *Das Minimum vom Radius einer Kugel, die* $k \leq 12$ *nicht ineinandergreifende Einheitskugeln enthält ist*

$$P[0,k] = \frac{1}{\sin \alpha_k} + 1,$$

wo α_k *der sphärische Radiuswert der auf einer Kugeloberfläche am dichtesten gelagerten* k *kongruenten Kreise ist. Der Minimalradius* P *kann in einer Lagerung realisiert werden, wo die Mittelpunkte der Einheitskugeln auf der Kugeloberfläche vom Radius* $R = P - 1$ *in einer den* TAMMES-*Problem entsprechenden optimalen Konstruktion gelagert sind.*

Beim Beweis wenden wir den in unserer vorhergehenden Arbeit [3] benützten Hilfssatz H. 1 an, in folgender Formulierung: $\overline{\text{H}}$. 1: Sind die durch die n Punkte bestimmten Mindestabstände in einer Kugel von Mittelpunkt O und Radius R größer als R, so wächst der Abstand jeglicher inneren Punkte B von den Punkten der Punktmenge, falls B sich auf der Halbgerade OB bewegt.

BEWEIS. Eine Kreispackung, die aus k kongruenten Kreisen besteht, sei auf einer Kugeloberfläche von Mittelpunkt G und Radius R_s. Bezeichnen wir den sphärischen Mittelpunkt der Kreise der Lagerung mit K^i,

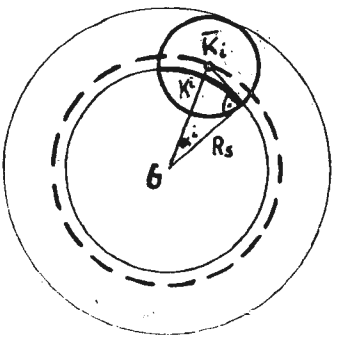


Fig. 3.

den Radius mit α^i. Projizieren wir K^i aus dem Mittelpunkt G auf die Kugeloberfläche vom Radius

$$R = \frac{R_s}{\cos \alpha^i},$$

und Mittelpunkt G $(K^i \to \overline{K^i})$(S. Fig. 3.).

Wenn um $\overline{K^i}$ eine Kugel von Radius $r = R_s \operatorname{tg} \alpha^i$ umbeschrieben wird, so gelangen wir zu einer Lagerung von k nicht ineinandergreifenden Kugeln von Radius r, die die Kugel von Radius $R+r$ enthält.

Umgekehrt: Sind die Mittelpunkte der k Kugeln mit Radius r auf einer Kugeloberfläche gelagert, so können wir dazu eindeutig eine sphärische Kreispackung fügen: Bezeichnen wir mit R den Radius der die Mittelpunkte der Kugeln enthaltenden Kugel. Die Kugeln der Lagerung bestimmen auf der Oberfläche der mit der Kugel von Radius R konzentrischen Kugel mit Radius $\sqrt{R^2-r^2}$ eine kongruente Kreispackung, deren sphärischer Radius $\arcsin \frac{r}{R}$ ist.

So ist R dann und nur dann minimal, wenn die Dichte der dazugehörigen Kreispackung maximal ist.

Wenn wir den Radius der Kugeln der Lagerung so wählen, daß $r = 1$ sei, dann ist

$$R(\alpha_k) = \frac{1}{\sin \alpha_k}.$$

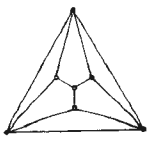
Der zur durch FEJES TÓTH für $k = 12$ angegebenen dichtesten Kreispackung gehörende Radiuswert ist $R(\alpha_{12}) = 1{,}9081\ldots$. Einheitskugeln bilden dann eine Lagerung, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte mindestens 2 ist, so können wegen H. 1. für $k = 12$ die Mittelpunkte der Einheitskugeln alle auf einer Kugeloberfläche gewählt werden. Also ist mit obiger Fügung das TAMMES-Problem mit der $|0,k| = [0,k] = \{0,k\}$ Kugellagerungs-Aufgabe identisch, wo $R|0,k| = R(\alpha_k) = P[0,k]-1 = \varrho\{0,k\}+1$ ist.

Für $k \leq 6$ ist die Behauptung mit dem in [3] zitierten HADWIGER Ergebnis äquivalent.

Aufgrund der Ergebnisse von SCHÜTTE und VAN DER WAERDEN [4] ist:

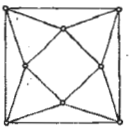
$\alpha_7 = 38°55'59''$,

$P[0,7] = 2{,}5913$.



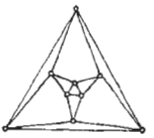
$\alpha_8 = 37°26'05''$,

$P[0,8] = 2{,}6451.$



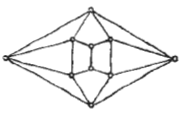
$\alpha_9 = 35°15'52''$,

$P[0,9] = 2{,}7323.$



Für $k = 10$ gibt es keine veröffentlichten Ergebnisse fürs TAMMES-Problem. Der zu der in [1] angegebenen guten Konstruktion gehörende Wert ist:

$\alpha'_{10} = 33°09'30''$, so fällt α_{10}

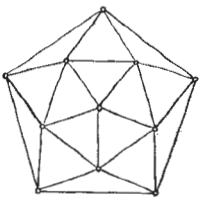


ins Intervall [33°09'30''; 34°46'51''], und der Radius $P[0,10]$ ins Intervall [2,7535; 2,8283].

Für $k = 11$ war die vermutete beste Lagerung die durch das Weglassen eines Punktes vom Ikosaeder entstandene Punktmenge, die in 1958 DANZER auf dem Oberwolfacher Kolloquium und in 1972 BÖRÖCZKY im durch FEJES TÓTH geführten Seminar bewiesen hat. So ist:

$\alpha_{11} = \alpha_{12}$ und

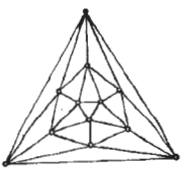
$P[0,11] = P[0,12].$



Ist $k = 12$, so gehört zum benützten Wert $R(\alpha_{12})$ der reguläre Ikosaeder:

$\alpha_{12} = 31°43'03''$,

$P[0,12] = 2{,}9081.$



Die in [2] angegebene Dichte-Funktion kann aufgrund des Obigen bis $P = 3$ weitergeführt werden (S. Fig. 4).

Statt $P\,[0, k]$ wird auf der Figur die Bezeichnung P_k benützt.

$$D = \frac{k}{P_k^3}.$$

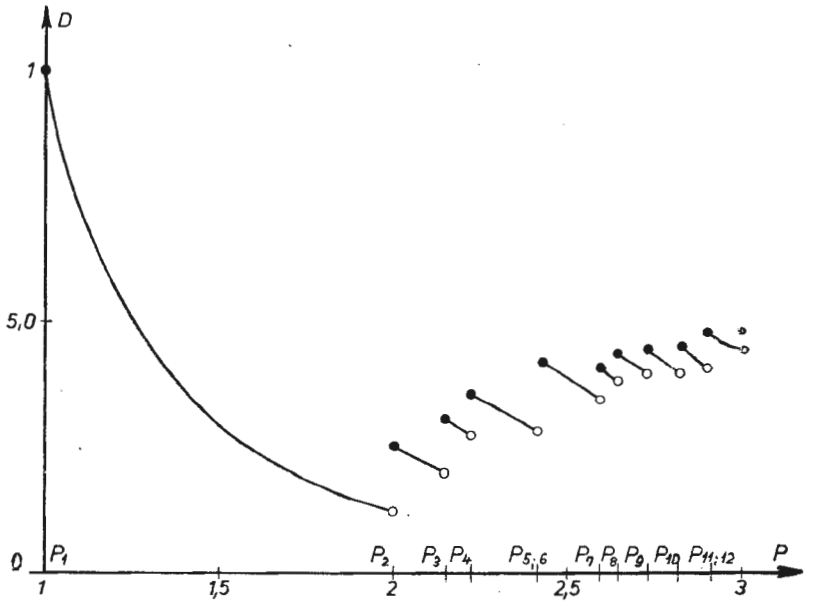


Fig. 4.

Literatur

[1] FEJES TÓTH, L., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin–Heidelberg–New York, (1972).

[2] HADWIGER, H., Einlagerung kongruenter Kugeln in eine Kugel, *Elem. Math.*, **7** (1952), 97–103.

[3] HOLLAI, M., Lagerungen inkongruenter Kugeln I., *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **17** (1974), 73–90.

[4] SCHÜTTE, K. – VAN DER WAERDEN, B. L., Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Ann.*, **123** (1951), 96–124.

TEILFOLGEN IN TOPOLOGISCHEN RÄUMEN

Von

PETER HAMBURG

Craiova, Rumänien

Eingegangen am 29. November (1974)

Es gibt zwei parallele Theorien der Konvergenz: die der verallgemeinerten Folgen (die wir hier kurz Folgen nennen werden) und die der Filter. Die Gleichwertigkeit dieser beiden Gestalten ist jedoch nicht völlig ausgearbitet, und das ist auch nicht möglich ohne einen entsprechenden Teilfolgenberiff. Die bekannteste Definition stammt von KELLEY [3]; damit kann man die folgenden wichtigen Eigenschaften der Konvergenz beweisen:

(I) Ist x ein Grenzpunkt einer Folge eines topologischen Raumes, so ist er Grenzpunkt für jede Teilfolge.

(I′) Ist x ein Häufungspunkt einer Teilfolge, so ist er auch Häufungspunkt der Folge.

(II) Ist x ein Häufungspunkt einer Folge, so gibt es eine gegen x konvergierende Teilfolge.

(II′) Ist x kein Grenzpunkt der gegebenen Folge, so gibt es eine Teilfolge, für die x kein Häufungspunkt ist.

Nehmen wir jetzt an, daß wir einen Teilfolgenbegriff gewählt haben, der diese vier Eigenschaften besitzt. Da jeder Grenzpunkt auch ein Häufungspunkt ist, können wir dann die Häufungspunkte mittels der Grenzpunkte angeben.

(III) x ist ein Häufungspunkt einer Folge genau dann, wenn er Grenzpunkt mindestens einer Teilfolge ist.

(III′) x ist ein Grenzpunkt einer Folge genau dann, wenn er Häufungspunkt jeder Teilfolge ist.

Damit können wir aus (II) und (II′) zwei neue Eigenschaften ableiten, die Grenzpunkte bzw. Häufungspunkte betreffen;

(IV) Ist x ein Häufungspunkt einer Folge, so gibt es eine Teilfolge, deren jede Teilfolge x als Häufungspunkt besitzt.

(IV′) Ist x kein Grenzpunkt einer Folge, so gibt es eine Teilfolge, die keine gegen x konvergierende Teilfolge besitzt.

Aber der Kelleysche Teilfolgebegriff ist nicht der einzige, der den obigen Bedingungen genügt – siehe Z. B. [5], [6], [7], [10] – und um eine enge Beziehung zwischen Folgen und Filter aufzubauen ist er auch nicht der beste. In der vorliegenden Arbeit wollen wir eine ordungsisomorphe Abbildung der Klasse aller Folgen der Menge X auf die Menge aller Filter finden. Dazu werden wir, einen besonderen Teilfolgenbegriff verwenden und zwar werden wir die Eigenschaft (I) als Grundbedingung betrachten: η ist eine *topologische Teilfolge* der Folge ξ, wenn in jeder Topologie der Grundmenge jeder Grenzpunkt von ξ Grenzpunkt auch für η ist, und wir schreiben $\xi \prec \eta$. Wir werden zeigen, daß dann auch (I'), (II), (II') erfüllt bleiben, und daß unsere Teilfolgen mit denen von WARD – [10] – übereinstimmen. Diese Teilfolgen können auch als zusammengesetzte Abbildungen aufgefasst werden, aber die hier auftretende Hilfsfunktionen sind nicht mehr eindeutig (Satz 4).

Die topologische Teilfolgenrelation ist eine Vorordnung. Die dazugehörende Partition liefert einen mit dem Verband $F(X)$ aller Filter isomorphen Verband und wenn man aus jeder Äquivalenzklasse je eine Folge auswählt, so bekommt man eine *Folgenmenge* deren Konvergenz die topologische Struktur der Grundmenge X eindeutig bestimmt.

Zuletzt geben wir eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Zuläßigkeit einer Vorordnung in der Klasse aller Folgen von X im Sinne, daß der gegebene Teilfolgenbegriff (I) und (II) erfüllt. Wir finden, daß es dann auch (I') und (II') gültig bleiben, und zeigen, daß die Kelleysche Teilfolge mit der topologischen zwar nicht zusammenfällt, jedoch nicht nur zuläßig ist, sondern für jede topologische Teilfolge η einer Folge ξ eine Folge ζ gibt, die mit η äquivalent ist und eine Kelleysche Teilfolge von ξ ist (Satz 6).

Wir werden die folgenden Bezeichnungen verwenden: Ist $(\xi(d) : d \in \in (D, \preceq))$ eine (verallgemeinerte) Folge in X, so bezeichnen wir mit ξ^d die Menge aller Punkte $\xi(d')$ mit $d \preceq d' \in D$, und $\mathcal{E}_\xi$ ist der zur Filterbasis $\{\xi^d : d \in D\}$ zugehörende Filter. Jeder Menge $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ ordnen wir die Menge $g\,\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{P}(X) : \underset{L \in \mathcal{L}}{\forall}\ B \cap L \neq \emptyset\}$ zu. Aus $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ folgt $g\,\mathcal{L}_2 \subset g\,\mathcal{L}_1$, und ist $\mathcal{E}$ ein Filter, so wird $g\mathcal{E}$ ein Gitter (grille [2]) sein, und $gg\mathcal{E} = \mathcal{E}$. Das Gitter $g\mathcal{E}_\xi$ wird mit $\mathcal{R}_\xi$ bezeichnet.

Ist der Umgebungsfilter des Punktes x des topologischen Raumes (X, τ) $\mathcal{U}_\tau(x)$, so wird $L_\tau \xi = \{x \in X : \mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{E}_\xi\}$ die Menge aller Grenzpunkte und $A_\tau \xi = \{x \in X : \mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{R}_\xi\}$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge ξ sein.

Ist $C \in \mathcal{E}_\xi$, so sagen wir, daß ξ auf C residuell ist. Wir bezeichnen mit $F(X)$ die Menge aller eigentlichen Filter über X.

Der Filter $\mathcal{E} = \{X\}$ heißt banal; eine Folge ξ ist banal, wenn $\mathcal{E}_\xi = \{X\}$ ist; eine Teilmenge B aus X ist banal, wenn sie entweder mit $\emptyset$ oder mit X gleich ist. Unter einer Vorordnung verstehen wir eine reflexive, transitive, binäre Relation.

1. DEFINITION. Bezeichnet man mit $\mathcal{S}(X)$ die Klasse aller Folgen der Menge X, so werden wir $\eta \in \mathcal{S}(X)$ *topologische Teilfolge* der Folge $\xi \in \mathcal{S}(X)$ nennen, wenn sie in jeder topologischen Struktur τ von X die Bedingung $L_\tau \xi \subset L_\tau \eta$ erfüllt.

Die Relation $\prec$ ist eine Vorordnung in $\mathcal{S}(X)$, die zugehörige Äquivalenzrelation sei mit $\sim$ bezeichnet. $\dot{\xi}$ ist die Äquivalenzklasse der ξ gehört, und $\dot{\mathcal{S}} = \mathcal{S}(X)/\sim$. Die Vorordnung $\prec$ bestimmt in $\dot{\mathcal{S}}$ eine Ordnung $\dot{\prec}$. Zwei Folgen heißen topologigisch äquivalent, wenn $\xi \sim \eta$ gilt.

2. SATZ. *Sind ξ und η zwei Folgen in X, so sind die folgenden Bedingungen gleichwertig:*

a) $\xi \prec \eta$.
b) $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$.
c) $\mathcal{R}_\eta \subset \mathcal{R}_\xi$.
d) *In jeder topologischen Struktur τ von X ist $A_\tau \eta \subset A_\tau \xi$.*

BEWEIS. Die Bedingung b) folgt aus a), denn aus $\mathcal{C}_\xi \not\subset \mathcal{C}_\eta$ folgt die Existenz einer Menge $G \in \mathcal{C}_\xi \setminus \mathcal{C}_\eta$ die nichtleer ist; es sei $x \in G$. Bezeichnet man mit τ die von der Topologie $\mathcal{G} = \{\emptyset, G, X\}$ bestimmte topologische Struktur, so wird $x \in L_\tau \xi$ und $x \notin L_\tau \eta$ sein, und $\xi \prec \eta$ ist nicht erfüllt.

Aus $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$ und $x \in L_\tau \xi$ folgt dagegen $\mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$, also $\xi \prec \eta$. Das heißt a) und b) sind gleichwertig. Ähnlich beweist man die Gleichwertigkeit von c) und d). Ist jetzt $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$, so wird $\mathcal{R}_\eta = g\,\mathcal{C}_\eta \subset g\,\mathcal{C}_\xi = \mathcal{R}_\xi$, und aus $\mathcal{R}_\eta \subset \mathcal{R}_\xi$ folgt weiter $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$, da $g\,\mathcal{R}_\eta$ gleich $\mathcal{C}_\eta$, $g\,\mathcal{R}_\xi$ gleich $\mathcal{C}_\xi$ ist.

Aus dem vorigen Satze ist ersichtlich, daß wir den Begriff der topologischen Teilfolge auch aus der Eigenschaft (I′) ableiten können.

Ist η eine Teilfolge im Sinne Kelleys für die Folge ξ, dann folgt daraus $\xi \prec \eta$. Die Umkehrung ist nicht wahr, da in R die Folgen $\xi(n) = n$ und $\eta(n) = n+1$ (bezüglich der natürlichen Ordnung von (N) topologisch äquivalent sind, jedoch ist ξ keine Teilfolge von η i. S. von KELLEY.

Bekanntlich entspricht jedem eigentlichen Filter $\mathcal{C}$ über X mindestens eine Folge $\xi \in \mathcal{S}(X)$ mit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\xi$. Es gilt also folgender.

3. ZUSATZ. Die Abbildung $\xi \to \mathcal{C}_\xi$ ist eine ordunngstreue Surjektion von $(\mathcal{S}(X), \prec)$ auf $(F(X), \subset)$ und $\dot{\xi} \to \mathcal{C}_\xi$ ein Verbandsisomorphismus zwischen $(\dot{\mathcal{S}}(X), \dot{\prec})$ und $(F(X), \subset)$. $\dot{\mathcal{S}}(X)$ ist also eine Menge.

4. Die Methode des Satzes 3 von [7] liefert eine neue Beschreibung der Teilfolgen. Ist die Abblidung f eine Fortsetzung von g, so schreiben wir $g \subset f$. Unter einer mehrwertigen Abbildung h von E in D verstehen wir eine binäre Relation $h \subset E \times D$. Dann ordnet h jedem Element $e \in E$ eine Menge $h(e) \subset D$ zu.

SATZ. *Für die Folgen $\xi = (\xi(d) : d \in (D, \leq'))$, $\eta = (\eta(e) : e \in (E, \leq''))$ aus X sind die folgenden Bedingungen gleichwertig:*

a) $\xi \prec \eta$.
e) $\forall_{d \in D} \exists_{e \in E} \forall_{e' \in E} \left[e \leq'' e' \Rightarrow \exists_{d' \in D} \left(d \leq' d' \;\&\; \xi(d') = \eta(e') \right) \right]$.

f) *Es gibt eine mehrdeutige Abbildung h von E in D so daß*

$$\xi \circ h \subset \eta \text{ und}$$

$$\underset{d\in D}{\forall}\ \underset{e\in E}{\exists}\ \underset{e'\in E}{\forall}\ \left[e \leq'' e' \Rightarrow \underset{d'\in D}{\exists}\ (d \leq' d' \,\&\, d' \in h(e'))\right]$$

gilt.

Für eine gegeben Teilfolge η von ξ kann man nähmlich h durch

$$h(e) = \{d \in D: \quad \xi(d) = \eta(e)\}$$

bestimmen.

Die Eigenschaft e) wurde in [10] als Definition benützt.

5. Die Kelleysche Teilfolgenrelation ist gröber als die Relation $\prec$. (Das folgt auch aus f). Daraus ergibt sich, daß auch $\prec$ die Eigenschaften (I), (I'), (II), (II') und dadurch auch (III), (III'), (IV), (IV') besitzt. Wir wollen jetzt alle möglichen Teilfolgenbegriffe betrachten, die diese acht Bedingungen erfüllen. Eine Vorordnung $\leq$ in $\mathcal{S}(X)$ heißt *zulässig*, wenn sie für jede topologische Struktur die Bedingungen (I) und (II) erfüllt.

SATZ. *Für die Zulässigkeit der Vorordnung $\leq$ ist es notwendig und hinreichend, daß sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt*:

g) *$\leq$ ist gröber als $\prec$.*

h) *Ist ξ, $\eta \in \mathcal{S}(X)$, $\xi \prec \eta$ und ist ξ nicht banal, so gibt es eine Folge $\xi \in \mathcal{S}(X)$ mit $\xi \leq \zeta$ und $\eta \prec \zeta$.*

i) *Ist ξ eine banale Folge und $x \in X$, so gibt es eine auf $\{x\}$ residuelle Folge ζ, für die $\xi \leq \zeta$ gilt.*

BEWEIS. g) *ist* gleichwertig mit der Bedingung, daß $\leq$ die Eigenschaft (I) besitzt. Ist $\leq$ zulässig, ξ nicht banal und η eine topologische Teilfolge von ξ, dann gibt es eine nicht banale Menge $C_0 \in \mathcal{C}_\xi$ und es sei $x \in X \setminus C_0$. Dann gehört mit B auch $B \setminus \{x\}$ zu $\mathcal{C}_\eta$. Wir betrachten die Topologie

$$\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{P}(X) : x \notin G\} \cup \{B \cup \{x\} : B \in \mathcal{C}_\eta\}.$$

Dann wird $\mathcal{U}_\tau(x) = \{B \cup \{x\} : B \in \mathcal{C}_\eta\}$ sein, und $\mathcal{C}_\eta$ ist der gröbste Filter, der feiner als $\mathcal{C}_\xi$ und $\mathcal{U}_\tau(x)$ ist; ausserdem wird $\mathcal{U}_\tau(x) \subset g\, \mathcal{C}_\xi$. Darum ist x ein Häufungspunkt der Folge ξ, und es gibt eine Folge ζ, für die $\xi \leq \zeta$, $x \in L_\tau \zeta$ gilt. Daraus folgt aber $\mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{C}_\zeta$, $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\zeta$, also auch $\mathcal{C}_\eta \subset \mathcal{C}_\zeta$, d.h. $\eta \prec \zeta$, und die Bedingung (h) ist erfüllt.

Wenn ξ eine banale Folge ist, und $x \in X$, dann betrachten wir die diskrete topologische Struktur τ_0. Aus $x \in A_{\tau_0} \xi$ folgt die Existenz einer Folge ζ, die x als Grenzpunkt besitzt, darum auf $\{x\}$ residuell ist, und ausserdem eine $\leq$ Teilfolge von ξ ist.

Die Bedingungen g), h), i) sind hinreichend. Es sei $x \in A_\tau \xi$. Wenn ξ nicht banal ist, dann gibt es eine topologische Teilfolge η, die gegen x konvergiert, und nach h) kann man eine Folge ζ finden mit $\xi \preceq \zeta$ und $\eta \prec \zeta$; dann konvergiert aber auch ζ gegen x. Ist dagegen ξ banal, so gibt es nach i) eine auf $\{x\}$ residuelle $\preceq$ Teilfolge ζ von ξ, und dann ist $x \in L_\tau \zeta$, in jeder topologischen Struktur τ.

6. SATZ. *Jede zulässige Vorordnung $\preceq$ der Klasse $\mathcal{S}(X)$ erfüllt die Bedingungen* (I) *bis* (IV').

BEWEIS. Wir haben in Satz 2 bewiesen, daß aus (I) immer (I') folgt. Es bleibt zu zeigen, daß auch (II') erfüllt ist. Dazu werden wir den Satz 5 benützen. Es sei $x \notin L_\tau \zeta$. Ist ζ banal, dann wählen wir eine nicht banale Umgebung V von x, und ein Element $y \in X \setminus V$. Die auf $\{y\}$ residuelle $\preceq$ – Teilfolge ζ der Folge ξ besitzt dann in x keinen Häufungspunkt. Ist dagegen ξ nicht banal, dann wählen wir zuerst eine topologische Teilfolge η von ξ, für die $x \notin A_\tau \eta$ ist. Es gibt dann eine $\preceq$ – Teilfolge ζ von ξ mit $\eta \prec \zeta$. Dann ist aber x kein Häufungspunkt für ζ.

7. Die Kelleysche Teilfolgenrelation ist mehr als zulässig; sie genügt folgender viel stärkerer Bedingung:

SATZ. *Für jede topologische Teilfolge η der Folge ξ gibt es eine mit η topolcgisch äquivalente Folge ζ, die eine Kelleysche Teilfolge von ξ ist.*

BEWEIS. Es sei $\xi = (\xi(d) : d \in (D, \preceq'))$, $\eta = (\eta(e) : e \in (E, \preceq''))$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$; in der Menge $F = D \times E$ betrachten wir die Produktordnung $\preceq$ und führen eine Abbildung $h : F \to D$ folgendermaßen ein: $h(d, e) = d$, wenn $\xi(d) \in \eta^e$; im Gegenfall wählen wir als $h(d, e)$ ein Element $d' \in D$ mit den Eigenschaften $d \preceq' d'$ und $\xi(d') \in \eta^e$. (Es gibt ein solches Element, da $\xi^d, \eta^e \in \mathcal{C}_\eta$ sind, und so ist $\xi^d \cap \eta^e \neq \emptyset$.) Die Abbildung h besitzt die Eigenschaft

$$\underset{d \in D}{\forall} \; \underset{f \in F}{\exists} \; (f \preceq f' \in F \Rightarrow d \preceq' h(f)),$$

da die obige Bedingung für irgendeine $e \in E$ und $f = (d, e)$ erfüllt wird. Das heißt, daß die Folge $\zeta = \xi \circ h$ eine Kelleysche Teilfolge von ξ ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\eta \sim \zeta$ ist. Dazu beweisen wir zuerst, daß $\xi^{(d, e)} = \xi^d \cap \eta^e$.

Aus $d \preceq' h(d, e)$ und $\xi(h(d, e)) \in \xi^d \cap \eta^e$ folgt $\zeta^{(d, e)} \subset \xi^d \cap \eta^e$. Ist $x \in \xi^d \cap \cap \eta^e$, so gibt es ein $d' \in D$ mit $d \preceq d'$ und $x = \xi(d')$, und aus $\xi(d') \in \eta^e$ folgt $h(d', e) = d'$, das heißt $\zeta(f') = \xi(d')$ ist gleich x für das Element $f' = (d', e) \succeq f = (d, e)$. Damit ist $\zeta^{(d, e)} = \xi^d \cap \eta^e$ bewiesen. Aber $\{\xi^d \cap \eta^e : (d, e) \in F\}$ ist eine Basis für $\mathcal{C}_\eta$, da $\mathcal{C}_\xi \subset \mathcal{C}_\eta$ ist, und so folgt $\mathcal{C}_\eta = \mathcal{C}_\zeta$, also $\eta \sim \zeta$.

Bibliographie

[1] BRUNS, G. – J. SCHMIDT, Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern, *Math. Nahrichten*, **13** (1955), 169–186.
[2] CHOQUET, G., Sur les notions de filtre et grille, *C. R. Paris*, **224** (1947), 171–173.
[3] KELLEY, J. L., Convergence in Topology, *Duke Math. Journ.*, **17** (1950), 277–283.
[4] KELLEY, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, 1955.
[5] MCSHANE, E. J., A Theory of Convergence, *Canad. Journ. Math.*, **6** (1954), 161–168.
[6] NÖBELING, G., Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes, *Sitz. ber. Math. Naturw. Kl. Kgl. Bayer. Akad. Wiss. München*, (1950), 133–141.
[7] SCHMIDT, J., Eine Studie zum Begriff der Teilfolge, *Jahresber. der D. M. V.*, **63** (1960), 28–50.
[8] THAMPURAN, D. V., Extended Topology: Moore-Smith Convergence I., *Math. Annalen*, **158** (1965), 57–68.
[9] TUKEY, J. W., *Convergence and Uniformity in Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1940.
[10] WARD, A. J., Notes on general topology; I. Convergence of directed nets, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **61** (1965), 877–882.

ÜBER DIE AUF SCHEIBENKLASSEN BEZÜGLICHE NEWTONSCHE ZAHL DER KONVEXEN SCHEIBEN

Von

ISTVÁN HORTOBÁGYI

Lehrstuhl für Darstellende und Projektive Geometrie
der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 31. Jänner 1975)

Herrn Professor L. FEJES TÓTH zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Unter Scheiben verstehen wir beschränkte, abgeschlossene ebene Bereiche. Es sei K eine konvexe Scheibe. Die Maximalzahl der zu K kongruenten und nicht übereinandergreifenden Scheiben, die sich mit K berühren, nennen wir die Newtonsche Zahl der Scheibe K.

L. FEJES TÓTH [1] hat eine obere Schranke für die Newtonsche Zahl der konvexen Scheiben gegeben. In [2] und in dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer Variante des Problems der Newtonschen Zahl.

Es ist bekannt [3], daß für jede konvexe Scheibe F ein Minimalkreisring (Kreisring mit minimalen Breite) eindeutig existiert, der die Grenzlinie von F enthält. Seien a und $b > a$ zwei beliebige pozitive Zahlen. Wir bezeichnen die Gesamtheit derjenigen konvexen Scheiben für deren Radien p, q ihrer Minimalkreisring begrenzenden Kreise, die Ungleichung $a \leq p \leq q \leq b$ gilt, mit $\Phi(a, b)$.

Es sei K eine konvexe Scheibe. Die Maximalzahl der zu der Scheibenklasse $\Phi(a, b)$ gehörenden, nicht übereinandergreifenden Scheiben, die sich mit K von draussen berühren, nennen wir die auf die Scheibenklasse $\Phi(a, b)$ bezügliche Newtonsche Zahl der konvexen Scheibe K.

In den folgenden Sätze, unter gewissen Bedingungen geben wir obere Schranken für die, auf die Scheibenklasse $\Phi(a, b)$ bezügliche Newtonsche Zahl einer konvexen Scheibe. Nach dem Beweisabschluß der Sätze geben wir Beispiele an, die zeigen daß die Schranken genau sind.

SATZ 1. *Im Falle $b < 3a$ gilt für die, auf die Scheibenklasse $\Phi(a, b)$ bezügliche Newtonsche Zahl N, einer beliebigen konvexen Scheibe K mit Umfang k die Ungleichung*

$$N \leq \frac{k + 2b\pi}{\sqrt{4a^2 - (b-a)^2}}.$$

BEWEIS. Es sei K eine konvexe Scheibe mit Umfang k, $\Phi(a, b)$ eine Scheibenklasse mit der Bedingung $b<3a$. Wir setzen voraus, daß die Scheibe K mit den Scheiben F_i von $\Phi(a, b)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ sich von draußen berührt.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Minimalkreisringes von F_i mit O_i, die äußeren Parallelbereiche von K des Abstands a und b mit K_a und K_b bzw. Es seien l_1 und l_2 die Grenzlinie von K_a und K_b bzw, weiterhin $T \underset{\text{def}}{\equiv} K_b \backslash K_a$. Offensichtlich ist, daß die Punkte O_i in T liegen und die Scheiben F_i paarweise punkfremd sind. So $O_i O_j \geq 2a$, wenn $i \neq j$.

Es sei n_i die durch O_i gehende Normale von l_1, offenbar ist n_i die Normale von l_2 auch. Seien O_i' und O_i'' die Schnittpunkte der Normale n_i mit l_1 und l_2 bzw. Wenn $O_i \neq O_j$ dann, wegen $b<3a$, $O_i'' \neq O_j''$. Wir bezeichnen mit s_{ij} die Länge des zur Sehne $O_i'' O_j''$ gehörenden Bogens von l_2. Wir zeigen, daß $s_{ij} \geq \sqrt{4a^2-(b-a)^2}$ ist.

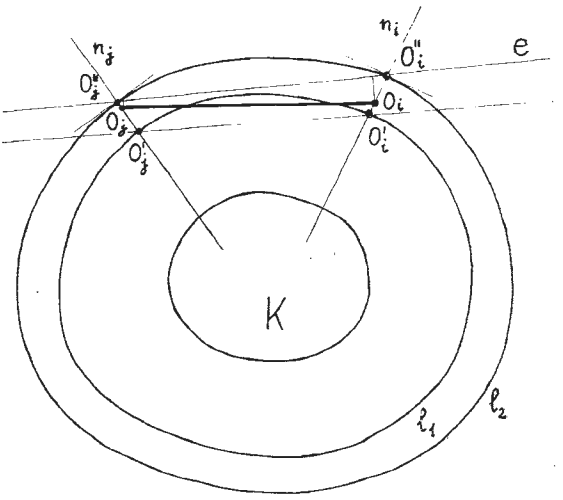


Fig. 1.

Zuerst untersuchen wir den Fall, wenn die Punkte O_i'' und O_j'' auf derselben Seite der Gerade $O_i O_j$ liegen (Fig. 1.). Wir können voraussetzen, daß der Abstand des Punktes O_i' von der Gerade $O_i'' O_j'' \equiv e$ mindestens so groß ist wie der Abstand des Punktes O_j'. Wir betrachten den durch die Gerade e und durch O_j gehenden zu e parallele Gerade begrenzten Streifen. Die Breite dieses Streifens ist höchstens $b-a$. Weil die Strecke $O_i O_j$ in diesem Streifen liegt und $O_i O_j \geq 2a$ ist, so folgt daß die ortogonale Projektion v_{ij} der Strecke $O_i O_j$ auf der Gerade e mindestens

$$\sqrt{4a^2-(b-a)^2}$$

ist.

Weil l_2 konvex ist und $O_i O_i''$ und $O_j O_j''$ die Normalen von l_2 sind, $\sphericalangle O_i O_i'' O_j \leq 90°$ und $\sphericalangle O_j O_j'' O_i \leq 90°$ folgt. Daraus stellt sich hervor, daß die Projektion der Strecke $O_i O_j$ auf der Strecke $O_i'' O_j''$ liegt, und so $s_{ij} \geq O_i'' O_j'' \geq v_{ij} \geq \sqrt{4a^2-(b-a)^2}$ ist.

Wenn die Punkte O_i'' und O_j'' auf der verschiedenen Seite der Gerade $O_i O_j$ liegen, dann gilt einfach $s_{ij} \geq O_i O_j > \sqrt{4a^2-(b-a)^2}$ (Fig. 2).

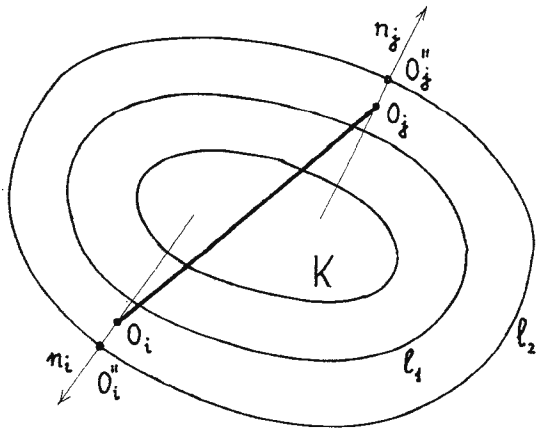


Fig. 2.

Es ist bekannt [4], daß die Länge von l_2 $k+2b\pi$ ist, so

$$k+2b\pi = s_{12}+s_{23} \ldots +s_{N1} \geq N\sqrt{4a^2-(b-a)^2}$$

und

$$N \leq \frac{k+2b\pi}{\sqrt{4a^2-(b-a)^2}}.$$

(Hier bezeichnet $s_{i\,i+1}$ denjenigen Bogen von l_2, der im seinen Inneren keinen Punkt von O_j'' enthält.)

SATZ 2. *Wir bezeichnen die Radien des den Minimalkreisring einer konvexen Scheibe K mit Umfang k begrenzenden äußeren und inneren Kreises mit R und r bzw. Im Falle* $R+b \leq \sqrt{2}(r+a)$ *und* $r \leq a$, *gilt für die auf die, auf die Scheibenklasse* $\Phi(a, b)$ *bezügliche Newtonsche Zahl N der Scheibe K*

$$N \leq \frac{k+2b\pi}{2a}.$$

BEWEIS. Wir brauchen die bei dem Beweis des Satzes 1. eingeführten Bezeichnungen und wir stützen uns auf die Figur 3.

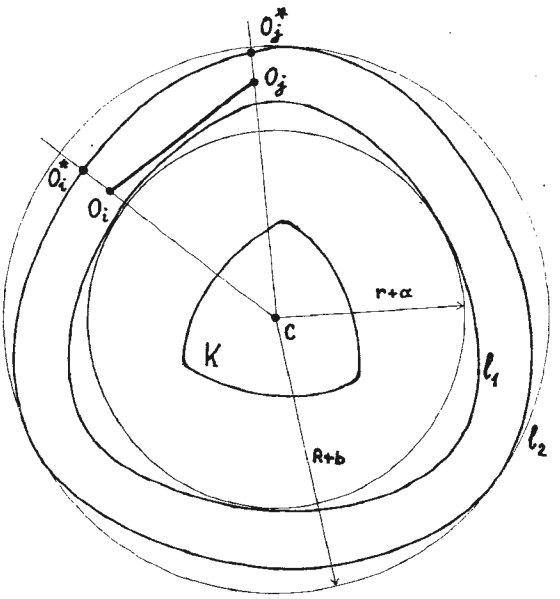


Fig. 3.

Es seien C der Mittelpunkt des Minimalkreisrings der Scheibe K und O_i^* der Schnittpunkt der Halbgerade CO_i mit l_2. Wir zeigen, daß $O_i^* O_j^* \geq 2a$ $(i \neq j)$ ist.

Weil F_i und F_j keine gemeinsame innere Punkte haben und der Bereich T in dem durch die Kreisen mit dem Mittelpunkt C und den Radien $r+a$ und $R+b$ begrenzten Kreisring liegt, haben wir $O_i O_j \geq 2a \geq r+a$ und $CO_i \geq r+a$, $CO_j \leq R+b \leq \sqrt{2}\,(r+a)$.

Mit Rücksicht auf die obigen Ungleichungen haben wir

$$\cos(\sphericalangle\, CO_i O_j) = \frac{\overline{CO_i}^2 + \overline{O_i O_j}^2 - \overline{CO_j}^2}{2\overline{CO_i} \cdot \overline{O_i O_j}} \geq 0\,,$$

so $\sphericalangle\, CO_i O_j \leq 90°$.

Von $\sphericalangle\, CO_i O_j \leq 90°$ folgt $O_i^* O_j \geq O_i O_j$. Ebenso bekommen wir

$$O_i^* O_j^* \geq O_i^* O_j, \quad \text{so} \quad O_i^* O^* \geq 2a\,.$$

Weil die Länge von l_2 $k+2b\pi$ ist und der Umfang des inbeschriebenen konvexen N-Eckes $O_1^* O_2^* \ldots O_N^*$ diesen Wert nicht übersteigt, haben wir $k+2b\pi \geq 2Na$, und so $N \leq \dfrac{k+2b\pi}{2a}$.

Die Anwendung dieses Ergebnisses für die Bestimmung der für die Scheibenklasse $\Phi\left(\begin{matrix}1 & \sqrt{2} \\ 2 & 2\end{matrix}\right)$ bezüglichen Newtonschen Zahl N eines Quadrats mit Kantenlänge 1 und eines Rechtecks mit Kantenlengen 1 und 2, ergibt $N \leq 8$ und $N = 10$. Die Figuren 4/*a* und 4/*b* zeigen, daß diese Schranken genau sind.

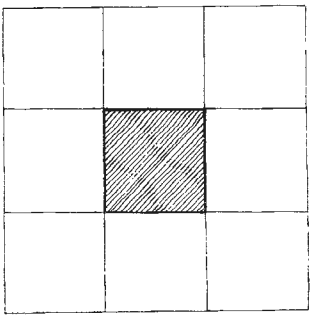


Fig. 4/a.

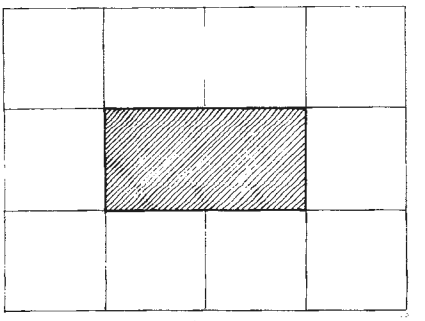


Fig. 4/b.

Es ist leicht einzusehen, wenn $K \in \Phi(a, b)$ und $b < 3a$ ist, so läßt sich das Ergebnis des Satzes 1. für die Bestimmung der Newtonschen Zahl von K anwenden. Für die Newtonsche Zahl S_n der regulären n-Ecke bekommen wir $S_3 \leq 13$, $S_4 \leq 8$, $S_5 \leq 7$, $S_6 \leq 7$ und wenn $n > 6$ dann $S_n \leq 6$. Im Falle $n = 4$ und $n \geq 7$ ist die Schranke genau.

Literatur

[1] FEJES TÓTH, L., On the number of equel discs that can touch another of the same kind, *Studia Sci. Math. Hung.*, **2** (1967), 363–367.
[2] HORTOBÁGYI I., Konvex lemezek Newton-számáról, *Mat. Lapok*, **3–4** (1972), 313–317.
[3] BONNESEN, T.–FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper*, Berlin (1934).
[4] JAGLOM, I. M.–BOLTJANSKI, W. G., *Konvexe Figuren*, Berlin (1956).

A CLASSIFICATION OF MEANS

By

G. J. SZÉKELY

Department of Probability Theory of the L. Eötvös University Budapest

(Received February 11, 1975)

1. Introduction

A general definition of the notion of mean is the following: ([1], [2]) let F be an arbitrary real valued function of n real variables and let $\mathbf{x} = (x_1 x_2, \ldots, x_n)$ be in the domain of F; if there is a unique vector $\mathbf{y} = (y, y, \ldots, y)$ having equal components in the domain of F such that $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$ then $y = m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is the F-mean of the numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$. If $m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ can be represented in the form

$$f^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)$$

where f is an invertable function defined on a subset of the real line and $p_1, p_2, \ldots, p_n$ is a sequence of nonnegative numbers, the sum of which is positive, then $m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a weighted quasi-arithmetic mean of $x_1, x_2, \ldots, x_n$. The purpose of many investigations is to find general conditions which ensure that a mean should be a weighted quasi-arithmetic mean (see e. g. [3], [4]).

These general means occur very frequently in the statistical estimations. If the density function of a random variable can be written in the form constant $\cdot p^{-1} \exp\left[g\left(\frac{x}{p}\right)\right]$, where g is a suitable function, then the likelihood estimation of the scale parameter p is a mean of the measurements $x_1, x_2, \ldots, x_n$, under general conditions (see [5]). (In the case $g(x) = -\frac{x^2}{2}$ we get the normal density function, and the likelihood estimation of p is the root-mean-square of the measurements.) The most

important means (e. g. the weighted quasi-arithmetic means) have the property that

$$\min_{1\leqq i\leqq n} x_i \leqq m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \max_{1\leqq i\leqq n} x_i .$$

In this paper we propose a classification for these "internal" means, but first we mention a probabilistic method for proving inequalities.

2. A probabilistic method for proving inequalities

Let $X, X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of independent identically distributed real valued random variables. Suppose that the distribution function of X depends on some parameters $y_1, y_2, \ldots y_m$ $((y_1, \ldots, y_m) \in Y \subset R_m)$.

If f_1 and f_2 are continuous, strictly monotonic functions on the interval (a, b), $\Pr(a < X < b) = 1$,

$$\mu_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i^{-1}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} f_i(x_j)}{n}\right) \quad i = 1, 2$$

is the f_i-quasi-arithmetic mean of $X_1, X_2, \ldots, X_n$ and $E(f_i(X)) < \infty$ ($E(\ldots)$ denotes the expectation of the random variable in the brackets) then by the strong law of large numbers

$$\lim_{n\to\infty} \mu_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f_i^{-1}\left(E(f_i(X))\right)$$

with probability one. Here the right side depends on $y_1, y_2, \ldots, y_m$, therefore we denote it by $h_i(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

If $\mu_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \mu_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n = 1, 2, \ldots$ for every number $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in the interval (a, b) — this is certainly true if e.g. f_2 is increasing and $f_2 f_1^{-1}$ is convex in (a, b); see [6] p. 75. — then

$$h_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \leqq h_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) .$$

EXAMPLE. Let $f_r(x) = x^r$ if r is an arbitrary real number different from 0 and let $f_0(x) = \log x$, $x \in (0, +\infty)$ (here and in the following log denotes the natural logarithm). The f_r-quasi-arithmetic mean of the positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (the power mean) will be denoted by m_r. The mean m_r is a nondecreasing function of r, therefore if X is a random variable uniformly distributed over the interval (y_1, y_2), $(0 < y_1 < y_2 < \infty)$ and

$$M_r(y_1, y_2) = \{E(X^r)\}^{1/r} \quad (r \neq 0), \quad M_0(y_1 y_2) = \exp(E(\log X)) .$$

then $M_r(y_1, y_2)$ is also a nondecreasing function of r for every fixed pair of positive numbers y_1 and y_2 $(y_1 < y_2)$.

It is easy to compute that

$$M_r(y_1, y_2) = \left\{\frac{(r+1)(y_1-y_2)}{y_1^{r+1}-y_2^{r+1}}\right\}^{1/r} \quad (r \neq 0, -1)$$

$$M_{-1}(y_1, y_2) = \frac{y_1-y_2}{\log y_1 - \log y_2} \quad \text{and} \quad M_0(y_1, y_2) = \frac{1}{e}\left(\frac{y_1^{y_1}}{y_2^{y_2}}\right)^{\frac{1}{y_1-y_2}}.$$

Thus we have proved e.g. that

$$(*) \qquad \sqrt{xy} \leq \frac{x-y}{\log x - \log y} \leq \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$$

for arbitrary positive unequal numbers x and y, because $(*)$ is equivalent to

$$M_{-2}(x, y) \leq M_{-1}(x, y) \leq M_{-\frac{1}{2}}(x, y).$$

REMARKS. $\dfrac{x-y}{\log x - \log y}$ is the so-called logarithmic mean of the unequal positive numbers x and y. (If $x = y$, then by definition their logarithmic mean equals to x.)

The logarithmic mean has many applications in the physics and chemistry (see e.g. [7]). In [7] and [8] the authors proved similar but weaker inequalities than $(*)$ by another method.

In [9] it is proved that

$$\frac{|z_1-z_2|}{|\log z_1 - \log z_2|} \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{2}$$

for arbitrary unequal nonzero complex numbers z_1 and z_2. (Even though the complex log is a multivalent function the inequality holds in the sense that no matter which values are taken for $\log z_1$ and $\log z_2$, the inequality is valid.)

On the generalisations of the logarithmic mean see [10], [11] and [12].

If $x, y > 0$,

$$a_1 = \frac{1}{2}(x+y), \qquad g_1 = \sqrt{xy},$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+g_n), \qquad g_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}g_n},$$

then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} g_n =$ the logarithmic mean of x and y (see e.g. [13]).

The logarithmic mean appears in the following problem too: Let X be a random variable the distribution function of which has the form

$$\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

and suppose that the positive numbers a and b are given $(0<a<b<\infty)$. It is easy to compute that $\Pr(a<X<b)$ will be maximum if

$$\sigma^2 = \frac{a-b}{\log a - \log b} \cdot \frac{a+b}{2}$$

i.e. if σ is the geometric mean of the logarithmic mean and the arithmetic mean of a and b.

3. A classification of means

Let $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be an arbitrary internal mean which is defined for arbitrary positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Let $r' = \{\sup r : m \geq m_r$ for every sequence of positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ and $r'' = \{\inf r : m \leq m_r$ for every sequence of positive numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. The means m and $\overline{m}$ are by definition in the same class iff r' and r'' are the same for m and $\overline{m}$.

The difference $\bar{r} = r'' - r'$ is a "distance" between the mean m and the set of power means $\{m_r\}$.

EXAMPLE. If $m(x, y)$ is the logarithmic mean of the positive numbers x and y, then $\bar{r} = \frac{1}{3}$ $\left(r' = 0 \text{ and } r'' = \frac{1}{3}\right)$.

PROOF. $(*)$ proves that

$$r' \geq 0 \text{ and } r'' \leq \frac{1}{2} \quad (m_0 = M_{-2} = \sqrt{xy}).$$

If $r > 0$ and $\log x - \log y > 2^{1/r}$ then

$$\frac{x-y}{\log x - \log y} < \left(\frac{x^r + y^r}{2}\right)^{1/r}$$

therefore $r' = 0$.

Now we prove that $r'' \leq \frac{1}{3}$, i.e. if $y \geq x$ then

$$(x-y)\left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{2}\right)^{-3} \geq \log \frac{x}{y}$$

(because of the symmetry we may suppose without the loss of generality that $y \geq x$).

If $x = y$ then the equality holds, therefore it is enough to prove that

$$\frac{\partial}{\partial y}(x-y)\left(\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{2}\right)^{-3} \geq \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{x}{y}$$

and a simple calculation reduces this inequality to $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^4 \geq 0$.

Finally we prove that if $\delta > 0$ is an arbitrary small positive number, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ is a small positive number, $x = 1+\varepsilon$ and $y = 1$ then

$$\frac{x-y}{\log x - \log y} > \left(\frac{x^{1-\delta/3}+y^{1-\delta/3}}{2}\right)^{3/1-\delta}$$

i.e. if ε is small enough, then

$$\frac{\log(1+\varepsilon)}{\varepsilon} < \left(\frac{1+(1+\varepsilon)^{1-\delta/3}}{2}\right)^{-3/1-\delta}.$$

This relation is true because (using Taylor series)

$$1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{3}-\ldots < \left(\frac{1+(1+\varepsilon)^{1-\delta/3}}{2}\right)^{-3/1-\delta} =$$

$$= 1-\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{24}\right)\varepsilon^2+o(\varepsilon^2).$$

qu.e.d.

References

[1] CHISINI, O., Sul concetto di media, *Periodico di mathematica*, Ser. 4., 4 (1929).
[2] DE FINETTI, B., Sul concetto di media, *Giorn. Ist. Ital. Attuarii*, **2** (1931), 369–396.
[3] VERESS, P., A középérték fogalmáról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **43** (1936), 46–60.
[4] ACZÉL, J., *Vorlesungen über Functionalgleichungen und ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag, Berlin 1961.
[5] DODD, E. L., Internal and external means arising from the scaling of frequency functions, *Ann. Math. Stat.*, **8** (1937), 12–20.
[6] HARDY, G. H.–LITTLEWOOD, J. E.–PÓLYA, G., *Inequalities*, University Press, Cambridge, 1952.
[7] TETTAMANTI, K.–SÁRKÁNY, G.–KRÁLIK, D.–STOMFAI, R., Über die Annäherung logaritmischer Functionen durch algebraische Functionen, *Per. Polytechn. Chemical Eng.*, **14** (1970), 99–111.
[8] MITRINOVIC, D. S., *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff LTD Groningen, The Netherlands, 1964.
[9] EVANS, R. J., *The Amer. Math. Monthly*, **79** (1972), 1036.
[10] CISBANI, R. Contributi alla teoria delle medie I., *Metron* **13** (2).
[11] CISBANI, R., Contributi alla teoria delle medie II., *Merton* **13** (3).
[12] KRÁLIK, D., Über einige Verallgemeinerungsmöglichkeiten des logarithmischen Mittels zweier positiver Zahlen, *Per. Polytechn. Chemical Eng.*, **16** (1972), 373–379.
[13] CARLSON, B. C., The logarithmic mean, *The Amer. Math. Monthly*, **79** (1972), 615.

О МИНИМУМЕ СУММЫ v-СТЕПЕНЕЙ СТОРОН n-УГОЛЬНИКОВ ВПИСАННЫХ В ОКРУЖНОСТЬ

АГОТА ТЕМЕШВАРИ

Кафедра Начертательной и Проективной Геометрии Университета им. Л. Этвеша, Будапешт

К шестидесятилетию со дня рождения Л. ФЕЙЕША ТОТА

(Поступило 13. 02. 1975)

В статье [1] П. Сас решил минимум суммы квадратов длин сторон n-угольников, вписанных в данную окружность, если центр окружности является внутренней или граничной точкой n-угольника. Он доказал, что минимум достигается

в случаях $n \geq 7$, если n-угольник правилен;
в случаях $6 \geq n \geq 4$, если одна из сторон n-угольников диаметр окружности, а другие стороны раьны (в дальнейшем для таких типов n-угольников обозначением F_n пользуемся);
в случае $n = 3$, если треугольник прямоуголен.
Решения подобных проблем находятся в [2] и [3].

В этой работе мы занимаемся нахождением минимума суммы v-степеней сторон n-угольников, если $v > 2$. Доказываемся следующая

ТЕОРЕМА: *Пусть $n \geq 3$ натуральное число и $v > 2$ произвольное вещественное число, далее v_n вещественные числа, определяемые равенством*

$$n \cdot \sin^{v_n} \frac{\pi}{n} = 1 + (n-1) \sin^{v_n} \frac{\pi}{2(n-1)} .$$

Сумма степени v сторон n-угольников, вписанных в данную окружность и центр которой является внутренней или граничной точкой n-угольника будет минимально,

в случаях $v \geq v_n$, если n-угольник правилен и
в случаях $v \leq v_n$, если n-угольник имеет тип F_n.

Вводим следующие обозначения. Пусть A и B данные точки единичной окружности центром O, а C любая точка окружности такая, что $\overline{AC} \geq \overline{BC}$. Обозначим через F точку деления пополам дуги $\widehat{ACB}$, пусть $AOF \sphericalangle = 2\alpha$ и $FOC \sphericalangle = 2\delta$. Тогда

$$H_\alpha(\delta) = \overline{AC}^\nu + \overline{BC}^\nu = 2^\nu [\sin^\nu(\alpha+\delta) + \sin^\nu(\alpha-\delta)]$$

при

$$0 \leq \delta \leq \alpha \quad \text{и} \quad \alpha+\delta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Для доказательства теоремы мы пользуемся двумя леммами.

Лемма 1. *Пусть $\nu > 2$ данное вещественное число. Если функция $H_\alpha(\delta)$ от переменной δ, уменьшается, тогда для всех β, удовлетворяющих $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, и функция $H_\beta(\delta)$ уменьшается. Если функция $H_\alpha(\delta)$ возрастает, тогда для $0 < \gamma < \alpha$ $H_\gamma(\delta)$ тоже возрастает.*

Лемма 2. *Пусть $\nu > 2$ вещественное число и $i(\nu)$ является точкой ипфлексии функции* $\sin^\nu x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Если $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, то $H_\alpha(\delta)$ возращается.

2. Если $\frac{\pi}{4} < \alpha < i(\nu)$, то максимум функции $H_\alpha(\delta)$ достигается в единственной точке, которая является внутренней точкой интервалла (1).

3. Если $i(\nu) \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $H_\alpha(\delta)$ уменьшается.

Доказательство леммы 1. Мы доказываем только первую часть леммы 1., так как доказательство второй части происходит подобным спасобом. Ввиду того, что функция $H_\alpha(\delta)$ уменьшается, имеет $\alpha+\delta > i(\nu)$, поэтому $\beta+\delta > i(\nu)$.

Утверждение леммы выпольняется, если для каждого значения δ $\alpha-\delta > i(\nu)$, ибо в этом случае мы имеем $\beta-\delta > i(\nu)$, и функция $\sin^\nu x$ (внизу) вогнута, если $x > i(\nu)$.

Пусть $\beta+\delta > i(\nu)$ и $\beta-\delta < i(\nu)$. Так как $H_\alpha(\delta)$ уменьшается, следовательно

$$\frac{\mathrm{d}\, H_\alpha(\delta)}{\mathrm{d}\,\delta} \leq 0.$$

Мы покажем, что

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_\beta(\delta)}{\mathrm{d}\,\beta\,\mathrm{d}\,\delta} \leq 0,$$

из этого следует утверждение леммы 1. Имеем

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_\beta(\delta)}{\mathrm{d}\,\beta\,\mathrm{d}\,\delta} =$$

$$= 2^v \cdot v \left(\sin^{v-2}(\beta+\delta)\left[v \cdot \cos^2(\beta+\delta) - 1\right] - \sin^{v-2}(\beta-\delta)\left[v \cdot \cos^2(\beta-\delta) - 1\right]\right) =$$

$$= 2^v \cdot v \cdot (k_1 - k_2).$$

Так как $\beta+\delta > i(v)$, поэтому $\cos^2(\beta+\delta) < \cos^2(i(v))$, далее $\cos^2(i(v)) = \frac{1}{v}$, поэтому $k_1 < 0$. Из неравенства $\beta-\delta < i(v)$ следует, что $k_2 > 0$, следовательно

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_\beta(\delta)}{\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\delta} \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть

$$h_\alpha(\delta) = \frac{H_\alpha(\delta)}{2^v} = \sin^v(\alpha+\delta) + \sin^v(\alpha-\delta).$$

Очевидно свойства возрастания функций $H_\alpha(\delta)$ и $h_\alpha(\delta)$ одинаковы, если v данное число.

1. Пусть $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$. Если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\delta \neq 0$ и $\delta \neq \frac{\pi}{4}$, то

$$h'_{\pi/4} = v \cdot \cos^{v-1}\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) \cdot h_1(\delta),$$

где

$$h_1(\delta) = \operatorname{tg}^{v-1}\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\delta\right).$$

Из $v > 2$ слдует, что $h_1(\delta) > 0$, поэтому

$$h'_{\pi/4}(\delta) > 0.$$

Если $\delta = 0$ или $\delta = \frac{\pi}{4}$, то $h'_{\pi/4}(\delta) = 0$. Следовательно

$$h'_{\pi/4}(\delta) \geq 0,$$

т. е. $h_{\pi/4}(\delta)$ возращается. Окончательно утверждение 1. следует из леммы 1.

2. Пусть $\frac{\pi}{4} < \alpha < i(v)$. Тогда

$$h'_\alpha(\delta) = v \cdot \sin^{v-1}(\alpha-\delta) \cdot \cos(\alpha-\delta) \cdot f(\delta),$$

где

$$f(\delta) = \left[\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg}(\alpha-\delta) - \cos 2\alpha\right]^{v-1} \left[\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha-\delta)\right] - 1.$$

Так как

$$v \cdot \sin^{v-1}(\alpha-\delta) \cdot \cos(\alpha-\delta) > 0,$$

поэтому нам достаточно изучать функцию $f(\delta)$. Посмотрим, сколько экстремумов будет у функции $f(\delta)$ в случаях $\delta \neq 0$ и $\delta \neq \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Пусть $\sin 2\alpha = a$, $\cos 2\alpha = b$ и $x = \operatorname{ctg}(\alpha - \delta)$. Легко видеть, что

$$f'(\delta) = (\nu - 1)(a \cdot x - b)^{\nu-2} \cdot a \cdot x' \left(b + a \cdot \frac{1}{x}\right) - (a \cdot x - b)^{\nu-1} \cdot a \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x',$$

где

$$a \cdot x - b \neq 0, \quad b + a \cdot \frac{1}{x} \neq 0 \quad \text{и} \quad x' \neq 0.$$

Для функции $f(\delta)$ существует экстремум, если равенство

$$(\nu - 1) \cdot b \cdot x^2 + (\nu - 2) \cdot a \cdot x + b = 0$$

имеет решение.

Так как $\nu > 2$, $a > 0$ и $b > 0$, один из корней равенства неотроцителен, из-за $x = \operatorname{ctg}(\alpha - \delta) > 0$, для функции $f(\delta)$ он не дает места экстремума. Следовательно у функции $f(\delta)$ имеется единственный экстремум внутру интервалла. Из иследования функции $h'_\alpha(\delta)$ следует, что в начале $h'_\alpha(\delta) > 0$ и $h'_\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. Это значит, что утверждение 2. выпольняется.

3. Пусть $i(\nu) \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. По основе леммы 1., уменьшение функции $h_\alpha(\delta)$ достоточно доказать в том случае, если $\alpha = i(\nu)$. Так как доказательство происходит таким же образом как в случае 2., поэтому его не изложим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ вершины n-угольника, вписанного в единичную окружность центром O, и $A_i O A_{i+1} \sphericalangle = 2\alpha_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$ далее

$$H = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i A_{i+1}}^{\nu} = 2^{\nu} \sum_{i=1}^{n} \sin^{\nu} \alpha_i,$$

где

$$0 < \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi \quad \text{и} \quad \nu > 2.$$

Известно, что функция $\sin^{\nu} x$ выпуклая, если $0 \leq x < i(\nu)$ и вогнутая, если $i(\nu) < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Предположим, что $i(\nu) < \alpha_2 \leq \alpha_1$. Возрастанием угла α_1, не изменяя суммы $\alpha_1 + \alpha_2$, можно добиться или $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, или $\alpha_2 = i(\nu)$. Очевидно, что функция H уменьшается.

Если в интервалле $\left(i(v); \frac{\pi}{2}\right)$ находятся по крайней мере два угла, тогда мы повторяем предыдущий метод. Мы получим следующие случаи:

1. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что $\alpha_2, \ldots, \alpha_n < i(v)$. Поэтому

$$\sum_{i=2}^{n} \sin^r \alpha_i \geq (n-1) \cdot \sin^r \frac{\pi}{2(n-1)}.$$

Равенство имеется только тогда, если $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{\pi}{2(n-1)}$. В этом случае оказывается, что функция H минимальна, если n-угольник тип F_n.

2. Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \leq i(v)$, то функция H минимальна, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{\pi}{n}$, т. е. n-угольник правилен.

3. Пусть $i(v) < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2, \ldots, \alpha_n < i(v)$. Очевидно, что

$$\sum_{=2}^{n} \sin^r \alpha_i \geq (n-1) \cdot \sin^r \frac{\pi - \alpha_1}{n-1}.$$

Равенство имеется только тогда, если $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{\pi - \alpha_1}{n-1}$.

Посмотрим три возможных случая.

(а) $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

Так как $\alpha_2 < \frac{\pi}{n}$, по основе леммы 2., функция H уменьшается, если угол α_2 возрастает до угла $\frac{\pi}{n}$ и α_1 уменьшается, причем их сумма не изменяется. Если после уменьшения угла α_2 имеем $\alpha_1 \leq i(v)$ то из выпуклости функции $\sin^r x$ следует, что H минимальна, если n-угольник правилен.

Если $\alpha_1 > i(v)$, то повторяя этот метод и получаем, что H будет минимальной, если n-угольник правилен.

(б) Пусть $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2 \cdot i(v)$.

Тогда на основе леммы 2. функция H уменьшается, если α_1 возрастает до $\frac{\pi}{2}$. Так

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\sum_{i=2}^{n} \sin^v \alpha_i \geq (n-1) \sin^v \frac{\pi}{2(n-1)},$$

т. е. H минимальна, если n-угольник имеет тип F_n.

(в) Пусть $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 + \alpha_2 < 2 \cdot i\,(v)$.

В этом случае из леммы 2. следует, что H уменьшается если α_1 возрастает до $\frac{\pi}{2}$, или уменьшается до $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Тогда мы получим случай 1. или случаи 3 (а).

Мы получили, что функция H минимальна, если n-угольник правилен или тип F_n.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ стороны n-угольника, вписанного в единичную окружность и

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^v}{n} \right)^{1/v}$$

их степенное среднее порядка v.

Предположим, что существует число v_0, что

$$b \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{v_0}}{n} \right)^{1/v_0}, \tag{2}$$

где b сторона правильного n-угольника вписанного в единичную окружность. Равенство достигается, если $a_1 = \ldots = a_n = b$.

Известно, что если $v_0 < v$, то

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{v_0}}{n} \right)^{1/v_0} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{v}}{n} \right)^{1/v} \tag{3}$$

равенство достигается только тогда, если $a_1 = \ldots = a_n$. Из (2) и (3) следует, что если существует такое число v_0, что $\sum_{i=1}^{n} a_i^{v_0}$ минимально, если n-угольник правилен, то в случаях $v > v_0$ $\sum_{i=1}^{n} a_i^{v}$ минимально тогда и только тогда, если n-угольник правилен.

Известно [1], что если $v = 2$ и $n \geq 7$, то H минимально, если n-угольник правилен. Из предведущих следует, что в случаях $v > 2$ и $n \geq 7$ H минимально, если n-угольник правилен. Обозначим через H_1 и H_2 соответственно сумму v-степени правильного n-угольника или n-угольника типом F_n, вписанных в единичную окружность.

Если $n = 3, 4, 5, 6$ и $v = 2$, то

$$H_1 > H_2$$

далее легко видеть, что если $v = 8$, то

$$H_1 < H_2 .$$

Так как функция $H_1 - H_2$, зависящая от v, непрерывна, поэтому существует число $v_n > 2$, что $H_1 - H_2 = 0$. Пусть v_n наименьший. Но из (2) и (3) следует, что в случаях $v > v_n$ функция H минимально только тогда, если n-угольник правилен. Если $v = v_n$, то H минимально, если n-угольник правилен или типом F_n и если $2 \leq v < v_n$, то H минимально, если n-угольник тип F_n.

Таким образом теорема доказана.

Литература

[1] Szász P., Egy minimum-feladat a körbe beirt sokszögekre vonatkozólag, *Mat. Lapok*, **42** (1935), 93–106.

[2] Fejes Tóth L., Egy sokszög oldalainak hatványösszegéről, *Mat. Lapok*, **19** (1968), 55–59.

[3] Хорват Е., О сумме степени расстояний, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **17** (1974), 125–129.

BEGRÜNDUNG DER MÖBIUSSCHEN KREISEBENE AUS DEM SPIEGELUNGSBEGRIFF

Von

EMIL MOLNÁR

Lehrstuhl für Darstellende und Projektive Geometrie der
Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 25. Oktober 1974)

§ 1. Einleitung

Die im Buch [2] von BACHMANN entwickelten Methoden lassen sich auf die MÖBIUSschen Kreisebenen anwenden. Wir meinen, daß diese Begründung auch die Beziehungen unter den metrischen Ebenen und den hyperbolischen Räumen erleuchtet [4], sogar haben wir noch weitere Möglichkeiten für die Verallgemeinerungen und man kann auch offene Fragen aufwerfen.

Wir stellen in **§ 2.** ein Axiomensystem der Kreisebene zuerst in geometrischer Form zusammen, wo die Kreisspiegelung ein Grundbegriff ist, das Senkrechtstehen als abgeleiteter Begriff eingeführt wird. Die Inzidenz- und Ortogonalitätsaxiomen kann man in der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}$ der Kreisebene formulieren. Diese Umformulierung läßt sich ohne die beiden Dreispiegelungsaxiomen machen. Dann geben wir auch ein Gruppentheoretisches Axiomensystem. Wir nehmen eine Gruppe $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ an, die von der invarianten Menge $\mathcal{S}$ involutorischer Elemente erzeugt wird. Die Elemente von $\mathcal{S}$ werden Kreisspiegelungen genannt. Die Punkte sind als spezielle Teilmengen von $\mathcal{S}$ zu definieren, da keine involutorische Bewegung zum Beispiel auf der klassischen Kreisebene existiert, die nur einen Punkt der Kreisebene festläßt.

In **§ 3.** begründen wir die Theorie der Kreisbüschel. Hier spielt ein Lotensatz die wichtigste Rolle, und der Aufbau ist im Geiste von [1], [2] durchgeführt.

In **§ 4.** ergibt sich die Klassifikation von $\mathcal{G}(\mathcal{S})$. Hier ist es uns gelungen, einige Beweise in [1] zu vereinfachen. Wir sehen ein, daß $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ zu ihrer inneren Automorphismusgruppe isomorph ist.

In **§ 5.** befassen wir uns mit den Kreisbündeln, um die projektive Einbettung der Kreisebene vorzubereiten ([1], [5]).

In **§ 6.** heben wir eine Verwandschaft der metrischen Ebenen hervor. Sie kann man in $\mathcal{G}$ representieren: $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ hat solche Untergruppen, welche euklidische, elliptische, zulässig hyperbolische, halbelliptische Gruppen-

ebenen sind. Hier wird der Satz von MIQUEL bewiesen, der bei der Algebraisierung anwendbar ist ([7], [3]).

In **§ 7.** skizzieren wir den Gedankengang der projektiven Einbettung und der Algebraisierung. Wir können auf die Arbeiten ([1], [2], [3], [5], [6], [7]) hinweisen, wo sich die Elemente des Gedankenganges befinden lassen. Endlich erhalten wir die algebraische Darstellung unserer Kreisebenen, welche pythagoreische Kreisebenen genannt werden können, denn sie sind mit Hilfe pythagoreischer Körper ähnlicherweise darstellbar, wie die Klassische MÖBIUS-Ebene von reellen Körper gekennezichnet ist.

H. MÄURER gab in seiner Arbeit [8] eine interessante Begründung der Möbiusebene, wo Kreisspiegelungen existieren. Mir scheint, daß man auf Grund seiner Arbeit kein solches spiegelungsgeometrisches Axiomensystem zusammenstellen kann, welches – außer dem euklidischen Fall – auch die anderen metrischen Ebenen umfaßt. Diese Frage ist noch zu untersuchen.

§ 2. Das Axiomensystem der metrischen Kreisebene Erste Folgerungen

Die *metrische Kreisebene* ist eine Struktur $\mathcal{K}(\mathbf{P}, \mathbf{K}, \mathrm{I}, \mathcal{G}(\mathcal{S}))$, welche den Axiomen 1–5. genügt. Hier bezeichnen wir mit **P** die Menge der *Punkte*, mit **K** die Menge der *Kreise*, mit I die *Inzidenzrelation* zwischen den Punkten und den Kreisen. $\alpha \,\mathrm{I}\, A$ oder $A \,\mathrm{I}\, \alpha$ bezeichnet, wenn der Punkt A mit dem Kreis α inzidiert. $\alpha \,\mathrm{И}\, A$ oder $A \,\mathrm{И}\, \alpha$ bezeichnet, wenn α und A nicht inzident sind. $\mathcal{G}$ ist die *Bewegungsgruppe* von $\mathcal{K}$, die Menge $\mathcal{S}$ der *Kreisspiegelungen* ist das Erzeugendensystem von $\mathcal{G}$.

Wir bezeichnen die Elemente von **P** mit $A, B, C, \ldots$, die Elemente von **K** mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

DEFINITION 2.1. Unter einer Kreisspiegelung (Inversion) an dem Kreis α versteht man eine bijektive Abbildung von **P** auf sich, die involutorisch ist, die Inzidenz erhält, und die genau die Punkte des Kreises α festläßt. Diese Abbildung wird auch mit α bezeichnet, also die Elemente von $\mathcal{S}$ kann man auch mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ darstellen.

Es sei 1 das Einselement von $\mathcal{G}$, d.h. die Identität von **P**. Es sei $\Phi = \alpha\beta \ldots \gamma$ dasjenige Element von $\mathcal{G}$, das einem beliebigen Punkt A sein Bild zuordnet, in welches er bei den nacheinander ausgeführten Abbildungen $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ übergeführt wird:

$$A^{\Phi} \equiv \left(\ldots\left((A^{\alpha})^{\beta}\right)\ldots\right)^{\gamma} \equiv A^{\alpha\beta\ldots\gamma},\ \Phi^{-1} = \gamma^{-1}\ldots\beta^{-1}\alpha^{-1} = \gamma\ldots\beta\alpha$$

ist das zu Φ inverses Element von $\mathcal{G}$.

Sind $\Phi, \Psi, \Sigma \in \mathcal{G}$, so dürfen wir die Bezeichnung $\Phi^{-1}\Psi\Phi = \Psi^{\Phi}$ einführen, weil $(\Psi^{\Phi})^{\Sigma} = \Psi^{(\Phi\Sigma)}$ und $(\Psi\Sigma)^{\Phi} = \Psi^{\Phi}\Sigma^{\Phi}$ gelten, wie man es leicht sehen kann.

„$\equiv$" bedeutet die Gleichheit der Grundelemente (Punkte, Kreise), „$=$" die Gleichheit der Abbildungen. Später dürfen wir diese Unterscheidung weglassen. ▮

AXIOM 1. *Es gibt drei verschiedene Punkte. Irgend drei verschiedene Punkte inzidieren genau mit einem Kreis.*

DEFINITION 2.2. Der von den Punkten P, Q, R bestimmte Kreis wird auch mit $(PQR) \equiv \alpha$ bezeichnet.

Die Kreise α, β berühren sich im Punkt X, wenn sie genau einen gemeinsamen Punkt X haben: $\alpha \cap \beta \equiv X$.

α und β schneiden sich, wenn sie zwei gemeinsame Punkte X, Y haben: $\alpha \cap \beta \equiv \{X, Y\}$. ▮

AXIOM 2. *Zu einem beliebigen Kreis α gibt es genau eine Kreisspiegelung an α.*

SATZ 2.1. *Sind $\alpha \in \mathcal{S}$, $\Phi \in \mathcal{G}$, so gilt $\alpha^\Phi \in \mathcal{S}$, also ist die Abbildung $\Phi^{-1}\alpha\Phi$ eine Kreisspiegelung an dem Kreis α^Φ* (Abb. 1.).

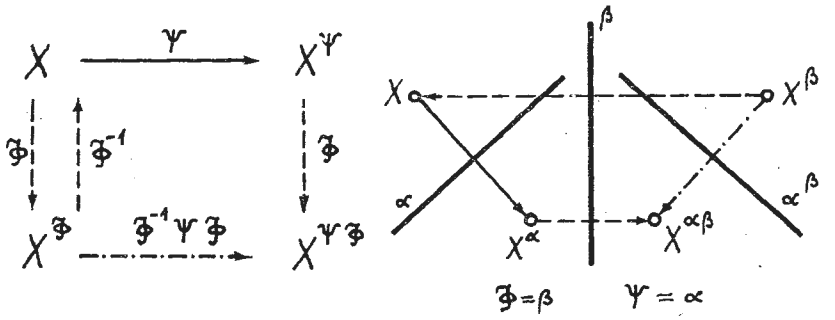


Abb. 1.

BEWEIS. Es gilt $P\,\mathrm{I}\,\alpha \leftrightarrow P^\alpha \equiv P$, darum gilt $(P^\Phi)^{\Phi^{-1}\alpha\Phi} \equiv P^{\alpha\Phi} \equiv P^\Phi$. Aus $Q^{\Phi^{-1}\alpha\Phi} \equiv Q$ folgt $(Q^{\Phi^{-1}})^\alpha \equiv Q^{\Phi^{-1}}$. So kann man sehen, daß genau die Punkte des Kreises α^Φ bei der Abbildung $\alpha^\Phi = \Phi^{-1}\alpha\Phi$ festbleiben. Aus (A. 2.) folgt die Behauptung. ▮

Unsere Abbildungen demonstrieren den Gedankengang auf der klassischen Möbiusebene. Also die klassische euklidische Ebene ist mit dem idealen Punkt ∞ erweitert; ∞ inzidiert mit jeden Geraden; die gewöhnlichen Kreise und die erweiterten Geraden sind als „die Kreise der Möbiusebene" betrachtet.

Den „Kreisspiegelungen" entsprechen die gewöhnlichen Geradenspiegelungen ($\infty \leftrightarrow \infty$), bzw. die gewöhnlichen Inversionen (Kreismittelpunkt $\leftrightarrow \infty$). Unserem Axiomensystem genügt nicht nur die klassische Möbiusebene, sondern genügen auch allgemeinere Strukturen.

DEFINITION 2.3. Ein Kreis α ist zum Kreis β senkrecht: $\alpha \perp \beta$, wenn $\alpha \neq \beta$ und $\alpha^\beta \equiv \alpha$ gelten. ▮

SATZ 2.2. *Das Senkrechtstehen ist eine symmetrische Relation:* $\alpha \perp \beta$ *gilt genau dann, wenn* $\alpha\beta$ *ein involutorisches Element von* $\mathcal{G}$ *ist. Zu* $\mathcal{G}$ *gehören nur solche Abbildungen, die das Senkrechtstehen erhalten.*

BEWEIS. Nach (S. 2.1.) sind die folgende Behauptungen für $\alpha \neq \beta$ äquivalent:

$$\alpha^\beta \equiv \alpha \Leftrightarrow \beta\alpha\beta = \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta = \beta\alpha = (\alpha\beta)^{-1} \Leftrightarrow \alpha\beta\alpha = \beta \Leftrightarrow \beta^\alpha \equiv \beta .$$

Wenn $\Phi \in \mathcal{G}$ und $\alpha \perp \beta$ ist, so gelten $\alpha\beta = \beta\alpha$ und $\alpha^\Phi \beta^\Phi = (\alpha\beta)^\Phi = (\beta\alpha)^\Phi = \beta^\Phi \alpha^\Phi$, also $\alpha^\Phi \perp \beta^\Phi$. ∎

AXIOM 3. *Wenn* $X \neq Y$ *und* $X, Y \,\mathrm{I}\, \alpha$ *gilt, so gibt es genau einen Kreis* β, *für den* $\beta \,\mathrm{I}\, X, Y$ *und* $\alpha \perp \beta$ *ist. Ist* $X \,\mathrm{И}\, \alpha$ *und* $\beta \,\mathrm{I}\, X, X^\alpha$, *dann gibt es* Y *und* Z *so, daß* $\alpha \cap \beta \equiv \{Y, Z\}$ *ist.*

FOLGERUNGEN: Wenn $\alpha \perp \beta$ und $X \,\mathrm{I}\, \beta$ gilt, so gilt auch $X^\alpha \,\mathrm{I}\, \beta$; das folgt aus (D. 2.3.).

Wenn $X \neq X^\alpha$ und $\beta \,\mathrm{I}\, X, X^\alpha$ gilt, so ist $\alpha \perp \beta$; denn $\beta^\alpha \equiv (X X^\alpha Y)^\alpha \equiv (X^\alpha X Y) \equiv \beta$ ist (A. 3.).

Ist $\alpha \perp \beta$, so gibt es Y, Z, für die $\alpha \cap \beta \equiv \{Y, Z\}$ ist; denn im Falle $X \,\mathrm{И}\, \alpha$, $X \,\mathrm{I}\, \beta$ gilt $X^\alpha \,\mathrm{I}\, \beta^\alpha \equiv \beta$ (A. 3., S. 2.4.). ∎

SATZ 2.3. *Zu* α *und zu* $X \neq Y$ *gibt es einen Kreis* β, *für den* $X, Y \,\mathrm{I}\, \beta$ *und* $\alpha \perp \beta$ *gelten. Ist* $X^\alpha \neq Y$, *so ist* β *eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Sind unter den Punkten X, X^α, Y, Y^α drei voneinander verschieden, so inzidieren sie genau mit einem Kreis β, und gilt $\alpha \perp \beta$ (A. 3.).

Ist $X^\alpha \equiv Y$, so ist jeder Kreis β, für den $X, Y \,\mathrm{I}\, \beta$ gilt, zu α senkrecht.

Sind $X^\alpha \equiv X$ und $Y^\alpha \equiv Y$, so folgt der Satz aus der ersten Behauptung des Axioms 3. ∎

SATZ 2.4. (Ergänzung zu A. 1.)

a) *Ein beliebiger Kreis ist wenigstens mit vier Punkten inzident.*
b) *Ein beliebiger Punkt ist wenigstens mit sechs Kreisen inzident.*
c) *Zu einem beliebigen Kreis gibt es zu ihm nicht senkrechten Kreis.*

BEWEIS. *a)* Nach (A. 1.) gibt es drei verschiedene Punkte A, B, C und existiert der mit A, B, C inzidente Kreis $\alpha \equiv (A\,B\,C)$. Es sei ε ein beliebiger Kreis. Da die Kreisspiegelung ε von der Identität verschieden ist, gibt es einen Punkt P, für den $P \neq P^\varepsilon$ gilt. Wir können voraussetzen, daß der Punkt A von diesen beiden verschieden ist. Zu $\beta \equiv (P P^\varepsilon A)$ und zu ε existieren die Punkten E_1, E_2 so, daß $\varepsilon \cap \beta \equiv \{E_1, E_2\}$ gilt (A. 3.).

Auch zu β gibt es einen Punkt Q mit $Q \neq Q^\beta$. Gilt $Q \,\mathrm{I}\, \varepsilon$, so hat ε die verschiedene Punkte E_1, E_2, Q, Q^β.

Gilt $Q \,\mathrm{И}\, \varepsilon$, so existiert der Kreis $\varphi \equiv (P P^\varepsilon Q Q^\varepsilon)$ (S. 2.3.), für den $\varphi \cap \beta \equiv \{P, P^\varepsilon\}$ und $\varphi \perp \varepsilon$ gelten. Aus (A. 3.) und (A. 1.) folgt dann, daß solche Punkte F_1, F_2 existieren, für die $\varphi \cap \varepsilon \equiv \{F_1, F_2\}$ gilt, also hat ε die vier verschiedene Punkte E_1, E_2, F_1, F_2.

b) Es sei H ein beliebiger Punkt. Nach (a) existieren zwei Kreise $\alpha \equiv (HPP^\beta)$ und $\beta \equiv (HQQ^\alpha)$, für die $\alpha \perp \beta$ ist. Sogar H ist auch mit den Kreisen (HPQ), (HQP^β), $(HP^\beta Q^\alpha)$, $(HQ^\alpha P)$ inzident. Alle sechs Kreise sind verschieden.

c) Wie wir im Beweis der Behauptung (a) gezeigt haben, es existiert $P \not\equiv P^\varepsilon$ zu beliebige ε, und gelten $E_1, E_2 \mathrm{I}\, \varepsilon$, $\varepsilon \perp \beta$ für den dortigen Kreis $\beta \equiv (E_1 E_2 P P^\varepsilon)$. Es sei F ein von E_1, E_2 verschiedener Punkt auf ε. Es sei $\gamma \equiv (P F E_1)$. Dann ist $\varepsilon \not\perp \gamma$, weil $\gamma \mathrm{I}\!\!\mathrm{I} P^\varepsilon$ gilt, sonst wäre $\gamma \mathrm{I}\, E_2$ und so $\gamma \equiv \beta$, im Widerspruch zu unseren Annahmen. ∎

SATZ 2.5.

a) *Gelten* $\alpha \cap \beta \equiv X$ *und* $\varepsilon \perp \alpha, \beta$, *so ist* $\varepsilon \mathrm{I}\, X$.

b) *Aus* $\alpha \not\equiv \beta$; $X \mathrm{I}\, \alpha, \beta, \varepsilon$ *und* $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ *folgt* $\alpha \cap \beta \equiv X$ (Abb. 2.).

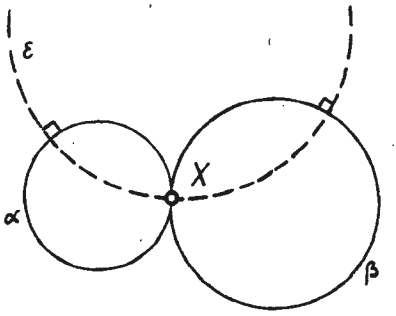


Abb. 2.

BEWEIS. *a)* Aus $(\alpha \cap \beta)^\varepsilon \equiv \alpha^\varepsilon \cap \beta^\varepsilon \equiv \alpha \cap \beta$ folgt $X^\varepsilon \equiv X$, d.h. $X \mathrm{I}\, \varepsilon$.

b) Wenn $Y \not\equiv X$, $Y \mathrm{I}\, \alpha, \beta$ wären, so wäre $Y^\varepsilon \mathrm{I}\, \alpha, \beta$. Im Falle $Y \not\equiv Y^\varepsilon$ wäre $\alpha \equiv \beta \equiv (XYY^\varepsilon)$ (A. 1.), im Falle $Y \equiv Y^\varepsilon$ wäre ebenso $\alpha \equiv \beta$ (A. 3.), was ein Widerspruch wäre. ∎

SATZ 2.6.

a) *Zu verschiedenen Kreisen* α, β *und zu einem – nicht zu beiden inzidenten – Punkt* X *gibt es einen Kreis* ε, *für den* $\alpha, \beta \perp \varepsilon$ *und* $X \mathrm{I}\, \varepsilon$ *sind. Gilt* $X^\alpha \not\equiv X^\beta$, *so ist* ε *eindeutig bestimmt.*

b) *Aus* $\alpha \cap \beta \equiv \{P, Q\}$ und $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ *folgt* $P^\varepsilon \equiv Q$.

c) *Aus* $\alpha \cap \beta \equiv \{P, Q\}$ *und* $X^{\alpha\beta} \equiv X$ *folgt* $X \in \{P, Q\}$.

d) *Gelten* $\alpha \cap \beta \equiv \{P, Q\}$ *und* $\varepsilon, \varphi \perp \alpha, \beta$; $\varepsilon \not\equiv \varphi$, *so ist* $\varepsilon \cap \varphi$ *leer* (Abb. 3.).

e) *Ist* $\alpha \cap \beta$ *leer, und gelten* $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ *und* $X \not\equiv X^\alpha \equiv X^\beta \equiv Y$, *so ist* $\varepsilon \mathrm{I}\, X, Y$. *Existieren diese* X, Y, *so sind sie eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. *a)* Sind unter den Punkten $X, X^\alpha, X^\beta, X^{\alpha\beta}, X^{\beta\alpha}$ drei voneinander verschieden, so sind alle Punkte genau mit einem Kreis ε inzident, und gilt $\alpha, \beta \perp \varepsilon$ (A. 3.).

Wenn $X^\alpha \equiv X^\beta \not\equiv X$ ist, so ist jeder Kreis ε mit $X, X^\alpha \mathrm{I}\, \varepsilon$ zu α und β senkrecht.

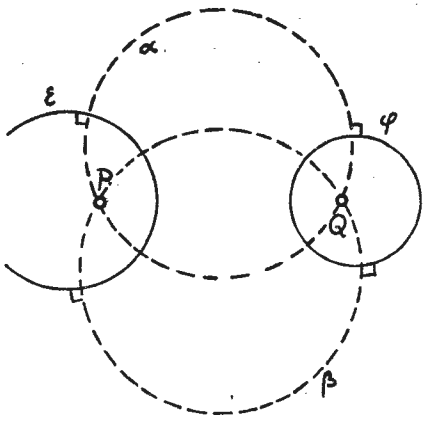


Abb. 3.

Sind – zum Beispiel – $X \not\equiv X^\alpha$ und $X, X^\alpha \mathrm{I} \beta$, so existiert genau ein Kreis ε mit $\varepsilon \perp \beta$ und $\varepsilon \mathrm{I} X, X^\alpha$ nach der ersten Behauptung von (A. 3.), deswegen gilt auch $\varepsilon \perp \alpha$ nach der zweiten.

b) $(\alpha \cap \beta)^\varepsilon \equiv \alpha^\varepsilon \cap \beta^\varepsilon \equiv \alpha \cap \beta$. Wäre $\varepsilon \mathrm{I} P$, d.h. $P^\varepsilon \equiv P$, so gilt $Q^\varepsilon \equiv Q$, d.h. $Q \mathrm{I} \varepsilon$. Dann wären $\alpha, \beta, \varepsilon \mathrm{I} P, Q$ und $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ in Widerspruch zu (A. 3.). Also gilt die Behauptung (b).

c) $X^{\alpha\beta} \equiv X \Leftrightarrow X^\alpha \equiv X^\beta$. Nehmen wir indirekt etwa $X \not\equiv P$ an. Nach. (S. 2.3.) existieren eindeutig die Kreise α', β' mit $\alpha' \mathrm{I} P, X$ und $\alpha' \perp \alpha$; bzw $\beta' \mathrm{I} P, X$ und $\beta' \perp \beta$. Aus (b) folgt $\alpha' \neq \beta'$. Den Definitionen nach gelten $X^\alpha \mathrm{I} \alpha'$ und $X^\beta \mathrm{I} \beta'$, darum gilt auch $X^\alpha \equiv X^\beta \in \alpha' \cap \beta' \equiv \{X, P\}$. Beide Möglichkeiten führen zum Widerspruch.

d) Nehmen wir indirekt $X \in \varepsilon \cap \varphi$ an. Aus (a) folgt $X^\alpha \equiv X^\beta$. Aus (c) folgt $X \in \{P, Q\}$ in Widerspruch zu (b).

e) Es sei $A \in \alpha \cap \varepsilon$ (A. 3., S. 2.4.). Es sind $A \equiv A^\varepsilon$, $A^\beta \not\equiv A$, darum ist ε nach (a) der eindeutig bestimmte Kreis, für den $\varepsilon \mathrm{I} A$ und $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ sind. Aber der Kreis $(X Y A)$ ist auch von solcher Eigenschaft, darum gilt $\varepsilon \mathrm{I} X, Y$. Die zurückgebliebene Behauptung folgt aus (A. 1., S. 2.4.). ∎

SATZ 2.7. *Sind* $\alpha \cap \beta \equiv \gamma \cap \delta \equiv \{P, Q\}$, $\alpha \perp \beta$ *und* $\gamma \perp \delta$, *so folgt* $\alpha\beta = \gamma\delta$.

a) *Aus* $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ *folgt* $\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon$.

b) *Aus* $\varphi \mathrm{I} P, Q$ *folgt* $\varphi^{\alpha\beta} \equiv \varphi$ (Abb. 4.).

BEWEIS. Zuerst beweisen wir die Behauptungen (a), (b).

a) $\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon^\beta \equiv \varepsilon$ ergibt sich aus der Definition 2.3.

b) Wir wählen auf φ einen von P, Q verschiedenen Punkt B aus; $B^{\alpha\beta} \neq B$ folgt aus (S. 2.6. c.). Es sei $\varphi' \equiv (P B B^{\alpha\beta})$. Da $\alpha\beta$ involutorisch ist (S. 2.2.), so ist

$$\varphi'^{\alpha\beta} \equiv (P\, B\, B^{\alpha\beta})^{\alpha\beta} \equiv (P\, B^{\alpha\beta}\, B) \equiv \varphi'.$$

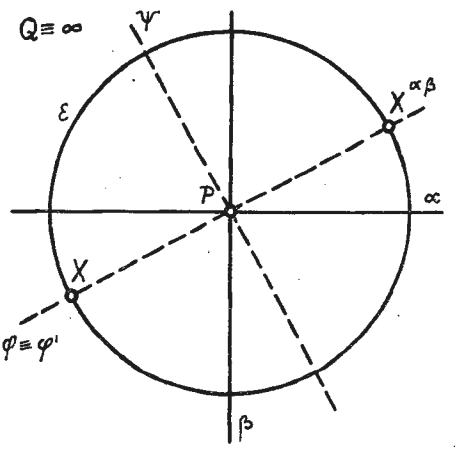


Abb. 4.

Genau ein Kreis ψ existiert mit $P, Q \,\mathrm{I}\, \psi$ und $\psi \perp \varphi'$ (S. 2.3.). Dann gilt $\psi^{\alpha\beta} \perp \varphi'^{\alpha\beta} \equiv \varphi'$, daraus folgt $\psi^{\alpha\beta} \equiv \psi$. Aus $(\varphi' \cap \psi)^{\alpha\beta} \equiv \varphi'^{\alpha\beta} \cap \psi^{\alpha\beta} \equiv \varphi'' \cap \psi$ folgt $\varphi' \,\mathrm{I}\, Q$ nach (S. 2.6. c.). Dann ist $\varphi' \equiv \varphi$ (A. 1.), und folgt (b).

Nun sei X ein beliebiger Punkt mit $X \notin \{P, Q\}$. Folgenderweise konstruieren wir $X^{\alpha\beta}$ (Abb. 4.). Es seien $\varphi \equiv (XPQ)$ und ε mit $X \,\mathrm{I}\, \varepsilon$, $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ (S. 2.6. a., b.). Dann ist $\varphi \cap \varepsilon \equiv \{X, X^{\alpha\beta}\}$.

Sofort kann man einsehen, daß φ und ε nur von $\{P, Q\}$ und X abhängt. Es gelten $\varphi^{\gamma\delta} \equiv \varphi$, $\varepsilon^{\gamma\delta} \equiv \varepsilon$ und $X^{\alpha\beta} \equiv X^{\gamma\delta}$ für beliebigen Punkt X. ∎

DEFINITION 2.4. Gelten $\alpha \cap \beta \equiv \{P, Q\}$ und $\alpha \perp \beta$, so nennen wir die involutorische Abbildung $\alpha\beta$ *Punktpaarspiegelung*. Diese werden auch mit $a, b, c, \ldots$ bezeichnet. ∎

SATZ 2.8. a) *Es sei p eine Punktpaarspiegelung an $\{P, Q\}$, und $\Phi \in \mathcal{G}$. Dann ist die Abbildung $p^\Phi = \Phi^{-1} p \Phi$ auch eine Punktpaarspiegelung an $\{P^\Phi, Q^\Phi\}$.*

b) *Betrachtet man das Punktpaar $p \equiv \{P, Q\}$ und den Kreis γ, so ist die Abbildung γp genau dann involutorisch, wenn $P, Q \,\mathrm{I}\, \gamma$ oder $P^\gamma \equiv Q$ gilt.*

BEWEIS. *a)* Aus dem Beweis von (S. 2.2.) kann man entnehmen: wenn $\alpha\beta$ involutorisch ist, so ist auch $(\alpha\beta)^\Phi = \alpha^\Phi \beta^\Phi$ involutorisch. Da P, Q die Fixpunkte der Abbildung $\alpha\beta = p$ sind, so sind P^Φ, Q^Φ die Fixpunkte von $(\alpha\beta)^\Phi = p^\Phi$.

b) Sind $P, Q \,\mathrm{I}\, \gamma$, so ist $\gamma p = \delta$ Kreisspiegelung, $\gamma \perp \delta$ (S. 2.7.). Gelten $p = \alpha\beta$ und $P^\gamma \equiv Q$, so ist $\gamma \perp \alpha, \beta$ (A. 3.). $\alpha\beta \neq \gamma \Rightarrow \gamma p \neq 1$ (S. 2.7.). Ferner gilt $(\gamma\alpha)\beta = \alpha(\gamma\beta) = (\alpha\beta)\gamma = \beta\alpha\gamma = (\gamma\alpha\beta)^{-1}$ also $\gamma(\alpha\beta) = \gamma p$ ist involutorisch (S. 2.2.).

Umgekehrt setzen wir voraus, dass γp involutorisch ist, d.h. $\gamma p = p\gamma$, $p = \gamma p \gamma$. Aus (a) folgt $\{P, Q\}^\gamma \equiv \{P, Q\}$, also es gilt entweder $\{P, Q\} \,\mathrm{I}\, \gamma$ oder $P^\gamma \equiv Q$. ∎

DEFINITION 2.5. Im Falle $\alpha \perp \beta$, $\gamma \perp \alpha, \beta$ nennen wir die involutorische Abbildung $\alpha\beta\gamma$ *Spiegelung*. Die Spiegelungen werden auch mit geschriebenen großen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ bezeichnet. ▮

GRUPPENTHEORETISCHE FORMULIERUNG: Aus der bisherigen Behandlung kann man entnehmen, daß die geometrischen Begriffe in der Gruppe $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ durch die folgende Überschreibung sich abfassen lassen:

der Kreis α	$\rightarrow$	die Kreisspiegelung α, $\alpha \in \mathcal{S}$;
der Punkt P	$\rightarrow$	die Teilmenge P von $\mathcal{S}$, für die $\alpha \in P \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P^\alpha \equiv P$;
$\alpha \mathrm{I} P$	$\rightarrow$	$\alpha P \alpha = P^\alpha = P$ mit Komplexus-multiplikation in $\mathcal{G}$;
$\alpha \perp \beta$	$\rightarrow$	$\alpha\beta$ involutorisch in $\mathcal{G}$, in Zeichen $\alpha \mid \beta$;
das Punktpaar	$\rightarrow$	die Punktpaarspiegelung $p = \alpha\beta$,
$p \equiv \{P, Q\}$	$\rightarrow$	$\alpha \mid \beta$, $\alpha, \beta \in P \cap Q$;
$p \equiv \{P, Q\} \mathrm{I} \alpha$	$\rightarrow$	$\alpha p \in \mathcal{S}$;
die Abbildung $\Phi \in \mathcal{G}$	$\rightarrow$	das Automorphismus $\Psi \rightarrow \Phi^{-1}\Psi\Phi = \Psi^\Phi$ von $\mathcal{G}$ (Siehe S. 4.7.).

Wir können unseres Axiomensystem in anderer Form zusammenstellen.

GRUNDANNAHME: *Es sei eine Gruppe $\mathcal{G}$ und ein aus involutorischen Elementen bestehendes Erzeugendensystem $\mathcal{S}$ von $\mathcal{G}$ mit folgenden Bedingungen gegeben.*

B. 1. *Aus $\alpha \in \mathcal{S}$, $\Phi \in \mathcal{G}$ folgt $\alpha^\Phi = \Phi^{-1}\alpha\Phi \in \mathcal{S}$. Die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ von $\mathcal{S}$ werden Kreisspiegelungen genannt.*

B. 2. *Es gilt $\mathcal{S} = A \cup B \cup C \cup \ldots$. Hier gilt, zum Beispiel, $\alpha \in A$ genau dann, wenn $\alpha \in \mathcal{S}$ und $A^\alpha = \alpha A \alpha = A$ bestehen (mit Komplexenmultiplikation in $\mathcal{G}$). Analoge Bedingung gilt auch für je die Teilmenge $B, C, \ldots$ von $\mathcal{S}$.*

Die Teilmenge $A, B, C, \ldots$ von $\mathcal{S}$ werden Punkte genannt.

Haben zwei involutorische Elemente Φ, Ψ aus $\mathcal{G}$ ein involutorisches Produkt (d.h. gilt $\Phi\Psi = \Psi^{-1}\Phi^{-1}$, $\Phi \neq \Psi^{-1}$), so schreiben wir gewöhnlich dafür $\Phi \mid \Psi$.

AXIOM 1*. *Es gibt drei verschiedene Punkte. Zu irgend drei verschiedenen Punkten gehört genau ein gemeinsamer Kreis.*

AXIOM 2*. *Sind $X \neq Y$ und $\alpha \in X \cap Y$; so existiert genau ein Kreis β, für den $\beta \in X \cap Y$ und $\alpha \mid \beta$.*

AXIOM 3*. *Sind $X^\alpha \neq X$ und $\beta \in X \cap X^\alpha$, so gibt es verschiedene Y und Z so, daß $\alpha, \beta \in Y \cap Z$.*

Es würde keine Schwierigkeit mitbringen, unsere bisherige Behandlung nach Axiomen 1*–3*. umzuformen. Die erwähnte Umformulierung führt bald offenbar zur Äquivalenz zwischen den Strukturen $\mathfrak{X}(\mathbf{P}, \mathbf{K}, \mathbf{I}, \mathcal{G}(\mathcal{S}))$ mit Axiomen 1–5. und $\mathcal{G}(A \cup B \cup \ldots)$ mit Axiomen 1*–5*.

Im Folgenden gebrauchen wir die geometrische Schreibweise, und die Axiome und die Sätze werden nur so abgefasst. Die Unterscheidung zwischen den Zeichen „$\equiv$“ und „$=$“ wird weggelassen werden.

AXIOM 4. *Sind* $P \neq Q$ *und* $\alpha, \beta, \gamma \mathrm{I} P, Q$, *so gibt es einen Kreis* δ, *für den* $\alpha\beta\gamma = \delta$.

AXIOM 5. *Sind* $\xi \perp \eta$ *und* $\alpha, \beta\, \gamma \perp \xi, \eta$, *so gibt es einen Kreis* δ, *für den* $\alpha\beta\gamma = \delta$.

(S. 2.7.) ist eine Spezialisierung von (A. 4.). Natürlich kann man (S. 2.7.) auf Grund (A. 4.) einfacher beweisen. In der weiteren Behandlung spielen (A. 4.) und (A. 5.) die wichtigsten Rollen.

SATZ 2.9. (Ergänzung zu (A. 4.) und (A. 5.))

a) *Für den Kreis* δ *in* (A. 4.) *gilt* $\delta \mathrm{I} P, Q$.
b) *Für den Kreis* δ *in* (A. 5.) *gilt* $\delta \perp \xi, \eta$.

BEWEIS. *a)* Aus $P^\delta = P^{\alpha\beta\gamma} = P^{\beta\gamma} = P^\gamma = P$ folgt $P \mathrm{I} \delta$, ebenso gilt $Q \mathrm{I} \delta$.
b) Aus $\xi^\delta = \xi^{\alpha\beta\gamma} = \xi^{\beta\gamma} = \xi^\gamma = \xi$ folgt $\xi \perp \delta$, ebenso gilt $\eta \perp \delta$. ▌

SATZ 2.10. (Umkehrung von (A. 4.) und (A. 5.))

a) *Sind* $P \neq Q$, $\alpha, \beta \mathrm{I} P, Q$ *und* $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, ist ferner $\alpha\beta\gamma$ *für den Kreis* γ *involutorisch, so ist* $\gamma \mathrm{I} P, Q$.
b) *Sind* $\xi \perp \eta$ *und* $\alpha, \beta \perp \xi, \eta$, *ferner ist* $\alpha\beta\gamma$ *involutorisch, so ist* $\gamma \perp \xi, \eta$.

BEWEIS. *a)* Betrachten wir einen Kreis β' mit $\beta' \mathrm{I} P, Q$ und $\beta' \perp \gamma$ (S. 2.3.). Es sei gemäß (A. 4.) $\alpha\beta\beta' = \alpha'$ d.h. $\alpha\beta = \alpha'\beta'$. Eingeführt die Punktpaarspiegelung $\beta'\gamma = b$, ist $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma = \alpha' b$ involutorisch (Abb. 5.) Wir wenden (S. 2.8. *b.*) an. Ist $\alpha' b \in \mathfrak{S}$, – mit neuer Bezeich-

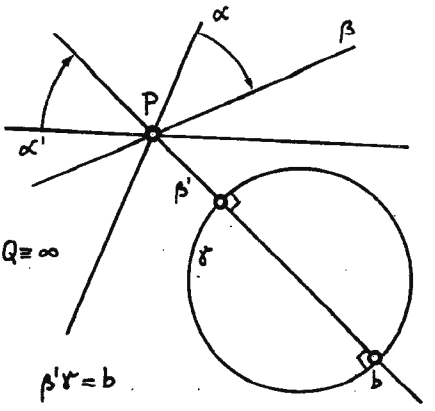


Abb. 5.

nung — $b \mathrm{I} \alpha'$, so ist $b \mathrm{I} \alpha', \beta', \gamma$. Aus $\alpha', \beta' \mathrm{I} P, Q$ folgt $b = \{P, Q\}$ und $\gamma \mathrm{I} P, Q$ (S. 2.7.). Der andere Fall $\alpha' \perp \beta', \gamma$ kommt nicht vor, weil $\alpha \perp \beta$ ausgeschlossen ist.

b) Sind die Punkte X, Y mit $X, Y \mathrm{I} \xi, \eta$ eingeführt, existiert der Kreis σ mit $\sigma \mathrm{I} X, Y$ und $\sigma \perp \gamma$ (S. 2.3.). Auch $\alpha, \beta \perp \sigma$ ist wegen $X^{\alpha} = Y$ und $X^{\beta} = Y$ erfüllt (A. 3., Abb. 6.). Es sei C ein Punkt mit $C \mathrm{I} \gamma$, $C \not\mathrm{I} \sigma$ (S. 2.4.), und es sei β' ein Kreis mit $\beta' \mathrm{I} C$, $\beta' \perp \xi, \eta$ (S. 2.6.). Wir nehmen $\alpha \beta \beta' = \alpha'$, also $\alpha \beta = \alpha' \beta'$. Wegen der Auswahl von σ und C gilt $\beta', \gamma \mathrm{I} C, C^{\sigma}$. Wählen wir den Kreis β'' mit $\beta'' \mathrm{I} C, C^{\sigma}$, $\beta'' \perp \alpha'$ aus (S. 2.3.), und führen wir die Punktpaarspiegelung $\alpha' \beta'' = q$ an $\{Q, Q^{\sigma}\}$ ein. Angewandt (A. 4.) auf die mit C, C^{σ} inzidenten Kreise β'', β', γ, bekommen wir $\beta'' \beta' \gamma = \gamma'$, d.h. $\beta' \gamma = \beta'' \gamma'$ mit $\gamma' \mathrm{I} C, C^{\sigma}$. Nun gilt $(\alpha \beta) \gamma = \alpha' (\beta' \gamma) = (\alpha' \beta'') \gamma' = q \gamma'$. Wir haben vorausgesetzt, daß $q \gamma'$ involutorisch ist, jetzt wenden wir erneut die Behauptung (S. 2.8. b.) an.

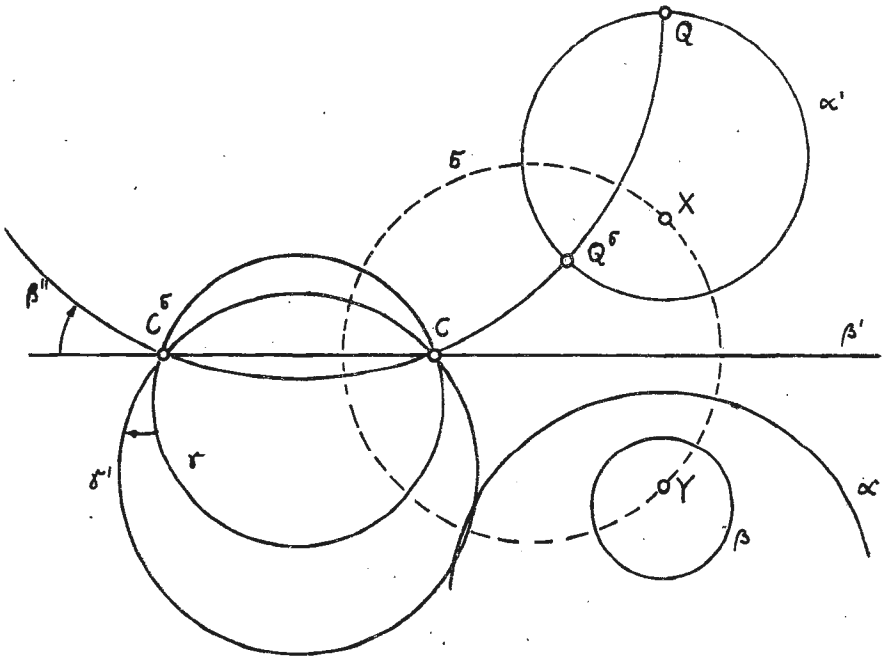


Abb. 6.

Ist $\gamma' \mathrm{I} q$, d.h. ist $\gamma' = (C C^{\sigma} Q Q^{\sigma})$, so ist $\gamma' = \beta''$, d.h. $\beta' = \gamma$. Dann ist $\gamma \perp \xi, \eta$, was zu beweisen war. Der andere Fall $Q^{\gamma'} = Q^{\sigma}$, d.h. $Q^{\gamma' \sigma} = Q$ kommt nicht vor, denn es wäre $Q \mathrm{I} \sigma$ (S. 2.6. c.), was wir ausgeschlossen haben. ∎

§ 3. Kreisbüschel

DEFINITION 3.1. Im Falle $\alpha_1 \neq \alpha_2$ wird die Kreismenge $\not{i}(\alpha_1\,\alpha_2) = \{\beta : \alpha_1\,\alpha_2\,\beta \in \mathcal{S}\}$ Kreisbüschel genannt.

Ist ein Punktpaar $a = \{A_1, A_2\}$ gegeben, so wird die Kreismenge $\not{i}(a) = \{\alpha : \alpha\,\mathrm{I}\,a\}$ E-Büschel genannt (elliptisches Büschel).

Ist ξ, η mit $\xi \perp \eta$, $\xi, \eta\,\mathrm{I}\,a$, $a = \{A_1, A_2\}$ gegeben, so wird die Kreismenge $\not{i}(\perp a) = \{\alpha : \alpha \perp \xi, \eta\}$ H-Büschel genannt (hyperbolisches Büschel). Wir sagen, die Kreisbüschel $\not{i}(a)$ und $\not{i}(\perp a)$ sind zueinander senkrecht: $\not{i}(a) \perp \not{i}(\perp a)$. ▮

Ein Hauptziel unserer Behandlung ist, den Inhalt von (D. 3.1.) zu erörtern (S. 3.3–7.). Das werden wir zuerst vorbereiten.

SATZ 3.1. *Existiert zu den Punktpaaren $a = \{A_1, A_2\}$ und $c = \{C_1, C_2\}$ ein solcher Kreis σ, für den $A_1^\sigma = A_2$, $C_1^\sigma = C_2$ gelten, und gibt es einen Kreis β derart, daß $a\,\beta\,c$ involutorisch ist, so ist $\beta \perp \sigma, \varrho$ wo $\varrho = (A_1\,A_2\,C_1\,C_2)$ ist. Ferner existiert der Kreis $\delta = a\,\beta\,c$, und $\delta \perp \sigma, \varrho$.*

BEWEIS. Wir führen die Kreise α und γ, um die Beziehungen $a = \alpha\,\varrho$ und $c = \gamma\,\varrho$ zu erfüllen. Da $a\,\beta\,c = (\alpha\,\varrho)\,\beta\,(\gamma\,\varrho) = \alpha\,\beta\,\gamma$ involutorisch ist, so ist auch $(a\,\beta\,c)^\gamma = \gamma\,(\alpha\,\beta\,\gamma)\,\gamma = \gamma\,\alpha\,\beta$ involutorisch. Es gilt $\sigma \perp \varrho$, also $\beta \perp \sigma, \varrho$ (S. 2.10. b.). (A. 5.) nach existiert der Kreis δ mit $\delta = \alpha\,\beta\,\gamma = a\,\beta\,c$, und folgt $\delta \perp \sigma, \varrho$ aus (S. 2.9.). ▮

SATZ 3.2. (Lotensatz)

Sind irgend vier unter den Behauptungen

$$\alpha\,\alpha' = a, \quad \gamma\,\gamma' = c, \quad \alpha'\,\beta\,\gamma' = \delta', \quad a\,\delta'\,c = \delta, \quad \alpha\,\beta\,\gamma = \delta$$

erfüllt, so ist auch die fünfte erfüllt (Abb. 7.).

BEWEIS. Beispielweise ergibt sich $\alpha\,\beta\,\gamma = \delta$ aus den anderen vier so: $\alpha\,\beta\,\gamma \overset{1.2.}{=} (a\,\alpha')\,\beta\,(\gamma'\,c) \overset{3.}{=} a\,(\alpha'\,\beta\,\gamma')\,c \overset{4.}{=} a\,\delta'\,c = \delta$. Durch zyklische Vertauschung können wir den Beweis leicht weiterführen. ▮

SATZ 3.3. (Existenz von Büschel)

Zu den Kreisen α und γ und dem Punkt P mit $\alpha \neq \gamma$, $P^{\alpha\gamma} \neq P$ gibt es einen Kreis β, für den $\beta\,\mathrm{I}\,P$ und $\beta \in \not{i}(\gamma\,\alpha)$ gilt.

BEWEIS. Die Behauptung ist nur in dem Fall interessant, in dem α und γ einander nicht schneiden, sonst ist β der genannten Eigenschaft auf Grund (A. 1.) und (A. 4.) eindeutig bestimmt.

(i) Zuerst suchen wir einen Hilfskreis σ mit $P\,И\,\sigma$, und $\sigma \perp \alpha, \gamma$ auf. Nach (S. 2.6. a.) gibt es einen Kreis σ' mit $P\,\mathrm{I}\,\sigma'$; $\sigma' \perp \alpha, \gamma$. Auf α oder γ gibt es einen Punkt X, der von P und von dem eventuellen gemeinsamen Punkt der Kreise α und γ verschieden ist, und mit σ' nicht inzident ist. (S. 2.4.). Es sei σ der eindeutig bestimmte Kreis, für den $\sigma \perp \alpha; \gamma$, $\sigma\,\mathrm{I}\,X$ und darum $\sigma\,И\,P$ gilt.

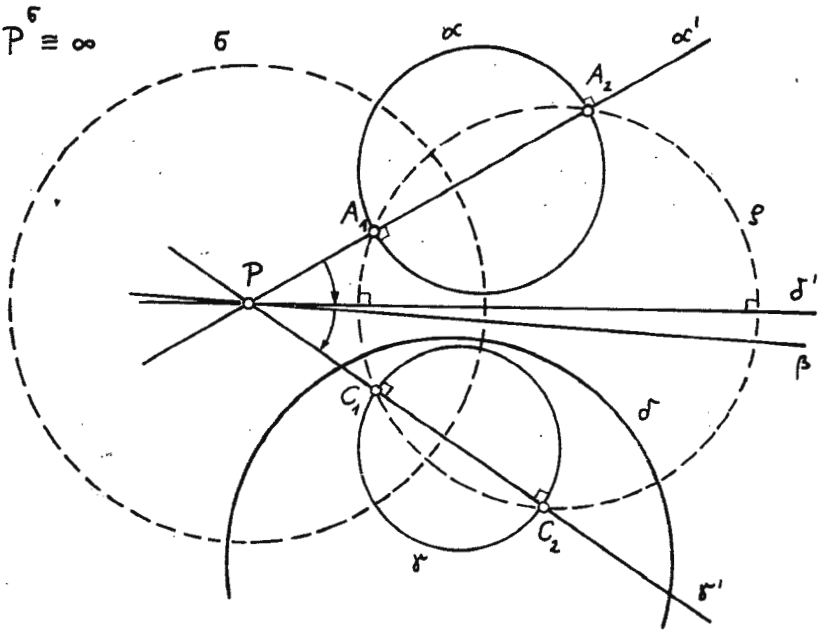


Abb. 7.

(ii) Jetzt betrachten wir das Punktpaar $p = \{P, P^\sigma\}$. (S. 2.3.) zufolge existieren die Kreise α' und γ', für die

$p \mathrm{I} \alpha'$ und $\alpha' \perp \alpha$, d.h. $\alpha\,\alpha' = a$ eine Punktpaarspiegelung ist, bzw.
$p \mathrm{I} \gamma'$ und $\gamma' \perp \gamma$, d.h. $\gamma\,\gamma' = c$ eine Punktpaarspiegelung ist (Abb. 7.).

Sei ϱ der Kreis mit $\varrho \mathrm{I} a, c$, ferner sei δ' der Kreis mit $p \mathrm{I} \delta'$ und $\delta' \perp \varrho$. Im mit p inzidenten Kreisbüschel existiert der Kreis $\beta = \alpha'\,\delta'\,\gamma'$, im zu $\not\parallel (\sigma\,\varrho)$ senkrechten Kreisbüschel existiert der Kreis $\delta = a\,\delta'\,c$ (A. 4., A. 5., S. 3.1.).

Es ist uns gelungen, die Lotensatzkonfiguration im (S. 3.2.) zu konstruieren, und die ersten vier Bedingungen zu erfüllen. Also gilt auch $\alpha\,\beta\,\gamma = \delta$.

(iii) Dann ist auch $\delta^\gamma = \gamma\,(\alpha\,\beta\,\gamma)\,\gamma = \gamma\,\alpha\,\beta$ eine Kreisspiegelung, gemäß (D. 3.1.) existiert tatsächlich β mit $\beta \mathrm{I} P$, $\beta \in \not\parallel (\gamma\,\alpha)$. ▮

Die Eindeutigkeit des Kreises β und seine Unabhängigkeit von dem Hilfskreis σ wird in (S. 3.5.) bewiesen werden.

SATZ 3.4. a) *Berühren sich die Kreise α und γ im Punkt X, und ist $\alpha\,\beta\,\gamma = \delta$ eine Kreisspiegelung, so berühren sich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ paarweise in X.*
b) *Berühren sich α, β_0, γ paarweise in X, so ist $\alpha\,\beta_0\,\gamma = \delta$ eine Kreisspiegelung.*

BEWEIS. *a)* Nehmen wir indirekt $\beta \,\text{И}\, X$ an. Aus $\alpha\beta\gamma = \delta$ folgt $\gamma\alpha = \beta\alpha\delta\ \alpha = \beta(\delta^\alpha)$. Wegen $X\,\text{I}\,\gamma, \alpha$ gilt $X = X^{\gamma\alpha} = X^{\beta\delta^\alpha}$. Dann wird $Y = X^\beta = X^{\delta^\alpha}$, was von X verschieden ist, bei $\beta\delta^\alpha = \gamma\alpha$ festgelassen. Im Falle $X = Y = X^\beta$ wäre $\beta\,\text{I}\,X$. Wegen $Y^{\gamma\alpha} = Y$ wird auch $Y^\gamma = Y^\alpha = Z$ bei $\gamma\alpha$ festgelassen. $Z \neq Y$, sonst $X = Z = Y = X^\beta$ also $\beta\,\text{I}\,X$ wäre.

$Y^\gamma = Y^\alpha = Z$ zufolge sind die mit Y, Z inzidenten Kreise alle zu α und γ senkrecht (A. 3.), aber das ist ein Widerspruch zu (S. 2.5.).

Wegen (S. 2.9.) und (S. 2.10.) kommt der Fall $\alpha \cap \beta = \{X, Y\}$ nicht vor, sonst würde $\alpha \cap \gamma = \{X, Y\}$ d.h. ein Widerspruch folgen. Für δ geht der Beweis ebenso wie für β, ja $\alpha\delta\gamma = \beta$.

b) Wählen wir einen Punkt P auf β_0 aus. Jetzt widerholen wir die Konstruktion im Beweis von (S. 3.3.), der Hilfskreis σ ist wegen (S. 2.5.) mit X inzident. Mit dem zu $\{P, P^\sigma\}$ konstruierten Kreis β ist $\alpha\beta\gamma \in \mathcal{S}$, der Behauptung (a) infolge berührt β die Kreise α, γ in X, darum ist $\beta = \beta_0$ (S. 2.3., S. 2.5.). ▮

DEFINITION 3.2. Im Falle $X\,\text{I}\,\alpha$ wird die Kreismenge

$$\not\iota(\alpha\,\text{I}\,X) = \{\beta : \beta \cap \alpha = X \text{ oder } \beta = \alpha\}$$

P-Büschel genannt (parabolisches Büschel). ▮

SATZ 3.5. *Wenn $\alpha \cap \gamma$ leer ist, $P^{\alpha\gamma} \neq P$ ist, ferner $P\,\text{I}\,\beta, \beta_0$, $\alpha\beta\gamma \in \mathcal{S}$; $\alpha\beta_0\gamma \in \mathcal{S}$ für die Kreise β und β_0 gelten so ist $\beta = \beta_0$.*

BEWEIS. Es seien $\alpha\beta\gamma = \delta$ und $\alpha\beta_0\gamma = \delta_0$, also

$$\beta\beta_0 = (\alpha\delta\gamma)(\gamma\delta_0\alpha) = \alpha(\delta\delta_0)\alpha = \delta^\alpha\delta_0^\alpha.$$

Setzen wir $\beta \neq \beta_0$ voraus. Aus (S. 2.10.) bzw. (S. 3.4.) folgt $\delta^\alpha\,\text{I}\,P$. Ebenso folgt $\alpha, \gamma\,\text{I}\,P$ aus $\beta\delta^\alpha = \beta\alpha(\alpha\beta\gamma)\alpha = \gamma\alpha$. Dieser Widerspruch beweist $\beta = \beta_0$. ▮

SATZ 3.6. *Aus $\alpha, \gamma \perp \sigma$ und $\alpha\beta_0\gamma = \delta$ folgt $\beta_0, \delta \perp \sigma$.*

BEWEIS. (i) Ist $\alpha \cap \gamma = \{P, Q\}$, so ist $P^\sigma = Q$ (S. 2.6.), ferner $\beta_0, \delta\,\text{I}\,\{P, Q\}$ (S. 2.10.). Aus (A. 3.) folgt $\beta_0, \delta \perp \sigma$.

(ii) Ist $\alpha \cap \gamma = X$, so folgt $\beta_0, \delta \perp \sigma$ aus (S. 2.5., 3.4. a.).

(iii) Ist $\alpha \cap \gamma$ leer, so sind $\alpha \cap \beta_0$ und $\beta_0 \cap \gamma$ gemäß (S. 2.10.) und (S. 3.4.) auch leer. Wählen wir auf β_0 einen Punkt P mit $P \neq P^{\alpha\gamma}$ aus (S. 2.4., 2.6. e.). Jetzt machen wir mit P und σ die Konstruktion im Beweis von (S. 3.3.). Nur der folgende Unterschied kann auftreten: während die dortigen $\alpha', \delta', \gamma', \beta$ mit dem Punktpaar $\{P, P^\sigma\}$ inzident waren, hier auch der Fall $P^\sigma = P$, $\alpha', \delta', \gamma', \beta\,\text{I}\,P$ und $\alpha', \delta', \gamma', \beta \perp \sigma$ vorkommen kann (S. 3.4. b.). Auch hier gilt $\alpha\beta\gamma = \delta$, und $\beta = \beta_0$ folgt aus (S. 3.5.). ▮

DEFINITION 3.3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$, so nennen wir die Kreisbüschel $\not\iota(\alpha_1\,\alpha_2)$, $\not\iota(\varepsilon_1\,\varepsilon_2)$ zueinander senkrecht: $\not\iota(\alpha_1\,\alpha_2) \perp \not\iota(\varepsilon_1\,\varepsilon_2)$. ▮

Das ist im folgenden Satz unterstüzt.

SATZ 3.7. a) *Gelten* $\alpha_1, \alpha_2 \perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$ *und* $\alpha \in \not\iota(\alpha_1 \alpha_2)$, $\varepsilon \in \not\iota(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ *so ist* $\alpha \perp \varepsilon$.
b) *Das Kreisbüschel ist von seinen zwei (verschiedenen) Elementen eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. *a)* Aus (S. 3.6.) folgt $\alpha \perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$ dann $\varepsilon \perp \alpha$.
b) Zu α_1 und α_2 können wir (S. 2.6.) gemäß verschiedene Kreise $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$ finden. Gilt $\beta_1 \neq \beta_2$ und $\beta_1, \beta_2 \in \not\iota(\alpha_1 \alpha_2)$, so sind auch $\beta_1, \beta_2 \perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Es sei α ein beliebiger zu $\not\iota(\alpha_1 \alpha_2)$ gehörender Kreis, und A ein auf α liegender Punkt mit $A^{\alpha_1 \alpha_2} \neq A$ (S. 2.4., 2.6.) d.h. $A^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \neq A$. Wenn wir die Konstruktion im Beweis von (S. 3.3.) sowohl auf A und $\not\iota(\alpha_1 \alpha_2)$ wie auf A und $\not\iota(\beta_1 \beta_2)$ anwenden, so bekommen wir α in beiden Fällen, weil es genau einen Kreis α mit $\alpha \mathrm{I} A$, $\alpha \perp \varepsilon_1, \varepsilon_2$ gibt (S. 2.6.). ∎

KREISBÜSCHEL-KLASSIFIKATION: *E-Büschel* $\perp$ *H-Büschel, P-Büschel* $\perp$ *P-Büschel, B-Büschel* $\perp$ *B-Büschel.*

DEFINITION 3.4. Existiert kein Punkt X mit $X^{\alpha_1 \alpha_2} = X$ zu den Kreisen α_1, α_2, so wird die Kreismenge $\not\iota(\alpha_1 \alpha_2) = \{\alpha : \alpha_1 \alpha_2 \alpha \in \mathcal{S}\}$ *B-Büschel* genannt (besonderes Büschel). ∎

§ 4. Klassifikation von $\mathcal{Q}(\mathcal{S})$

SATZ 4.1. a) *Ist* $P \mathrm{I} \alpha, \beta, \gamma, \delta$ *so gibt es die Kreise* ξ, η *mit* $\alpha \beta \gamma \delta = \xi \eta$ und $\xi, \eta \mathrm{I} P$.
b) *Sind* $\alpha \beta \gamma \delta = \xi \eta$ *und* $P \mathrm{I} \alpha, \beta, \gamma$ *so gilt* $\delta \mathrm{I} P$, *oder* $\alpha \beta \gamma \in \mathcal{S}$.

BEWEIS. *a)* Wir dürfen den Fall $\not\iota(\alpha \beta) \neq \not\iota(\gamma \delta)$ voraussetzen.

(i) Sind $\alpha \cap \beta = \{P, Q\}$, $\gamma \cap \delta = \{P, R\}$, bzw. sind etwa $\alpha \cap \beta = \{P, Q\}$ und $\gamma \cap \delta = P$, so gibt es einen Kreis ω mit $\omega \in \not\iota(\alpha \beta)$, $\omega \in \not\iota(\gamma \delta)$ auf Grund

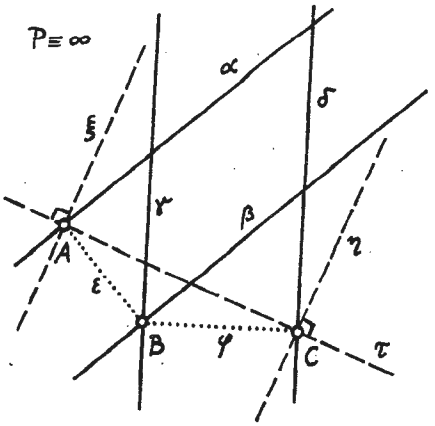


Abb. 8.

(A. 1.) und (A. 4.), bzw. (S. 2.5.) und (S. 3.4.). Mit $\alpha\beta\omega = \xi$, $\omega\gamma\delta = \eta$ gilt $\alpha\beta\gamma\delta = \xi\eta$.

(ii) Sind $\alpha \cap \beta = P$ und $\gamma \cap \delta = P$ (Abb. 8.), so sei $\beta \cap \gamma = \{B, P\}$. Betrachten wir den Kreis ε mit $\varepsilon \mathrm{I} \{B, P\}$, $\varepsilon \perp \alpha, \beta$ (S. 2.5.).

Im Kreisbüschel $\not\parallel(\beta\gamma)$ zu $\{P, B\}$ gilt $\varepsilon\beta\gamma = \varphi$, $\varphi \perp \gamma, \delta$. Seien $\alpha \cap \varepsilon = \{A, P\} = a$ ferner $\delta \cap \varphi = \{C, P\} = c$. Dann ist

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\varepsilon)(\varepsilon\beta\gamma)\delta = (\alpha\varepsilon)(\varphi\delta) = ac.$$

Jetzt führen wir die Kreise $\tau = (ACP)$, ξ, η mit $\xi \mathrm{I} \{A, P\}$, $\xi \perp \tau$ und $\eta \mathrm{I} \{C, P\}$, $\eta \perp \tau$ ein. So ist $\alpha\beta\gamma\delta = ac = (\xi\tau)(\tau\eta) = \xi\eta$. In diesem Fall gilt auch $\xi \cap \eta = P$, wie es sich sofort ergibt.

b) Nehnen wir $\alpha\beta\gamma = (\xi\eta)\delta = \xi'(\eta'\delta) = \xi'\eta''\delta'$, wo $P \mathrm{I} \xi', \eta''$ ist (S. 3.3.). Wegen $P^{\alpha\beta\gamma} = P = P^{\xi'\eta''\delta'} = P^{\delta'}$ gilt $\delta' \mathrm{I} P$. Wenn $\eta'' = \delta'$ d.h. $\eta' = \delta$ ist, so gilt $\alpha\beta\gamma \in \mathcal{S}$. Ist $\eta'' \neq \delta'$, so ist $P \mathrm{I} \delta, \eta'$ wegen $\eta'\delta = \eta''\delta'$ (S. 2.10., S. 3.4.). ∎

SATZ 4.2. (Reduktionssatz)

a) *Das Element $\Phi = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ von $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ läßt sich in der Form $\Phi = \xi\eta\varepsilon'$ aufschreiben.*

b) *Jedes Element von $\mathcal{G}$ ist als Produkt von höchtens 4 Erzeugenden darstellbar.*

BEWEIS. *a)* Wir wählen ein P mit $P \mathrm{I} \alpha$ aus, und ersetzen $\beta\gamma$ durch $\beta'\gamma'$ mit $\beta' \mathrm{I} P$. Sodann ersetzen wir $\gamma'\delta$ durch $\gamma''\delta'$ mit $\gamma'' \mathrm{I} P$ und endlich $\delta'\varepsilon$ durch $\delta''\varepsilon'$ mit $\delta'' \mathrm{I} P$ (S. 3.3.). Nun ist $\Phi = \alpha\beta'\gamma''\delta''\varepsilon'$, und mit $\alpha, \beta', \gamma'', \delta'' \mathrm{I} P$ folgt nach (S. 4.1.): $\alpha\beta'\gamma''\delta'' = \xi\eta$ also $\Phi = \xi\eta\varepsilon'$.

b) Aus (a) folgt, daß sich die Anzahl der Erzeugenden in einem Produkt aus wenigstens 5 Erzeugenden je mit zwei stufenweise mindern läßt. ∎

DEFINITION 4.1. Ein Element von $\mathcal{G}$ heißt „gerade", wenn es sich als Produkt einer geraden, „ungerade", wenn es sich als Produkt einer ungeraden Anzahl von Erzeugenden darstellen läßt. ∎

Eventuell mit einem $\varepsilon\varepsilon = 1$ multiplizieren läßt sich jedes gerade Element von $\mathcal{G}$ als Produkt von 4, jedes ungerade Element von $\mathcal{G}$ als Produkt von 3 Erzeugenden schreiben.

SATZ 4.3. a) *Jedes ungerade Element von $\mathcal{G}$ ist in der Form εp darstellbar. Es gilt $\varepsilon p = \varepsilon\varphi\psi$, wo $\varepsilon, \varphi \perp \psi$, zufällig $\varepsilon = \varphi$ ist* (Abb. 9.).

b) *Jedes gerade Element von $\mathcal{G}$ ist in der Form gh darstellbar, zufällig ist $g = h$* (Abb. 10.). (Es sind p, g, h Punktpaarspiegelungen.)

BEWEIS. *a)* Es sei $\Phi = \alpha\beta\gamma = \alpha\beta'\gamma'$, wo $P \mathrm{I} \alpha, \beta'$ und $P \text{И} \gamma'$ (S. 3.3–5.). Es sei λ ein Kreis mit $\lambda \perp \gamma'$ und $\lambda \in \not\parallel(\alpha\beta')$ (S. 2.3., 2.5., 2.6.), dann gilt es $\alpha\beta'\lambda = \varepsilon$, $\lambda\gamma' = p$ und endlich $\Phi = (\alpha\beta'\lambda)(\lambda\gamma') = \varepsilon p$.

Nun sei es $p = \varphi\psi$, wo $\psi \perp \varepsilon, \varphi$ ist. Also ist $\Phi = \varepsilon p = \varepsilon\varphi\psi$.

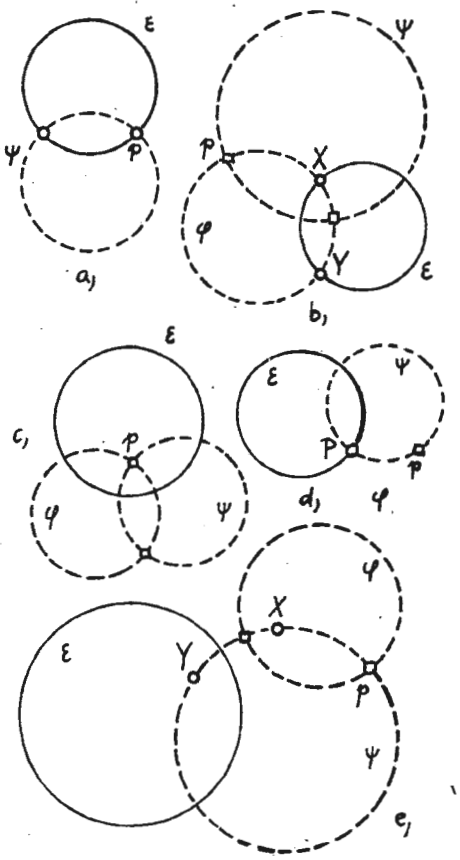


Abb. 9.

b) Es sei $\Phi = \alpha(\beta\gamma)\delta = \alpha\beta'(\gamma'\delta) = (\alpha\beta'\gamma'')\delta'$, wo $P\,\mathrm{I}\,\alpha, \beta', \gamma''$; $P\,И\,\delta'$ (S. 3.3–5.). Nun wenden wir den Gedankengang in (a) für $\alpha\beta'\gamma''$ an, aber wegen $P\,\mathrm{I}\,\gamma''$ müssen wir ihn abändern.

(i) Wenn $\gamma'' \in \not{I}(\alpha\beta')$ ist, dann ist $\alpha\beta'\gamma'' = \psi = \varepsilon(\varepsilon\psi) = \varepsilon p$, wo $\psi \perp \varepsilon$, $P\,\mathrm{I}\,\varepsilon, \psi$ sind.

(ii) Wenn $\alpha \cap \beta' = \{P, Q\}$ ist, dann existiert λ mit $\lambda \in \not{I}(\alpha\beta')$ und $\lambda \perp \gamma''$. Die Weiteren folgen wie in (a).

(iii) Wenn $\beta' \cap \gamma'' = \{P, Q\}$ ist, so existiert λ mit $\lambda \in \not{I}(\beta'\gamma'')$ und $\lambda \perp \alpha$. Es gilt $(\alpha\lambda)(\lambda\beta'\gamma'') = q\varphi = (\varepsilon\psi)\varphi = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon p$, wo $\psi \perp \varepsilon, \varphi$ ist.

Es ist wesentlich, $\alpha\beta'\gamma'' = (\varepsilon\varphi)\psi$ mit $\psi \perp \varepsilon, \varphi$ und $P\,\mathrm{I}\,\psi, \varepsilon, \varphi$ in Fällen (i)–(iii) gelten zu lassen.

Nun gilt es $\Phi = (\alpha\beta'\gamma'')\delta' = (\varepsilon\varphi\psi)\delta'$. Da $P\,И\,\delta'$ ist, existiert ein λ mit $\lambda \in \not{I}(\varepsilon\,\mathrm{I}\,P)$ und $\lambda \perp \delta', \psi$ (S. 2.5., 2.6.). Eingeführt $\xi = \varepsilon\varphi\lambda$, $\xi\psi = g$, $\lambda\delta' = h$ (S. 3.4., 2.7.) gilt $\Phi = \varepsilon\varphi\psi\delta' = (\varepsilon\varphi\lambda)\psi(\lambda\delta') = (\xi\psi)\ h = g\,h$. ∎

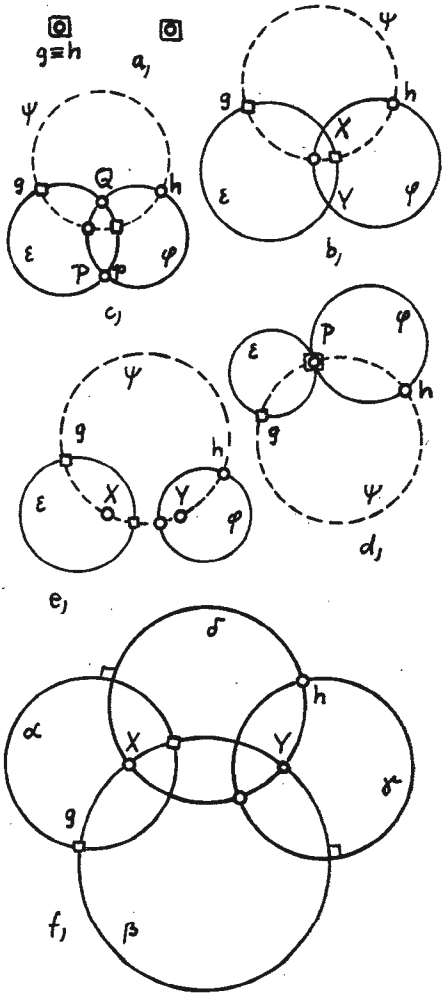


Abb. 10.

Jetzt können wir aus (S. 4.3.) die *Klassifikation von* $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ entnehmen.

SATZ 4.4. *(Klassifikation von* $\mathcal{G}(\mathcal{S})$*)*

(i) *Die ungeraden Elemente von* $\mathcal{G}$ *sind die Folgenden:*

a) Kreisspiegelung: $\psi = \varepsilon\,\varepsilon\psi = \varepsilon\, p$ (Abb. 9. a.);
b) $\varepsilon\, p = \varepsilon\varphi\psi$: $\varepsilon \cap \varphi = \{X, Y\}$, $\varepsilon, \varphi \perp \psi$, $\varepsilon \not\perp \varphi$ (Abb. 9. b.);
c) Spiegelung $\varepsilon\, p = \varepsilon\varphi\psi$: $\varepsilon \perp \varphi$; $\varepsilon, \varphi \perp \psi$ (Abb. 9. c);
d) $\varepsilon\, p = \varepsilon\varphi\psi$: $\varepsilon \cap \varphi = P$; $\varepsilon, \varphi \perp \psi$ *(P ist der Fixpunkt)* (Abb. 9. d.);

e) $\varepsilon p = \varepsilon\varphi\psi$: $\varepsilon \cap \varphi$ *ist leer,* $\varepsilon, \varphi \perp \psi$ (Abb. 9. e.).
(*Wenn* $X \neq X^{\varepsilon} = X^{p} = Y$ *existieren, so sind sie Fixpunkte.*).

(ii) *Die geraden Elemente von* $\mathcal{G}$ *sind die Folgenden:*

a) Die Idintität $1 = gg$ (Abb. 10. a.);
b) $gh = (\varepsilon\psi)(\psi\varphi)$: $\varepsilon \cap \varphi = \{X, Y\}$, $\varepsilon \not\perp \varphi$ *(*X, Y *sind die Fixpunkte)* (Abb. 10. b.);
c) Punktpaarspiegelung $p = gh = (\varepsilon\psi)(\psi\varphi) = \varepsilon\varphi : \varepsilon \perp \varphi$, *die Punkte von* $p = \{P, Q\}$ *sind Fixpunkte* (Abb. 10. c.);
d) $gh = (\varepsilon\psi)(\psi\varphi) = \varepsilon\varphi$: $\varepsilon \cap \varphi = P$; P *ist der Fixpunkt* (Abb. 10. d.);
e) $gh = (\varepsilon\psi)(\psi\varphi) = \varepsilon\varphi$: $\varepsilon \cap \varphi$ *ist leer. (Wenn* $X \neq X^{g} = X^{h} = Y$ *existieren, so sind sie Fixpunkte.)* (Abb. 10. e.);
f) gh: *es gibt keinen Kreis* ψ *mit* $g, h \mathrm{I} \psi$ (Abb. 10. f.).

Wenn $X \neq X^{g} = X^{h} = Y$ *existieren, so sind* X, Y *Fixpunkte. In diesem Fall existieren* β *mit* $\beta \mathrm{I} g, \{X, Y\}$ *und* δ *mit* $\delta \mathrm{I} h, \{X, Y\}$.

$\alpha = \beta g$, $\gamma = h\delta$ *eingeführt gilt* $X^{\alpha} = Y$ *und* $X^{\gamma} = Y$, *darum ist* $gh = \alpha\beta\gamma\delta$ *mit* $\alpha, \gamma \perp \beta, \delta$, $\beta \cap \delta = \{X, Y\}$. ∎

Wir zeigen nun, daß gerade und ungerade Elemente voneinander stets verschieden sind, und damit den

SATZ 4.5. *Die Gruppe* $\mathcal{G}$ *enthält als Normalteiler vom Index* 2 *die Gruppe der geraden Elemente aus* $\mathcal{G}$.

BEWEIS. Wäre $\varepsilon p = gh$ (S. 4.3.), so wäre $\varepsilon = ghp = ab$, und $a\varepsilon$ involutorisch. Nun wenden den (S. 2.8.) an.

Ist $\varepsilon \mathrm{I} a$, so ist $a\varepsilon = \alpha$ eine Kreisspiegelung, und $\alpha = b$ im Widerspruch zu (A. 2., S. 2.7.).

Ist $a\varepsilon = \mathcal{A}$ eine Spiegelung, so ist $\mathcal{A} = b$ im widerspruch zum folgenden (S. 4.6.). ∎

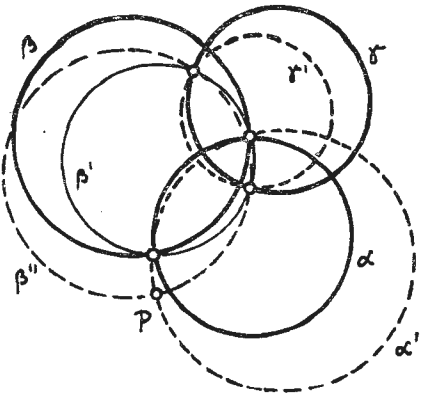


Abb. 11.

SATZ 4.6. a) *Wenn die Spiegelung* $\mathcal{A} = \alpha\beta\gamma$ *mit* $\alpha \perp \beta$, $\gamma \perp \alpha, \beta$ *und der Punkt* P *gegeben sind, so läßt sich* $\mathcal{A} = \alpha'\beta''\gamma'$ *mit* $\alpha', \beta'' \mathrm{I} P$; $\alpha' \perp \beta''$; $\alpha, \beta'' \perp \gamma'$ *schreiben* (Abb. 11.).

b) *Die Spiegelung* $\mathcal{A}$ *hat keinen Fixpunkt.*

BEWEIS. *a)* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha'(\beta'\gamma) = \alpha'\beta''\gamma'$ ist, wo $\alpha', \beta'' \mathrm{I} P$ und aus $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ folgen $\alpha' \perp \beta'$; $\alpha', \beta' \perp \gamma'$, aus $\beta'\gamma = \beta''\gamma'$ folgen $\beta'' \perp \gamma'$; $\alpha' \perp \beta'', \gamma'$.

b) Zu einem beliebigen Punkt P sei die vorige Konstruktion gemacht, ergibt sich $P^{\alpha\beta\gamma} = P^{\alpha'\beta''\gamma'} = P^{\gamma'} \neq P$ aus den Definitionen. ∎

SATZ 4.7. a) *Das Zentrum von* $\mathcal{G}$ *besteht nur aus dem Einselement.*

b) *Die innere Automorphismusgruppe von* $\mathcal{G}$ *ist isomorph zu* $\mathcal{G}$.

BEWEIS. Es ist wohl bekannt, daß (a) und (b) äquivalent sind.

a) Zu einem vom Einselement verschiedenen Element von $\mathcal{G}$ läßt sich ein mit ihm nicht vertauschbares Element finden.

(i) Das Zentrum $\mathfrak{Z}$ enthält kein α, weil ein β mit $\beta \not\perp \alpha$ existiert (S. 2.4.) und damit ist $\alpha\beta\alpha \neq \beta$.

(ii) $p = \{P, Q\} \notin \mathfrak{Z}$, weil ein β mit $\beta \mathrm{I} P$, $\beta \not\mathrm{I} Q$ (S. 2.4.) existiert und damit $p\beta p \neq \beta$ (S. 2.8.).

(iii) $\mathcal{A} = \alpha\beta\gamma \notin \mathfrak{Z}$. Es seien $\alpha \cap \beta = \{C_1, C_2\}$, $\beta \cap \gamma = \{A_1, A_2\}$, $\gamma \cap \alpha = \{B_1, B_2\}$, $\varepsilon = (C_1 A_1 B_1)$, $\varphi = (C_2 A_2 B_2)$. Dann ergibt sich $\varepsilon^{\mathcal{A}} = \varphi \neq \varepsilon$ aus (D. 2.5.)

(iv) $\varepsilon p \notin \mathfrak{Z}$. Sonst wäre $(p\varepsilon)\varepsilon(\varepsilon p) = p\varepsilon p = \varepsilon$, d.h. $\varepsilon p = \varphi$ oder $\varepsilon p = \mathcal{A}$ (S. 2.8.).

Nun dürfen wir auf (i) bzw. auf (iii) hinweisen.

(v) $gh \notin \mathfrak{Z}$ Sonst wäre $(hg)g(gh) = hgh = g$, d.h. $gh = p$ (S. 4.4.). Nun dürfen wir auf (ii) hinweisen. ∎

§ 5. Kreisbündel

DEFINITION 5.1. Wenn solche Kreise ξ, η zu den Kreisen α, β, γ, δ existieren, daß $\alpha\beta\gamma\delta = \xi\eta$ ist, so sagen wir, daß die Relation $[\alpha\beta\gamma\delta]$ besteht. ∎

Diese Relation führt zum Begriff des Kreisbündels.

DEFINITION 5.2. Gilt $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \notin \mathcal{S}$, so wird die Kreismenge $\mathcal{J}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \{\alpha : [\alpha\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3]\}$ *Kreisbündel* genannt. Ist ein Punkt A gegeben, so wird $\mathcal{J}(A) = \{\alpha : \alpha \mathrm{I} A\}$ *P-Bündel* genannt (S. 4.1.) (parabolisches Bündel).

Ist ein Kreis ε gegeben, so wird $\mathcal{J}(\varepsilon) = \{\alpha : \alpha \perp \varepsilon\}$ *H-Bündel* genannt (S. 5.4.) (hyperbolisches Bündel).

Ist eine Spiegelung $\mathcal{A} = \alpha\beta\gamma$ gegeben, so wird $\mathcal{J}(\mathcal{A}) = \{\varepsilon : \varepsilon^{\mathcal{A}} = \varepsilon\}$ *E-Bündel* genannt (S. 5.4.) (elliptisches Bündel).

Im zurückgebliebenen Falle sprechen wir über *B-Bündel* (S. 6.2.) (besonderes Bündel). ∎

Die folgenden Sätze unterstützen die (D. 5.2.).

SATZ 5.1. a) *Wenn nicht jeder von den Kreisen β, γ, δ mit Punkt P inzidiert, und $\beta\,\gamma\,\delta \notin \mathcal{S}$ ist, so bildet die Kreismenge $\{\alpha : \alpha\,I\,P,\ [\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]\}$ ein Kreisbüschel.*

b) *Liegen irgend drei der Kreise $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im Büschel, so folgt $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$.*

BEWEIS. *a)* Es gilt $(\beta\,\gamma)\,\delta = \beta'\,(\gamma'\,\delta) = \beta'\,\gamma''\,\delta'$, wo $P\,I\,\beta', \gamma''$ jedoch $P\,И\,\delta'$. Wenn $P\,I\,\alpha$ und $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$, d.h. $[\alpha\,\beta'\,\gamma''\,\delta']$ sind, so folgt $\alpha\,\beta'\,\gamma'' \in \mathcal{S}$ aus (S. 4.1. b.): $\alpha \in \not{i}\,(\beta'\,\gamma'')$. $\beta' \neq \gamma''$ folgt aus $\beta\,\gamma\,\delta \notin \mathcal{S}$.

b) Der Beweis läßt sich aus der Identität $(\alpha\,\beta\,\gamma)\,\delta = (\beta\,(\gamma\,\delta\,\alpha))^{\alpha} = ((\delta\,\alpha\,\beta)\,\gamma)^{\delta}$ entnehmen. ∎

Nun erleuchten wir den geometrischen Inhalt der Relation $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$.

DEFINITION 5.3. Betrachten wir einen beliebigen Punkt O und eine beliebige Kreismenge $\{\alpha\}$. Zu einem beliebigen Paar π, τ aus $\{\alpha\}$ sei es $\omega_{\pi\tau}$ ein solcher Kreis, für den $\omega_{\pi\tau}\,I\,O$ und $\pi\,\tau\,\omega_{\pi\tau} \in \mathcal{S}$ gelten.

Liegen die Kreise $\{\omega_{\pi\tau} : \pi, \tau \in \{\alpha\},\ \omega_{\pi\tau}\,I\,O,\ \pi\,\tau\,\omega_{\pi\tau} \in \mathcal{S}\}$ in einem Kreisbüschel, so wird dieses Büschel mit $\not{i}\,(\{\alpha\}, O)$ bezeichnet. ∎

Wir wünschen die Eindeutigkeit des Büschels $\not{i}\,(\{\alpha\}, O)$ nicht. Ist beispielweise $\{\alpha\}$ ein Kreisbüschel, so besteht die vorige Menge $\{\omega_{\pi\tau}\}$ eventuell aus einzigem Kreis, der sich zu vielen Kreisbüschel gehören läßt.

SATZ 5.2. *Es gilt $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$ genau dann, wenn ein Kreisbüschel $\not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$ nach* (D. 5.3.) *zu einem O existiert.*

a) *Zu gegebenen O, α, β, γ existiert Kreisbüschel $\not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma\}, O)$. Wenn $\alpha\,\beta\,\gamma \notin \mathcal{S}$ ist, und $O\,I\,\alpha, \beta, \gamma$ nicht gilt, so ist das hervorgehende $\not{i}$ eindeutig bestimmt.*

b) *Ist $\alpha\,\beta\,\varepsilon \in \mathcal{S}$, so läßt sich $\not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma\}, O) = \not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}, O)$ erzielen.*

c) *Existiert $\not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$, und gilt es $\alpha \neq \beta$, $\alpha\,\beta = \alpha'\,\beta'$, so ist $\not{i}\,(\{\alpha', \beta', \gamma, \delta\}, O) = \not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$.*

d) *Wenn $\alpha\,\beta\,\gamma \in \mathcal{S}$ oder $\alpha, \beta, \gamma, \delta\,I\,P$ ist, so existiert das Kreisbüschel $\not{i}\,(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$.*

BEWEIS. Zuerst beweisen wir die Behauptungen (a)–(d), aus den der Satz folgt.

a) Die Behauptung folgt sofort aus (S. 5.1.). Zum Beispiel gelten $[\omega_{\alpha\beta}\,\alpha\,\beta\,\gamma]$ und $\omega_{\alpha\beta}\,I\,O$. $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\gamma} = \omega_{\gamma\alpha}$ ist genau dann, wenn $\alpha\,\beta\,\gamma \in \mathcal{S}$ ist.

b) Wir dürfen voraussetzen, daß $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ verschieden, ferner $\gamma\,И\,O$ oder $\varepsilon\,И\,O$ sind, sonst ist die Behauptung offenbar. So ist $\omega_{\gamma\delta}$ eindeutig bestimmt (S. 3.5.). Die Behauptung (a) auf $\beta, \gamma, \varepsilon$ angewandt erhälten wir $\omega_{\beta\varepsilon}\,\omega_{\gamma\varepsilon}\,\omega_{\beta\gamma} \in \mathcal{S}$, d.h. $\omega_{\alpha\beta}\,\omega_{\beta\gamma}\,\omega_{\gamma\varepsilon} \in \mathcal{S}$, ja ist $\omega_{\alpha\varepsilon} = \omega_{\beta\varepsilon} = \omega_{\alpha\beta}$.

(i) Im Falle $\omega_{\alpha\beta} \neq \omega_{\beta\gamma}$ gilt $\omega_{\gamma\varepsilon} \in \not{i}\,(\omega_{\alpha\beta}\,\omega_{\beta\gamma})$.

(ii) Im Falle $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\gamma}$ und $\omega_{\alpha\beta} \neq \omega_{\alpha\gamma}$ wenden wir a) auf $\alpha, \gamma, \varepsilon$ an: $\omega_{\alpha\varepsilon}\,\omega_{\alpha\gamma}\,\omega_{\gamma\varepsilon} \in \mathcal{S}$, d.h. $\omega_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\gamma}\,\omega_{\gamma\varepsilon} \in \mathcal{S}$ also $\omega_{\gamma\varepsilon} \in \not{i}\,(\omega_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\gamma})$.

(iii) Im Falle $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma} = \omega_{\beta\gamma} = \omega$ gilt $\alpha\,\beta\,\gamma \in \mathcal{S}$ und so $\omega_{\gamma\varepsilon} = \omega$.

c) Wir haben $\not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma\}, O) = \not{i}(\{\alpha, \beta, \delta\}, O)$, vorausgesetzt. Nach (b) gilt

$$\not{i}(\{\alpha', \alpha, \beta, \gamma\} O) = \not{i}(\{\beta', \alpha, \beta, \gamma\}, O) = \not{i}(\{\alpha', \alpha, \beta, \delta\}, O) = \not{i}(\{\beta', \alpha, \beta, \delta\}, O),$$

und die Behauptung folgt aus $\omega_{\alpha'\beta'} = \omega_{\alpha\beta}$.

d) Wir dürfen voraussetzen: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind verschieden (a).

Ist $\alpha\beta\gamma \in \mathcal{S}$, so wenden wir (b) an. Gilt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \,I\, P$, so befriedigt das mit O, P inziden Kreisbüschel die Behauptung. (Im Falle $O = P$ ist das nicht eindeutig bestimmt.)

Nun setzen wir $[\alpha\beta\gamma\delta]$ *voraus.* Es ist $(\alpha\beta)\gamma\delta = \alpha'(\beta'\gamma)\delta = \alpha'\beta''(\gamma'\delta) = \alpha'\beta''\gamma''\delta'$, wo $P\,I\,\alpha', \beta'', \gamma''$ ist. Also $[\alpha\beta\gamma\delta] \Rightarrow [\alpha'\beta''\gamma''\delta']$. Dann ist $\alpha'\beta''\gamma'' \in \mathcal{S}$ oder $\delta' \,I\, P$ (S. 4.1. b.). Aus (d) folgt in beiden Fällen, daß $\not{i}(\{\alpha', \beta'', \gamma'', \delta'\}, O)$ zu beliebigem O existiert (im Falle $\gamma'' = \delta'$ folgt es aus (a)).

Nach (c) gilt.

$$\not{i}(\{\alpha', \beta'', \gamma'', \delta'\}, O) = \not{i}(\{\alpha', \beta'', \gamma', \delta\}, O) = \ldots = \not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O).$$

Nun setzen wir voraus, daß ein $\not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$ *zu* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *existiert.* Der vorige Gedankengang kann umgekehrt gelesen werden. Dann ist $\not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O) = \not{i}(\{\alpha', \beta'', \gamma'', \delta'\}, O)$ und $P\,I\,\alpha', \beta'', \gamma''$. Wenn $\delta' \,I\, P$ ist, so ist $[\alpha'\beta''\gamma''\delta']$ und damit $[\alpha\beta\gamma\delta]$ erfüllt (S. 4.1. a.).

Im anderen Falle ist δ' von $\alpha', \beta'', \gamma''$ verschieden, und gelten $\omega_{\alpha'\delta'} = \alpha'$, $\omega_{\beta''\delta'} = \beta''$, $\omega_{\gamma''\delta'} = \gamma''$, also $\alpha', \beta'', \gamma'' \in \not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$. Dann sind $\alpha'\beta''\gamma'' = \xi$ und $\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha'\beta''\gamma'')\delta' = \xi\,\delta'$, also gilt $[\alpha\beta\gamma\delta]$. ∎

SATZ 5.3. a) *Gilt* $[\alpha\beta\gamma\delta]$, *so besteht die Bündelrelation auch für jede Permutation von* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

b) *Liegen* α, β, γ *nicht im Büschel und gilt* $[\alpha\beta\gamma\delta]$, $[\alpha\beta\gamma\varepsilon]$, *so folgt* $[\alpha\beta\delta\varepsilon]$.

c) *Das Kreisbündel* $\mathcal{J}(\alpha\beta\gamma)$ *ist von seinen irgend drei, nicht in Büschel liegenden Elementen eindeutig bestimmt.*

d) *Aus* $\varepsilon \in \not{i}(\alpha\beta)$; $\alpha, \beta \in \not{i}(\alpha'\beta'\gamma')$ *folgt* $\varepsilon \in \mathcal{J}(\alpha'\beta'\gamma')$.

BEWEIS. *a)* Das folgt aus (S. 5.2.), da die Konstruktion eines $\not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$ nicht von der Reihenfolge der betrachteten Kreise abhängt.

b) Nehmen wir $O\,I\,\delta$ an. Ist $O\,I\,\alpha, \beta, \gamma$ so folgt $\varepsilon\,I\,O$ und $[\alpha\beta\delta\varepsilon]$ aus (S. 4.1.). Ist etwa $O \not{I} \alpha$, so ist $\not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma\}, O)$ eindeutig bestimmt (S. 5.2. a.). Also gilt $\not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O) = \not{i}(\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon\}, O)$, und wegen $O\,I\,\delta, \omega_{\alpha\delta} = \delta$ gilt $\delta \in \not{i}$. Darum ist $\omega_{\delta\varepsilon} = \delta$, also existiert $\not{i}(\{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon\}, O)$. Aus (S. 5.2.) folgt $[\alpha\beta\delta\varepsilon]$.

c) Das folgt aus (a), (b) in mehreren Schritten, wie in [1.].

d) Wir dürfen etwa $\alpha' \notin \not{i}(\alpha\beta)$ voraussetzen. Dann ist $\mathcal{J}(\alpha'\beta'\gamma') = \mathcal{J}(\alpha\beta\alpha')$. Aus $[\varepsilon\alpha\beta\alpha']$ folgt $\varepsilon \in \mathcal{J}(\alpha\beta\alpha')$ (S. 5.1. b) also die Behauptung. ∎

SATZ 5.4. a) *Die zu einem festen Kreis ε senkrechten Kreise bilden ein Bündel, das Lotbündel $\mathcal{J}(\varepsilon)$.*

b) *Aus $[\alpha\beta\gamma\pi]$ und $\alpha, \beta, \gamma \perp \pi$ folgt $\alpha\beta\gamma \in \mathcal{S}$.*

c) *Wenn $\alpha\beta\gamma = \mathcal{A}$ ein Spiegelung ist, so ist $\{\varepsilon : \varepsilon^{\mathcal{A}} = \varepsilon\} = \mathcal{J}(\alpha\beta\gamma)$.*

BEWEIS. *a)* Nehmen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta \perp \varepsilon$ an. Wählen wir einen Punkt O aus. Aus $\{\varphi : \varphi \mathrm{I} O, \varphi \perp \varepsilon\} = \not{\iota}(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$ folgt $[\alpha\beta\gamma\delta]$ (S. 5.2.).

b) Das folgt indirekt aus (a). Wäre $\gamma \notin \not{\iota}(\alpha\beta)$, so wäre $\mathcal{J}(\alpha\beta\gamma) = \mathcal{J}(\pi)$, und $\pi \perp \pi$.

c) Es sei $P \mathrm{I} \varepsilon$. Wir dürfen voraussetzen (S. 4.6. a., 5.3.), daß $\alpha, \beta \mathrm{I} P$, $\gamma \mathrm{U} P$ gelten. Aus $P^{\alpha\beta\gamma} = P^{\gamma}$ folgt $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathrm{I} P^{\gamma}$.

(i) Ist $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon$ so gilt $\varepsilon \mathrm{I} \{P, P^{\alpha}\}$, $\varepsilon \in \not{\iota}(\alpha\beta)$ also $[\varepsilon\alpha\beta\gamma]$.

(ii) Ist $[\varepsilon\alpha\beta\gamma]$, so folgen $\varepsilon \in \not{\iota}(\alpha\beta)$, $\varepsilon \perp \gamma$ aus (S. 4.1. b.) und $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon$ aus (S. 2.8.). ∎

SATZ 5.5. a) *Zu zwei verschiedenen Bündeln $\mathcal{J}_1(\alpha\beta\gamma)$ und $\mathcal{J}_2(\pi\varrho\sigma)$ gibt es genau ein Kreisbüschel, das von beiden Bündeln enthaltet ist.*

b) *Die Kreise α, β, γ gehören genau dann einem Büschel $\not{\iota}$ an, wenn die Lotbündel $\mathcal{J}(\alpha)$, $\mathcal{J}(\beta)$, $\mathcal{J}(\gamma)$ das zu $\not{\iota}$ senkrechtes Büschel $\not{\iota}^*$ gemein haben.*

BEWEIS. *a)* Es sei A ein Punkt, der nicht mit beiden Bündeln inzident ist. Aus (S. 5.1. a.) folgt, daß die Büschel $\not{\iota}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon \mathrm{I} A, \varepsilon \in \mathcal{J}_1\}$ und $\not{\iota}_2 = \{\varphi : \varphi \mathrm{I} A, \varphi \in \mathcal{J}_2\}$ eindeutig existieren und verschieden sind (i), oder ein von ihnen gemeinsames Büschel der beiden Bündel ist (ii). Untersuchen wir diese Fälle.

(i) (∗) Ist ein von $\not{\iota}_1$, $\not{\iota}_2$ E-Büschel, so gibt es einen Kreis, der mit A inzident und von $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ enthaltet wird (A. 1., S. 2.5.).

(∗ ∗) Sind $\not{\iota}_1, \not{\iota}_2$ verschiedene P-Büschel, so haben sie keinen gemeinsamen Kreis. In diesem Fall sind $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}(\omega_1)$, $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}(\omega_2)$ Lotbündeln, wo $\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$ ist. Ist ein Punkt C von A und B verschieden, so geht genau ein Kreis von $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ durch C. Die Konstruktion von ω_1, ω_2 ergibt sich einfach aus (S. 2. 5. 2. 6., a., 5. 3. c., 5. 4. a.): $\omega_1 \mathrm{I} A$, A^{α}, A^{β}, A^{γ}, und $\omega_2 \mathrm{I} A$, A^{π}, A^{ϱ}, A^{σ}, bestimmen bereits die Kreise ω_1 und ω_2.

Gemeinsame Kreise von $\mathcal{J}_1$, und $\mathcal{J}_2$ bilden ein Büschel nach (S. 5.3. c.), sonst wären $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ nicht verschieden.

(ii) Nun haben $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ genau ein gemeinsames Büschel.

b) Aus (S. 3.7. a.) folgt auch diese Aussage. ∎

§ 6. Bedeutende Teilgruppen von $\mathcal{G}(\mathcal{S})$. Satz von MIQUEL

Im weiteren geben wir nur einen Gedankengang. Die Beweise lassen sich aus der bisherigen Behandlung und der angeführten Literatur entnehmen.

SATZ 6.1. *$\mathcal{G}(\mathcal{S})$ ist „ein hyperbolischer Gruppenraum", wenn die Kreisspiegelungen „den Ebenen", die Punktpaarspiegelungen „den Geraden", die Spiegelungen „den Punkten" entsprechen.*

BEWEIS. Die Gültigkeit der von AHRENS [1] ausgesagten Axiomen läßt sich in $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ leicht kontrollieren. Wir befassen uns nur mit Axiom 1: *zu* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ *gibt es stets ein* ε *mit* $\varepsilon | \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Aus (S. 4.6. a., 5.1. a.,) folgt, daß ein E-Bündel nur E-Büschel hat. Nach (S. 5.5. a.) haben $\mathfrak{J}(\mathcal{A})$ und $\mathfrak{J}(\mathcal{B})$ ein gemeinsames E-Büschel. Es habe das Punktpaar $\{P, Q\}$. Dann bestimmen wir das zu $P, \mathfrak{J}(\mathcal{C})$ gehörende E-Büschel mit dem Punktpaar $\{P, R\}$. Dann ist $\varepsilon = (P\,Q\,R)$. ∎

Unsere Behandlung begründet den hyperbolischen Raum mit einer „Endenrechnung", unsere Punkte spielen die Rolle der Enden im entsprechenden hyperbolischen Raum. Über diese von LIEBMANN entstammende Idee kann man auch bei COXETER [4] lesen.

SATZ 6.2. *Die Elemente eines Bündels* $\mathfrak{J}$ *erzeugen eine Teilgruppe* $\mathfrak{G}(\mathfrak{J})$ *von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$, *in der sich „eine Ebene" definieren läßt. Hier entsprechen die Kreisspiegelungen „den Geraden", die Punktpaarspiegelungen „den Punkten der Ebene" nach* BACHMANN ([2] § 3.).

a) *Wenn* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(A)$ *ein P-Bündel ist, so ist* $\mathfrak{G}(\mathfrak{J}(A))$ *eine euklidische Gruppenebene mit freier Beweglichkeit.*

b) *Wenn* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\varepsilon)$ *ein H-Bündel ist, so ist* $\mathfrak{G}(\mathfrak{J}(\varepsilon))$ *eine nichteuklidische, nicht-elliptische Gruppenebene.*

c) *Wenn* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\mathcal{A})$ *ein E-Bündel ist, so ist die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}(\mathfrak{J}(\mathcal{A}))/\{\mathcal{A}, 1\}$ *eine elliptische Gruppenebene.*

d) *Wenn* $\mathfrak{J}$ *ein B-Bündel ist, so hat es kein P-Büschel.* $\mathfrak{G}(\mathfrak{J})$ *ist eine nicht euklidische, nicht elliptische Gruppenebene.*

BEWEIS. Wir können ohne Schwierigkeiten nachprüfen, daß die Axiomen der metrischen Gruppenebene in den obigen Gruppen erfüllt sind ([2] § 3.).

($\bar{\text{A}}$. 1.) *Zu* a, b *gibt es ein* γ *mit* $a, b | \gamma$.

($\bar{\text{A}}$. 2.) *Aus* $a, b | \gamma$, δ *folgt* $a = b$ *oder* $\gamma = \delta$ (S. 5.1., 5.3.).

($\bar{\text{A}}$. 3.) *Aus* $\alpha, \beta, \gamma | e$ *folgt* $\alpha\,\beta\,\gamma \in \mathfrak{J}$.

($\bar{\text{A}}$. 4.) *Aus* $\alpha, \beta, \gamma | \varepsilon$ *folgt* $\alpha\,\beta\,\gamma \in \mathfrak{J}$ (S. 5.3., 5.4.).

($\bar{\text{A}}$. D.) *Es gibt* π, ϱ, σ *derart, daß* $\pi | \varrho$ *und weder* $\sigma | \pi$ *noch* $\sigma | \varrho$ *noch* $\sigma | \pi\,\varrho$ *gilt* (S. 2.4., 5.3., 5.4.).

($\bar{\text{A}}$. R.) *Es gibt* $\alpha, \beta, \gamma\,\delta$ *mit* $\alpha, \beta | \gamma, \delta$ *und* $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$. Aus (S. 5.3., 5.4.) folgt, daß dieses Axiom genau im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(A)$ erfüllt ist.

($\bar{\text{A}}$. P.) *Es gibt* α, β, γ *mit* $\alpha\,\beta\,\gamma = 1$. Aus (S. 5.4.) folgt, daß dieses Axiom genau im Falle (c) erfüllt ist.

($\bar{\text{A}}$. V*) *Zu* α, β *gibt es stets ein* γ *mit* $\alpha, \beta | \gamma$ *oder ein* c *mit* $\alpha, \beta | c$, d.h. α *und* β *sind verbindbar.*

Dieses Axiom ist in den Fällen (a) und (c) erfüllt. Das folgt im Falle (a) daraus, daß ein P-Bündel nur P-Büschel durch A und E-Büschel enthält, im Falle (c) daraus, daß E-Bündel nur E-Büschel enthält.

Im Falle (b) ist ($\overline{\text{A}} \sim \text{V}^*$) erfüllt, denn $\mathcal{J}(\varepsilon)$ enthält ein P-Büschel und keinen Kreis, der zum P-Büschel senkrecht ist (S. 5.4. b.).

Im Falle (d) scheint es uns, daß ($\overline{\text{A}}$ V*) gelte (halbelliptische Ebene). Die Frage ist offen.

($\overline{\text{A}}$. H.) *Gilt* $\alpha, \beta, \gamma | p$ *und sind* α, φ *und* β, φ *und* γ, φ *unverbindbar, so ist* $\alpha = \beta$ *oder* $\alpha = \gamma$ *oder* $\beta = \gamma$.

Dieses Axiom ist im Falle (b) genau dann erfüllt, wenn $\mathcal{J}(\varepsilon)$ kein B-Büschel enthält.

Es seien $\varepsilon \cap \varphi = \{F_1, F_2\}$, $p = \{P_1, P_2\}$, $\alpha = (P_1 P_2 F_1)$. $\beta = (P_1 P_2 F_2)$. Dann sind φ, α und φ, β unverbindbar. Es seien $\gamma \,\mathrm{I}\, p$, $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$.

(i) Es sei $\not\parallel (\gamma\, \varphi)$ ein B-Büschel. Dann ist γ, φ nach den Definitionen unverbindbar.

(ii) Es sei γ, φ unverbindbar, und $\mathcal{J}(\varepsilon)$ enthalte kein B-Büschel. Dann ist $\gamma \cap \varphi$ leer. Das zu $\not\parallel (\gamma\, \varphi)$ senkrechte Büschel, welches ε enthält, besteht aus schneidenden Kreisen. Die Schnittpunkte seien C_1, C_2. Dann existiert ein Kreis σ durch C_1, C_2, für den $\sigma \in \mathcal{J}(\varepsilon)$ und $\sigma | \gamma, \varphi$ gelten, was ein Widerspruch ist.

Nun zeigen wir im euklidischen Fall (a), daß es zu zwei beliebigen Kreisen $\alpha, \beta \in \mathcal{J}(A)$ einen Kreis $\varepsilon \in \mathcal{J}(A)$ mit $\alpha^\varepsilon = \beta$ gibt (freie Beweglichkeit). Wir wählen ein φ mit $\varphi \perp \alpha, \beta$ und die von A verschiedenen P, Q mit $P \,\mathrm{I}\, \varphi, \alpha$ bzw. $Q \,\mathrm{I}\, \varphi, \beta$ aus. Durch A geht genau ein ε mit $P^\varepsilon = Q$, und $\varepsilon \in \not\parallel (\alpha\, \beta)$ (S. 2.6., 3.3–3.5.), also gelten $\alpha^\varepsilon = \beta$, $\varepsilon \in \mathcal{J}(A)$. ∎

Satz 6.3. (Satz von Miquel). *Liegt jedes Quadrupel von* $(A_1\, A_2\, B_2\, B_1)$, $(A_2\, A_3\, B_3\, B_2)$, $(A_3\, A_4\, B_4\, B_3)$, $(A_4\, A_1\, B_1\, B_4)$, $(A_1\, A_2\, A_3\, A_4)$ *auf einem Kreis, ferner ist* B_4 *von den anderen Punkten verschieden, so liegt das Quadrupel* $(B_1\, B_2\, B_3\, B_4)$ *auf einem Kreis* (Abb. 12.).

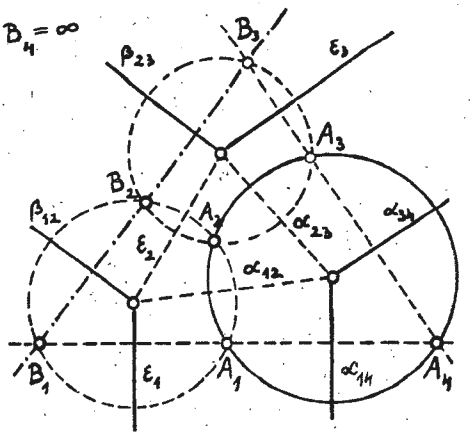


Abb. 12.

Der Beweis ist dem klassischen euklidischen Fall analog. Es seien $\alpha_{i,i+1}$ die Kreise mit

$$\alpha_{i,i+1} \perp (A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i),\ (A_i A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3}),\ \alpha_{i,i+1} \mathrm{I}\, B_4;$$

$\beta_{j,j+1}$ die Kreise mit

$$\beta_{j,j+1} \perp (B_j B_{j+1} A_{j+1} A_j),\quad B_j^{\beta_{j,j+1}} = B_{j+1},\quad \beta_{j,j+1} \mathrm{I}\, B_4;$$

ε_k die Kreise mit

$$\varepsilon_k \perp (A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}),\ (A_k B_k B_{k-1} A_{k-1}),\ \varepsilon_k \mathrm{I}\, B_4;$$

wo die Indices mit $j = 1, 2$; $k = 1, 2, 3 \bmod 4$ angenommen sind.

Nun behaupten wir $\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{41} = 1$, $\varepsilon_j \alpha_{j,j+1} \varepsilon_{j+1} \beta_{j,j+1} = 1$. Wir beweisen so etwa die erste Gleichung. Die Kreise $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{41}$ bilden ein Büschel durch B_4 zu $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ senkrecht. Aus $A_1^{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}} = A^4$ und aus (S. 3.3–5.) folgt $\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34} = \alpha_{41}$.

Nun ist

$$1 = (\varepsilon_1 \alpha_{12} \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \alpha_{23} \varepsilon_3)(\varepsilon_3 \alpha_{34})(\alpha_{41} \varepsilon_1) = (\beta_{12}\beta_{23})(\varepsilon_3 \alpha_{34})(\alpha_{41} \varepsilon_1).$$

Wir wissen, daß $\varepsilon_3 \cap \alpha_{34} = \alpha_{41} \cap \varepsilon_1 = B_4$ gilt. Wie im Beweis (S. 4.1., Abb. 8.) folgt $\beta_{12} \cap \beta_{23} = B_4$, also liegt $(B_1 B_2 B_3 B_4)$ auf einem Kreis (S. 2.5.).

Die entarteten Fälle soll man im Geiste des Beweises verstehen. ∎

Dieser Satz hat eine große Bedeutung bei der Algebraisierung der Kreisebene ([7], [3]).

§ 7. Projektive Einbettung und Algebraisierung

In diesem § können wir auf die gewöhnliche Methode hinweisen (z.B. in [1], [6]), mit welcher die durch das Axiomensystem gekennzeichnete Bewegungsgruppen metrischer Kreisebenen als Untergruppen von Bewegungsgruppe dreidimensionaler projektiv metrischer Räume darstellbar sind.

DEFINITION 7.1. Als Idealgerade $\mathfrak{i}$ bezeichnen wir ein Kreisbüschel, als Idealpunkt $\mathcal{J}$ ein Kreisbündel. $\mathcal{J}(\alpha\beta\gamma)\,\mathrm{I}\,\mathfrak{i}(\varepsilon\varphi)$ bedeute $\varepsilon, \varphi \in \mathcal{J}(\alpha\beta\gamma)$. Die Punkte heißen auch eigentliche Idealpunkte.

Wir sagen: zwei verschiedene Idealgeraden $\mathfrak{i}_1(\alpha\beta)$, $\mathfrak{i}_2(\gamma\delta)$ bestimmen eine Idealebene, wenn $[\alpha\beta\gamma\delta]$ gilt. Dann gibt es genau einen Idealschnittpunkt $\mathcal{J}(\alpha\beta\gamma\delta)$, für den $\mathcal{J}\,\mathrm{I}\,\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2$. Die Idealebenen werden auch mit $\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnet. Die Kreise können auch eigentliche Idealebenen genannt werden. Es sei $\varepsilon = (\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2)$ eine Idealebene mit $\mathcal{J}\,\mathrm{I}\,\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2$. Ein Idealpunkt $\mathcal{J}_1$ inzidiert mit ε genau dann, wenn $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$ gilt oder eine Idealgerade $\mathfrak{i}_3$ durch $\mathcal{J}_1$ existiert, welche $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ in von $\mathcal{J}$ verschiedenen Idealpunkten schneidet. Eine Idealgerade $\mathfrak{i}$ inzidiert mit ε genau dann, wenn $\mathfrak{i}$ zwei verschiedene, zu ε inzidente Idealpunkte enthält. ∎

SATZ 7.1. *Die auf der Kreisebene eingeführten Idealpunkten, Idealgeraden und Idealebenen bilden einen dreidimensionalen projektiven Raum, in welchem der Satz von* PAPPUS-PASCAL *und das FANO-Axiom gelten.*

BEWEIS. Nach den Sätzen von § 5 (vor allem nach (S. 5.5. a.) läßt er sich durchführen [1]. Da die Bündel BACHMANN-sche metrische Ebenen sind (S. 6.2.), gelten der Satz von PAPPUS-PASCAL und das FANO-Axiom in den erweiterten projektiven Bündeln und auf den Idealebenen. ∎

DEFINITION 7.2. Die Idealgerade $\mathfrak{j}_1(\alpha\,\beta)$ und $\mathfrak{j}_2(\gamma\,\delta)$ nennen wir zueinander polar, wenn die entsprechenden Kreisbüschel zueinander senkrecht sind (D. 3.3.). ∎

SATZ 7.2. *Schneiden sich zwei Idealgeraden in einem Punkt, so schneiden sich auch deren Polaren.*

BEWEIS. Wir können die Sätze (S. 5.2., 5.5. b.) anwenden. Nun gilt $[\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta]$ für $\mathfrak{j}_1(\alpha\,\beta), \mathfrak{j}_2(\gamma\,\delta)$. Wie wir in den erwähnten Beweisen bezeichnet haben, können wir die Folgenden schreiben: $\alpha, \beta, \omega_{\alpha\beta} \in \mathfrak{j}_1$; $\gamma, \delta, \omega_{\gamma\delta} \in \mathfrak{j}_2$; $\beta, \gamma, \omega_{\beta\gamma} \in \mathfrak{j}_3$; $\omega_{\alpha\beta}, \omega_{\beta\gamma}, \omega_{\gamma\delta} \in \mathfrak{f}\,(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, O)$. Die entsprechenden Lotbündel inzidieren mit den polaren Idealgeraden:

$$\mathcal{J}(\alpha), \mathcal{J}(\beta), \mathcal{J}(\omega_{\alpha\beta})\,\mathrm{I}\,\mathfrak{j}_1^*;\ \mathcal{J}(\gamma), \mathcal{J}(\delta), \mathcal{J}(\omega_{\gamma\delta})\,\mathrm{I}\,\mathfrak{j}_2^*;$$

$$\mathcal{J}(\beta), \mathcal{J}(\gamma), \mathcal{J}(\omega_{\beta\gamma})\,\mathrm{I}\,\mathfrak{j}_3^*;\ \mathcal{J}(\omega_{\alpha\beta}), \mathcal{J}(\omega_{\beta\gamma}), \mathcal{J}(\omega_{\gamma\delta})\,\mathrm{I}\,\mathfrak{f}^*.$$

Wir dürfen voraussetzen, daß die vorkommenden Elementen verschieden sind. Die Idealebene $(\mathfrak{j}_3^*, \mathfrak{f}^*)$ enthält $\mathfrak{j}_1^*$ und $\mathfrak{j}_2^*$ (S. 5.3., 7.1.). ∎

DEFINITION 7.3. Ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\alpha\,\beta\,\gamma)$ so sei die Polarebene $\mathcal{J}^*$ von $\mathcal{J}$ die Idealebene $(\mathcal{J}(\alpha)\,\mathcal{J}(\beta)\,\mathcal{J}(\gamma))$ (S. 5.5. b.). Ist $\varepsilon = (\mathcal{J}_1\,\mathcal{J}_2\,\mathcal{J}_3)$, so sei der Pol ε^* von ε der Idealpunkt $(\mathcal{J}_1^*\,\mathcal{J}_2^*\,\mathcal{J}_3^*)$. ∎

Nun können wir die folgenden Sätze ohne ausführliche Beweise aussagen [1].

SATZ 7.3. *Die eingeführte Polarität ist eine involutorische projektive Korrelation des Idealraumes.* ∎

Die Kreisspiegelung ε ist im Idealraum eine harmonische Homologie, welche die Idealpunkte der Idealebene ε und den Idealpunkt $\mathcal{J}(\varepsilon)$ festläßt. Daraus ergibt sich der

SATZ 7.4. *Durch das Axiomensystem in* **§ 2.** *gekennzeichnete Bewegungsgruppen der metrischen Kreisebenen sind als Untergruppen von Bewegungsgruppen dreidimensionaler projektiv metrischer Räume darstellbar.* ∎

Man kann einsehen, daß genau die eigentlichen Idealpunkte mit ihren Polarebenen inzidieren, und diese Ebenen unter den eigentlichen Idealpunkten nur ihren Pol enthalten. So gelangen wir zur Algebraisierung der metrischen Kreisebenen. Das detaillieren wir nicht, denn wir können auf die damit gleichwertige Methode W. BENZ ([3] III. § 2.) hinweisen Hier werden die euklidischen Möbiusebenen den Arbeiten von EWALD

[5], [6] angeknüpft algebraisiert. Unsere Kreisebenen sind allgemeinere, da die B-Büschel hier nicht ausgeschlossen sind. Den Unterschied können wir kurz so formulieren. Eine euklidische Möbiusebene kann man mit Hilfe eines euklidischen Körpers K algebraisieren, also ist K angeordnet, und ist jedes nicht negative Element ein Qudrat. Eine von unseren Kreisebenen kann man mit einem pythagoreischen Körper K kennzeichnen: -1 ist kein Quadrat in K und für jedes c aus K ist $1+c^2$ Quadrat in K. Unsere Kreisebenen können pythagoreische Möbiusebene genannt werden.

DEFINITION 7.4. Wir definieren den Begriff der pythagoreischen Kreisebene $\mathcal{K}(K)$, wie folgt: Es sei K ein pythagoreischer Körper, ferner

$$\mathbf{P} = \{(x,y) : x,y \in K\} \cup \{\infty\}$$

die Menge der Punkte.

Ein Kreis durch ∞ sei eine Menge

$$\{(x,y) : ax+by+c = 0;\ a,b,c,x,y \in K;\ (a,b) \neq (0,0)\} \cup \{\infty\}.$$

Ein zu ∞ nicht inzidenter Kreis sei eine Menge

$$\{(x,y) : (x-u)^2+(y-v)^2 = r^2;\ x,y,u,v,r \in K,\ r \neq 0\}.$$

Eine Kreisspiegelung $(x,y) \to (x',y')$ wird in der Form

$$x' = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\,x - \frac{2ab}{a^2+b^2}\,y - \frac{2ac}{a^2+b^2},$$

$$y' = -\frac{2ab}{a^2+b^2}\,x - \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\,y - \frac{2bc}{a^2+b^2},$$

$a^2+b^2 \neq 0$; $\infty \to \infty$; bzw.

$$x' = \frac{r^2(x-u)}{(x-u)^2+(y-v)^2} + u, \qquad y' = \frac{r^2(y-v)}{(x-u)^2+(y-v)^2} + v,$$

$(x,y,) \neq (u,v)$; $(u,v) \to \infty$, $\infty \to (u,v)$ gegeben.

Die Elemente der Bewegungsgruppe $\mathcal{G}$ von $\mathcal{K}(K)$ seien die aus Kreisspiegelungen bestehenden Kompositionen. ∎

SATZ 7.5. *Zu einer durch das Axiomensystem in § 2. gekennzeichneten Kreisebene $\mathcal{K}$ gibt es einen pythagoreischen Körper K so, daß $\mathcal{K}$ als $\mathcal{K}(K)$ darstellbar ist. Umgekehrt genügt jede pythagoreische Kreisebene unserem Axiomensystem.* ∎

Dieses Resultat entspricht dem Satz im Buch ([2] § 13,2.) über eine freie Beweglichkeit besitzende metrisch-euklidische Ebene, sogar der dortige Beweis läßt sich hier mit Modifikation benutzen (S. 6.2. a.).

Mit diesen Hinweisen schließen wir die Arbeit.

Literatur

[1] AHRENS, J., Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff, *Math. Z.*, **71** (1959), 154–185.
[2] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2. Auflage, 1973.
[3] BENZ, W., *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer, 1973.
[4] COXETER, H. S. M., The inversive plane and hyperbolic space, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **29** (1966), 217–242.
[5] EWALD, G., Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie, *Math. Ann.*, **131** (1956), 354–371.
[6] EWALD, G., Begründung der Geometrie der ebenen Schnitte einer Semiquadrik, *Arch. Math.*, **8** (1957), 203–208.
[7] WAERDEN, B. L. VAN DER., SMID, L. J., Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie, *Math. Ann.*, **110** (1935), 753–776.
[8] MÄURER, H., Kreisspiegelungen in Möbiusebenen, *Geometriae Dedicata*, **2** (1973), 261–268.

О ПЛОТНЕЙШЕЙ УПАКОВКЕ ЕДИНИЧНЫХ ШАРОВ В 3-МЕРНЫХ И 4-МЕРНЫХ СЛОЯХ

Й. ХОРВАТ

Кафедра Начертательной и Проективной Геометрии Университета им. Л. Этвеша

К шестидесятилетию со дня рождения Л. Фейеша Тота

(Поступило 11.11. 1974.)

Пусть $\Gamma^n(t)$ — слой в n-мерном евклидовом пространстве ограниченном двумя параллельными гиперплоскостями Π_1 и Π_2, расстояние между которыми равно t. Далее пусть $\{S_i^n\}$ — некоторое множество n-мерных единичных шаров, расположенных в слое $\Gamma^n(t)$ и не имеющих общих внутренних точек. Обозначим через $\mathbf{Z}^n(R)$ цилиндр радиуса R, имеющий фиксированную ось $\mathbf{a}$, перпендикулярную гиперплоскости Π_1. Плотность упаковки шаров $\{S_i^n\}$ в слое $\Gamma^n(t)$ определяется через

$$d_n(t) = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\sum\limits_{R} S_i^n}{\mathbf{Z}^n(R) \cap \Gamma^n(t)}, \tag{1}$$

где $\sum\limits_{R} S_i^n$ — сумма объема шаров, находящихся в цилиндре $\mathbf{Z}^n(R)$. Легко видеть, что величина $d_n(t)$ не зависит от выбора оси $\mathbf{a}$ цилиндра [2].

В совместной работе [6] с Й. МОЛНАРОМ дана верхняя оценка для плотности шаров $\{S_i^3\}$ в слое $\Gamma^3(t)$, если $2 \leqq t < 4$. Оценка точна, если $t = 2$, или $t = 2 + \sqrt{2}$. В работах [4] и [5] мы дали верхную и нижную оценки для плотности плотнейшей упаковки шаров $\{S_i^4\}$ в слое $\Gamma^4(t)$, если $2 \leqq t \leqq 2 + \sqrt{2}$.

В этой работе мы занимаемся плотнейшей упаковкой шаров $\{S_i^n\}$ в слое $\Gamma^n(t)$ для случая $n = 3$ и $n = 4$. Доказываются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\{S_i^3\}$ — множество 3-мерных единичных шаров, лежащих в слое $\Gamma^n(t)$ и не имеющих общих внутреннпх точек, далее $\{\overline{S_i^3}\}$ — подмножество шаров $\{S_i^3\}$, центры которых составляют двухмерную решетку на некоторой плоскости Π^2 и предположим еще, что при перпендикулярной проекйии центров шаров $\{S_i^3\}\backslash\{\overline{S_i^3}\}$ на плоскости Π^2 в одпом основном параллелограмме решетки не более одной*

из проекций центров шаров. Тогда плотность упаковки шаров $\{S_i^3\}$ *в* $\Gamma^3(t)$ *удовлетворяет оценке*

$$d_3(t) \leqq \frac{2\pi}{3t\sqrt{-1+4t-t^2}}, \quad \text{если} \quad 2 \leqq t \leqq 2+\sqrt{2} \quad \text{и} \tag{2}$$

$$d_3(t) \leqq \frac{\pi(4t-t^2)}{3t\sqrt{-1+4t-t^2}}, \quad \text{если} \quad 2+\sqrt{2} \leqq t \leqq 2+\sqrt{\frac{8}{3}}. \tag{3}$$

Равенство достигается, если множество шаров $\{S_i^3\}$ *составляет два слоя шаров из 3-мерной решетчатой упаковки единичных шаров, центры которых определяются слепующими положительно определенными квадратичными формами:*

$$4x_1^2+4(-1+4t-t^2)x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4(-1+4t-t^2)x_2x_3 \tag{4}$$

в случае $2 \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}$ *и*

$$4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+\frac{2-4t+t^2}{4t-t^2}x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3 \tag{5}$$

в случае $2+\sqrt{2} \leqq t \leqq 2+\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Теорема 2. *Пусть* $\{S_i^4\}$ *– множество 4-мерных единичных шаров, лежащих в слое* $\Gamma^4(t)$ *и не имеющих общих внутренних точек. Предположим, что существует подмножество* $\{\bar{S}_i^4\}$ *шаров* $\{S_i^4\}$, *центры которых составляют 3-мерную решетку на некоторой гиперплоскости* Π^3 *и что при перпендикулярной проекции центров шаров* $\{S_i^4\}\setminus\{\bar{S}_i^4\}$ *на гиперплоскости* Π^3 *в одном основном параллелипеде находится не более одной из проекций центров шаров. Тогда плотность упаковки шаров* $\{S_i^4\}$ *в слое* $\Gamma^4(t)$ *удовлетворяет оценке*

$$d_4(t) \leqq \frac{\pi^2}{8t\sqrt{-2+4t-t^2}}, \quad \text{если} \quad 2 \leqq t \leqq 3 \quad \text{и} \tag{6}$$

$$d_4(t) \leqq \frac{\pi^2}{4t(t-2)\sqrt{-1+4t-t^2}}, \quad \text{если} \quad 3 \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}. \tag{7}$$

Равенство достигается, если множество шаров $\{S_i^4\}$ *составляет два слоя шаров из 4-мерной решетчатой упаковки единичных шаров, центры которых определяются* следующими *положительно определенными квадратичными формами:*

$$4(-2+4t-t^2)x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_4^2+4(-2+4t+t^2)x_1x_4+4x_2x_4+x_3x_4 \tag{8}$$

в случае $2 \leqq t \leqq 3$ *и*

$$4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4(t-2)^2x_4^2+4(t^2-4t+3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+$$
$$+4(t-2)^2(x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4) \tag{9}$$

в случае $3 \leqq t \leqq 2+\sqrt{2}$.

Доказательства теорем проводится с помощью двух лемм. Сперва мы определим понятие пустого шара (круга).

Рассмотрим решетку в n-мерном евклидовом пространстве. Мы будем называть шар пустым, если на его границе, т. е. на сфере, находятся по крайней мере $n+1$ точек решетки, не лежащихся в одной гиперплоскости, причем шар не содержит внутри себя точек решетки [1].

Лемма 1. Пусть $\{S_i^2\}$ – множество единичных кругов, составляющих решетчатую упаковку на плоскости и не имеющих общих внутренних точек. Предположим, что радиус пустого круга, описанного вокруг центров кругов решетки, не меньше R, где $\frac{2}{3}\sqrt{3} \leqq R \leqq 2$. Тогда у плотнейшей упаковки кругов $\{S_i^2\}$ центры кругов определяются положительно определенной квадратичной формой

$$4x_1^2+4(R^2-1)x_2^2 \tag{10}$$

в случае $\sqrt{2} \leqq R \leqq 2$ и формой

$$4x_1^2+4x_2^2+\frac{2-R^2}{R^2}x_1x_2 \tag{11}$$

в случае $\frac{2}{3}\sqrt{3} \leqq R \leqq \sqrt{2}$.

Лемма 2. Рассмотрим в 3-мерном пространстве решетчатую упаковку единичных шаров, не имеющих общих внутренних точек и предположим, что наибольший из радиусов пустых шаров, определенных центрами шаров решетки, не меньше R, где $\sqrt{2} \leqq R \leqq 2$. Тогда у плотнейшей упаковки единичных шаров центры шаров определяются положитель но определенной квадратичной формой

$$4(R^2-2)x_1^2+4x_2^2+4x_3^2 \tag{12}$$

в случае $\sqrt{3} \leqq R \leqq 2$ и форной

$$4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4(3-R^2)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) \tag{13}$$

в случае $\sqrt{2} \leqq R \leqq \sqrt{3}$.

Доказательство леммы 1. и 2. мы не приводим, так как они по существу содержатся в доказательствах теорем 1. и 2. работы [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Легко видеть, что если множество шаров $\{S_i^3\}$ и $\{\bar{S}_i^3\}$ тождественны, то плотность упаковки шаров $\{S_i^3\}$ не больше соответствующих значений формул (2) и (3), так как мы получаем плотнейшую упаковку шаров $\{\bar{S}_i^3\}$, если центры шаров составляют правильную треугольную решетку и плотность упаковки шаров $\{S_i^3\}$ в слое $\Gamma^2(t)$ равна $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}\,t}$. Очевидно, что в случае $t=2$ при плотнейшей упаковке шаров $\{S_i^3\}$ в слое $\Gamma^3(t)$ центры шаров тоже составляют правильную треугольную решетку.

Пусть $t>2$ и $\{\bar{S}_i^3\}\subset\{S_i^3\}$. Проектируем шары $\{S_i^3\}\setminus\{\bar{S}_i^3\}$ перпендикулярно на плоскость Π^2. Мы получим расположение единичных кругов на плоскости Π^2. Легко видеть, что если $d^*(t)$ плотность расположения кругов на плоскости Π^2, то

$$d_3(t)=\frac{4}{3t}d_2^*(t). \tag{14}$$

Обозначим через $\bar{d}_3(t)$ плотность упаковки шаров $\{\bar{S}_i^3\}$ в слое $\Gamma^3(t)$. Из условий теоремы 1. следует, что

$$d_3(t)\leqq 2\,\bar{d}_3(t). \tag{15}$$

Нам нужно найти максимум плотности $\bar{d}_3(t)$.

Так как расстояние между центрами шаров не меньше 2, то расстояние между центрами шаров $\{\bar{S}_i^3\}$ и проекциями центров шаров на плоскости Π^2 не меньше $\sqrt{4-(t-2)^2}$. Из этого следует, что радиус пустого круга, описанного вокруг центров шаров $\{\bar{S}_i^3\}$ на плоскости Π^2, не меньше $\sqrt{4-(t-2)^2}$. Поэтому из леммы 1. следует, что у плотнейшей упаковки единичных кругов на плоскости Π^2, центры которых тождественны центрами шаров $\{\bar{S}_i^3\}$, центры кругов определяются положительно определенными квадратичными формами, описанными в (10) и (11), где $R=\sqrt{4-(t-2)^2}$. Очевидно, что в этом случае $d_3(t)$ будет максимально.

У плотнейшей упаковки шаров $\{S_i^3\}$ в слое $\Gamma^3(t)$ в (15) равенство достигается только тогда, если множество шаров $\{S_i^3\}$ состоит из двух конгруентных подмножеств $\{\bar{S}_i^3\}$ и $\{\bar{\bar{S}}_i^3\}$ шаров $\{S_i^3\}$ состовляющих плотнейшую упаковку шаров $\{\bar{S}_i^3\}$ в слое $\Gamma^3(t)$. Расстояния плоскостей, определенных центрами шаров $\{\bar{S}_i^3\}$ или $\{\bar{\bar{S}}_i^3\}$ от плоскостей, ограниченных слой $\Gamma^3(t)$, равно 1 и перпендикулярные проекция центров шаров $\{\bar{\bar{S}}_i^3\}$ на плоскость центров шаров $\{S_i^3\}$ совпадают с центрами пустых кругов, описанных вокруг центров шаров $\{\bar{S}_i^3\}$.

Небольшее вычисление показывает, что плотнейшая упаковка шаров $\{S_i^3\}$ в слое $\Gamma^3(t)$ дается двумя слоями из 3-мерной решетчатой упаковки единичных шаров, центры которых определяются положительно определенными квадратичными формами, описанными в (4) и (5).

Теорема 1. доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Легко видеть, что если множество шаров $\{S_i^4\}$ и $\{\bar{S}_i^4\}$ тождественны, или $t = 2$, то мы получим плотнейшую упаковку шаров $\{S_i^4\}$ в слое $\Gamma^4(t)$ тогда, когда центры шаров совпадают центрами шаров плотнейшей решетчатой упаковки 3-мерного пространства. В этом случае плотность не больше значений, даваемых формулами (6) и (7), а равенство достигается только в случае $t = 2$, так как плотность равна $\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}t}$.

Пусть $t > 2$ и $\{\bar{S}_i^4\} \subset \{S_i^4\}$. Проектируя шары $\{S_i^4\}$ перпендикулярно на гиперплоскость Π^3, получим расположение единичных шаров на гиперплоскости Π^3. Легко видеть, что если $d_3^*(t)$ плотность расположения спроектированных шаров на гиперплоскости Π^3 и $\bar{d}_4(t)$ плотность упаковки шаров $\{\bar{S}_i^4\}$ в слое $\Gamma^4(t)$, то

$$d_4(t) = \frac{3\pi}{8t} d_3^*(t). \tag{16}$$

Из условий теоремы 2. следует, что

$$d_4(t) \leqq 2\bar{d}_4(t). \tag{17}$$

Видно, что на гиперплоскости Π^3 наибольший из радиусов пустых шаров, описанных вокруг центров шаров $\{\bar{S}_i^4\}$, не меньше чем $\sqrt{4-(t-2)^2}$. Поэтому из леммы 2. следует, что у плотнейшей упаковки 3-мерных единичных шаров на гиперплоскости Π^3, центры которых тождественны с центрами шаров $\{\bar{S}_i^4\}$, центры 3-мерных шаров определяются положительно определенными квадратичными формами, описанными в (12) и (13), где $R = \sqrt{4-(t-2)^2}$. Очевидно, что в этом случае $\bar{d}_4(t)$ будет максимально.

Подобно доказательству теоремы 1., видно, что плотность упаковки шаров $\{S_i^4\}$ в слое $\Gamma^4(t)$ максимально, если упаковка состоит из двух слоев 4-мерной решетчатой упаковки единичных шаров, центры которых определяются положительно определенными квадратичными формами, описанными в (8) и (9). Один из двух слоев шаров конгруентен плотнейшей упаковке шаров $\{\bar{S}_i^4\}$ в $\Gamma^4(t)$.

Так теорема 2. доказана.

Литература

[1] В. Н. Делоне, Геомтрия положительных квадратичных форм. *УМН*, 3 (1937), 16–62.
[2] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1972.
[3] M. Hollai, Doppelgitterförmige Lagerungen inkrongruenter Kreise und Kugeln, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **18** (1975), 75–86.
[4] J. Horváth, Die Dichte einer Kugelpackung in einer 4-dimensionalen Schicht, *Periodica Math. Hung.*, **5** (1974), 195–199.
[5] Е. Хорват, О плотности плотвейшей упаковки шаров в 4-мерном слое, *Мат. Балк.*, 4 **44** (1974), 251–252.
[6] J. Horváth – J. Molnár, On the density of non-overlapping unit spheres lying in a strip, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Math., **10** (1967), 193–201.

GENERALIZATION OF A THEOREM OF DESKINS

By

MOHAMED ASAAD*

Department of Algebra and Number Theory of the
Eötvös Loránd University, Budapest

(Received February 4, 1975)

In 1961 DESKINS [1] proved that the finite group G is solvable if $\mathcal{V}(G)<5$ and $(|G|, 3) = 1$. It is shown in this paper that:

1. The finite group G is solvable if $\mathcal{V}(G)<8$ and $(|G|, 3) = 1$.
2. If G is a finite simple group with $\mathcal{V}(G) = 8$ and $(|G|, 3) = 1$, then $G \cong SZ(2^3)$.

A subroup H of a group G is subinvariant in G if there exist subgroups $H_0 = G > \ldots > H_n = H$ such that H_i is a normal subgroup of H_{i-1} for $i = 1, 2, \ldots, n$. A collection of subgroups $L_0, L_1, \ldots, L_n$ of G is called an upper chain $\mathcal{C}_n$, of G of length n if $L_0 = G$ and if each L_i is maximal in L_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$. The subinvariance of $\mathcal{C}_n$; $S(\mathcal{C}_n)$ is defined to be the number of $L_i \neq L_0$ which are subinvariant in G. The variance of $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{V}(\mathcal{C}_n)$, is defined as $n/S(\mathcal{C}_n)$ if $S(\mathcal{C}_n)\neq 0$, and n otherwise. Then $\mathcal{V}(G)$, the variance of G, is the maximum of the $\mathcal{V}(\mathcal{C}_n)$ for all $\mathcal{C}_n$ of G. Our notations are standard (See, for example, W. SCOTT [2]).

We first prove the following Lemma:

LEMMA. If the finite group G contains a maximal subgroup H which is nilpotent and $(|G|, 3) = 1$, then G is solvable.

PROOF. Using Induction on $|G|$, we can aussme that there is no non-trivial normal subgroup of G contained in H. If P is a p-Sylow subgroup of H, then $P \lhd H$ and P must be a p-Sylow subgroup of G.

Hence H is a Hall subgroup of G. Suppose now that H is not a Sylow subgroup of G. In this case $G = HK$, $K \lhd G$ and $H \wedge K = 1$ (See Theorem 13. 2. 3 p. 377 of [2]). By the theorem of THOMPSON [3] we can suppose that H has even order. Let x be a central involution of H. Because $C_G(x) = H$, the involution x acts fixed pt. free automorphism on K and by the theorem of Zassenhaus K is abelian (See Theorem 1. 4. p. 336 of [4]) and so G is solvable. We suppose now that H is a Sylow subgroup of G.

* On leave from the Department of Mathematics, Cairo University

By the theorem of Thompson we can suppose that H is a 2-Sylow subgroup of G. By the theorem of GLAUBERMAN [5] G has a normal 2-Complement N as S_4 is not involved in G and $N_G(J(H)) = C_G(Z(H)) = H$. Then again by the theorem of Zassenhaus N is abelian and G is solvable. The proof is complete.

THEOREM 1. *The finite group G is solvable if $\mathcal{O}(G) < 8$ and $(|G|, 3) = 1$.*

PROOF. Let G be a counter example of smallest order. Then G must contain a non-normal maximal subgroups since a group having all its maximal subgroups normal is nilpotent. Let M be a non-normal maximal subgroup of G. Then $\mathcal{O}(M) < \mathcal{O}(G) < 8$ (See Lemma 2 of [1]). Since $\mathcal{O}(M) < 8$ and $(3, |M|) = 1$, then M is solvable as G is a counter example of smallest order. Suppose M contains a subgroup $\neq 1$ which is subinvariant in G; then it contains a subgroup K maximal in this property. Therefore, K is normal in G (See Lemma 1 of [1]). Now consider G/K. $\mathcal{O}(G/K) \leq \mathcal{O}(G)$ (See Lemma 3 of [1]) and since $(|G:K|, 3) = 1$, it follows that G/K is solvable as G is a counter example of smallest order. But K is solvable as $K < M$. Therefore G is solvable and this is a contradiction. Since M is a non-normal maximal subgroup of G, M is solvable but contains no subgroups $\neq 1$ subinvariant in G, and $\mathcal{O}(M) < 8$, then $|M|$ = product of at most 6 not necessarily distinct primes (See Lemma 4 of [1]).

The theorem of THOMPSON [6] on minimal simple groups shows that actually the order of a non-solvable group is divisible by either 2^6. 5 or by 12. Since $(3, |G|) = 1$, then $2^6 \| |G|$. Let S be a 2-Sylow subgroup of G. If G contains no normal subgroups, then S is contained in a non-normal maximal subgroup M of G. Since $|M|$ = product of at most 6 not necessarily distinct primes (See the preceeding argument) so that $S = M$. Since $(3, |G|) = 1$, and S is a nilpotent maximal subgroup of G, then G is solvable by our Lemma and this is a contradiction.

If $K \neq 1$, $K \lhd G$, then G/K is solvable as G is a counter example of smallest order. Since G is non-solvable, then K is non-solvable. Obviously, G must contain a maximal subgroup which is normal. We may assume that K is non-solvable minimal normal subgroup of G. We argue that K lies in each maximal subgroup which is normal. Suppose the contrary; then $G = KM$, where $K \not\leq M$, M is a maximal subgroup of G and $M \lhd G$. Set $D = K \wedge M$. $G/K \cong M/D$. $D \neq 1$ otherwise G is solvable and this is a contradiction. But D is non-solvable subgroup otherwise G is solvable and this is a contradiction. Clearly, $D \lhd G$. Therefore D is non-solvable normal subgroup of G. Since $D \leq K$ and $D \neq 1$ and K is non-solvable minimal normal subgroup of G, then $D = K$ and this is a contradiction. Therefore, K lies in each maximal subgroup M of G such that $M \lhd G$. Since the 2-Sylow subgroups of G are contained only in normal maximal subgroups of G (See the preceeding argument) and K lies in each maximal subgroup M of G such that $M \lhd G$, then $\Phi_2(G) \geq K$. But $\Phi_2(G)$ is solvable (See Theorem 2 of [1]) and hence K is solvable and this is a contradiction. The proof is complete.

THEOREM 2. *If G is a finite simple group with $\mathcal{O}(G) = 8$ and $(|G|, 3) = 1$, then $G \cong SZ(2^3)$.*

PROOF. Let M be a maximal proper subgroup of G. Then $\mathcal{O}(M) < \mathcal{O}(G)$ (See Lemma 2 of [1]). Since $\mathcal{O}(M) < 8$ and $(|M|, 3) = 1$, then M is solvable by Theorem 1. Since proper subgroups of solvable groups are solvable, then G is a minimal simple group. By a minimal simple group we mean that G is simple and all its proper subgroups are solvable. Since $(3, |G|) = 1$ and $\mathcal{O}(G) = 8$, then THOMPSONS work [6] on minimal simple groups shows that $G \cong SZ(2^3)$. The proof is complete.

ACKNOWLEDGEMENT. The author wishes to thank his advisor Professor K. CORRADI for his advice and encouragement.

References

[1] W. E. DESKINS, A condition for the solvability of a finite group, *Illinois J. Math.* **5** (1961), 306–313.
[2] W. R. SCOTT, *Group theory*, Prentic-Hall (Englewood Cliffs, N. J., 1964)
[3] G. THOMPSON, Normal p-Complement for finite groups, *Math. Zeitschift*, **72** (1960), 332–354.
[4] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper-Row (New York, 1968).
[5] G. GLAUBERMAN, Subgroups of finite, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 1–12.
[6] G. THOMPSON, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 383–437.

ON THE EXISTENCE AND STABILITY OF PERIODIC SOLUTIONS OF A CERTAIN THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

By

TRAN VAN GIAP

University of Technology, Budapest

(Received March 6, 1974)

This paper is concerned with the existence and stability of periodic solutions of the perturbed differential equation

$$\dddot{u} + a\ddot{u} + b\dot{u} + cu = \varepsilon\chi(u, \dot{u}, \ddot{u}, \varepsilon), \tag{1}$$

where ε is a real small parameter, a, b, c are real constants, χ is a real analytic function for $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ and all u, $\dot{u}$, $\ddot{u}$. It will be assumed that the unperturbed characteristic equation

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

has two pure imaginary roots.

For general theorems concerning the existence of periodic solutions of a perturbed n-th order system see CODDINGTON and LEVINSON [1] (p. 364–369). For second order equations conditions of existence and stability of periodic solutions have been discussed in detail by ANDRONOV, WITT and CHAIKIN [2].

Taking into account that the unperturbed equation has a pair of imaginary eigenvalues, without loss of generality equation (1) can be written in the form:

$$\dddot{u} + a\ddot{u} + \dot{u} + au = \varepsilon\chi(u, \dot{u}, \ddot{u}, \varepsilon). \tag{2}$$

In section 1 Coddington – Levinson' s method is worked out for the actual determination of the periodic solution of (2), for $a \neq 0$. An effective form is given to the stability criterion in section 2, in case $a > 0$.

1. We let

$$\xi_1 = u, \quad \xi_2 = \dot{u}, \quad \xi_3 = \ddot{u},$$

so that (2) is replaced by the system

$$\dot{\xi} = B\xi + \varepsilon\gamma(\xi; \varepsilon), \tag{3}$$

where

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -1 & -a \end{bmatrix}, \quad \gamma(\xi; \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon) \end{bmatrix}.$$

There is a transformation $\xi = Q\,x$ with $\det Q \neq 0$ such that (3) becomes

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon\,\eta(x; \varepsilon), \tag{4}$$

where

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \quad \eta(x; \varepsilon) = Q^{-1}\,\gamma(Qx; \varepsilon).$$

The matrix Q assumes the form

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -a \\ -1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

We introduce the notations

$$\hat{\sigma}(x; \varepsilon) = \chi(Q\,x; \varepsilon),$$
$$\sigma(t) = \hat{\sigma}(k_1^\circ \cos t, k_1^\circ \sin t, 0; 0),$$
$$\sigma_i(t) = \hat{\sigma}'_{xi}(k_1^\circ \cos t, k_1^\circ \sin t, 0; 0) \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$\sigma_\varepsilon(t) = \hat{\sigma}'_\varepsilon(k_1^\circ \cos t, k_1^\circ \sin t, 0; 0),$$

where k_1° is real constant.

THEOREM 1. *If a real constant $k_1^\circ \neq 0$ exist for which*

$$F(k_1^\circ) = \int_0^{2\pi} \sigma(-t)\,[\cos t - a \sin t]\,dt = 0$$

and

$$\frac{\partial F(k_1^\circ)}{\partial k_1^\circ} = \int_0^{2\pi} (\cos t - a \sin t)\,[\sigma_1(-t)\cos t - \sigma_2(-t)\sin t]\,dt \neq 0,$$

then for $|\varepsilon|$ sufficiently small the equation (2) has a unique non-constant periodic solution $\alpha(t, \varepsilon)$ of period $T(\varepsilon) = 2\pi + \delta(\varepsilon)$ such that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(t, \varepsilon) = k_1^\circ \cos t,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}=v_0=\frac{1}{k_1^{\circ}(a^2+1)}\int_0^{2\pi}\sigma(-t)\,[\sin t+a\cos t]\,dt.$$

The solution $\alpha\,(t,\,\varepsilon)$ *is analytic for all* t *and* $|\varepsilon|$ *sufficiently small.*

The proof is analogous to that of Theorems 4. 1. and 4. 2. of [1] (pp. 366–367) and will therefore be omitted here.

Applying Poincaré's method, we shall give an expression for the first approximation of this periodic solution.

THEOREM 2. *Under the assumptions of Theorem* 1, *the period* $T(\varepsilon)$ *and the solution* $\alpha(t,\,\varepsilon)$ *can be determined in the form*

$$T(\varepsilon)=2\pi+\varepsilon v_0+o(\varepsilon)$$

and

$$\alpha(t,\,\varepsilon)=k_1^{\circ}\cos t+$$

$$+\varepsilon\left\{k_1^1\cos t+\frac{1}{a^2+1}\int_0^t\sigma(\varrho)\,[a\sin(t-\varrho)-\cos(t-\varrho)+e^{-a(t-\varrho)}]\,d\varrho\right\}+o(\varepsilon),$$

where

$$k_1^1=\frac{1}{\int_0^{2\pi}(\cos\varrho+a\sin\varrho)\,[\sigma_1(\varrho)\cos\varrho+\sigma_2(\varrho)\sin\varrho]\,d\varrho}\cdot$$

$$\cdot\left\{-\frac{v_0^2}{2}(a^2+1)k_1^{\circ}+\frac{v_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi-\varrho)\,\sigma(\varrho)\,[a\cos\varrho-\sin\varrho]\,d\varrho+\right.$$

$$+\frac{v_0\,k_1^{\circ}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varrho(\cos\varrho+a\sin\varrho)\,[\sigma_1(\varrho)\sin\varrho-\sigma_2(\varrho)\cos\varrho]\,d\varrho+$$

$$+\frac{1}{a^2+1}\int_0^{2\pi}(\cos\varrho+a\sin\varrho)\,[\sigma_1(\varrho)\cos\varrho+\sigma_2(\varrho)\sin\varrho]\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^{\varrho}\sigma(\gamma)\,(\cos\gamma+a\sin\gamma)\,d\gamma\right]d\varrho+$$

$$\left.+\frac{1}{a^2+1}\int_0^{2\pi}(\cos\varrho+a\sin\varrho)\,[\sigma_1(\varrho)\sin\varrho-\sigma_2(\varrho)\cos\varrho]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\int_0^{\varrho}\varrho(\gamma)\sin\gamma - a\cos\gamma)\,d\gamma\right]d\varrho -$$

$$-\frac{1}{a^2+1}\int_0^{2\pi}(\cos\varrho + a\sin\varrho)\,e^{-a\varrho}\sigma_3(\varrho)\left[\int_0^{\varrho}e^{a\gamma}\,\sigma(\gamma)\,d\gamma\right]d\varrho -$$

$$-\int_0^{2\pi}\sigma_\varepsilon(\varrho)\,[\cos\varrho + a\,\sin\varrho]\,d\varrho\Bigg\}.$$

PROOF. Introducing the new independent variable s by

$$t = s\left(1+\frac{\delta(\varepsilon)}{2\pi}\right),$$

system (4) assumes the form

$$\frac{dx}{ds} = \left(1+\frac{\delta(\varepsilon)}{2\pi}\right)(Ax+\varepsilon\eta(x;\varepsilon)). \tag{5}$$

The periodic solution of system (5) corresponding to the solution

$$q(t,\varepsilon) = Q^{-1}\,\mathrm{col}\,(\alpha(t,\varepsilon),\ \dot\alpha(t,\varepsilon),\ \ddot\alpha(t,\varepsilon))$$

will be denoted by

$$l(s,\varepsilon) = q\left(s\left(1+\frac{\delta(\varepsilon)}{2\pi}\right),\ \varepsilon\right).$$

Obviously, $l(s,\varepsilon)$ is an analytic function of ε for sufficiently small $|\varepsilon|$ and is periodic in s with period 2π. Expanding $l(s,\varepsilon)$ and $\delta(\varepsilon)$ by powers of ε

$$l(s,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\,l^i(s),$$

$$\delta(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\,T^i,$$

substituting the expansions into (5) and equating the respective coefficients we have

$$\frac{d\,l^0}{ds} = A\,l^0,$$

$$\frac{d\,l^1}{ds} = A\,l^1 + \frac{T_1}{2\pi}\,A\,l^0 + \eta(l^0;\,0),$$

$$\frac{d\,l^2}{ds} = A\,l^2 + \frac{T_1}{2\pi}\,A\,l^1 + \frac{T_2}{2\pi}\,A\,l^0 + \frac{T_1}{2\pi}\,\eta(l^0;\,0) + \eta'_x(l^0;\,0)\,l^1 + \eta'_\varepsilon(l^0;\,0),$$

. . . . . .

By a convenient choice of the initial condition, CODDINGTON-LEVINSON [1] (pp. 367–368) has proved that the system given above determine l^j and T_{j+1} $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ uniquely. By solving the first three equations we obtain all necessary results of the theorem.

2. Consider the first variational system of (4) corresponding to the solution $q(t, \varepsilon)$

$$\dot{y} = \left[A + \varepsilon\,\eta'_x(q(t, \varepsilon);\,\varepsilon)\right] y, \tag{6}$$

where $y = \operatorname{col}(y_1, y_2, y_3)$ and η'_x is the derivative matrix of η.

THEOREM 3. *Under the assumptions of theorem* 1, *if* ε *is such that* $|\varepsilon|$ *is sufficiently small,* $\varepsilon \neq 0$ *and*

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} [\sigma_1(t) + a\,\sigma_2(t)]\,dt > 0 \tag{7}$$

then the characteristic multipliers of (6) *satisfy the conditions*

$$\varrho_1(\varepsilon) = 1, \qquad |\varrho_2(\varepsilon)| < 1, \qquad |\varrho_3(\varepsilon)| < 1;$$

thus the periodic solution $\alpha(t, \varepsilon)$ *of* (2) *is orbitally asymptotically stable.*

PROOF. By Liouville's formula we have

$$\varrho_1(\varepsilon)\,\varrho_2(\varepsilon)\,\varrho_3(\varepsilon) =$$

$$= \exp\left\{-a\,T(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a^2+1}\int_0^{T(\varepsilon)} [\hat{\sigma}'_{x_1}(q(t, \varepsilon);\,\varepsilon) + a\,\hat{\sigma}'_{x_2}(q(t, \varepsilon);\,\varepsilon) -$$

$$- \hat{\sigma}'_{x_3}(q(t, \varepsilon);\,\varepsilon)]\,dt\right\}.$$

As $q(t, \varepsilon)$ is a periodic solution of (6), we may assume that $|\varrho_1(\varepsilon)| = 1$. Thus

$$|\varrho_2(\varepsilon)|\,\varrho_3(\varepsilon) = \exp\left\{-a\,T(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{a^2+1}\int_0^{T(\varepsilon)} [\hat{\sigma}'_{x_1}(q(t,\varepsilon);\varepsilon) + \right.$$

$$\left. + a\,\hat{\sigma}'_{x_2}(q(t,\varepsilon);\varepsilon) - \hat{\sigma}'_{x_3}(q(t,\varepsilon);\varepsilon)]\,dt\right\},$$

where $\varrho_3(\varepsilon)$ is the characteristic multiplier of (6) that satisfies $\varrho_3(0) = e^{-2\pi a}$. Here obviously

$$\lambda_3(\varepsilon) = \frac{1}{T(\varepsilon)} \ln \varrho_3(\varepsilon),$$

$\hat{\sigma}'_{x_i}(x;\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3)$, $q(t, \varepsilon)$ and $T(\varepsilon)$

are analytic functions of ε for $|\varepsilon|$ sufficiently small. Hence we have

$$|\varrho_3(\varepsilon)| = \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{a^2+1}\int_0^{2\pi} [\sigma_1(t) + a\,\sigma_2(t) - \sigma_3(t)]\,dt - \varepsilon\,2\pi\,\lambda'_3(0) + o(\varepsilon)\right\},$$

(8)

where

$$\lambda'_3(0) = \left.\frac{d\lambda_3}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

On the other hand, since $\varrho_3(\varepsilon) = \exp[\lambda_3(\varepsilon)\,T(\varepsilon)]$ we have

$$\lambda'_3(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\varrho'_3(0)\,e^{2\pi a} + a\,v_0\right). \tag{9}$$

By M. FARKAS's method [3] we can determine $\varrho'_3(0)$ as follow:

$$\varrho'_3(0) = -v_0\,a e^{-2\pi a} + \frac{1}{a^2+1}\,e^{-2\pi a}\int_0^{2\pi} \sigma_3(t)\,dt. \tag{10}$$

Substituting (10) into (9) we have

$$\lambda'_3(0) = \frac{1}{2\pi(a^2+1)}\int_0^{2\pi} \sigma_3(t)\,dt. \tag{11}$$

By using (11) and (7) in (8), the condition $|\varrho_2(\varepsilon)|<1$ is satisfied. The condition $|\varrho_3(\varepsilon)|<1$ holds also if $|\varepsilon|$ is sufficiently small. The proof of Theorem 3 is completed.

REMARK. If

$$\int_0^{2\pi} [\sigma_1(t)+a\,\sigma_2(t)]\,dt = 0$$

the stability condition depends on the coefficient of ε^2 in (8).

The above method can be extended to the real equation $u^{(n)}+ +a_1 u^{(n-1)}+\ldots+a_n u = \varepsilon\chi(u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}, \varepsilon)$, where the unperturbed characteristic equation

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n = 0$$

has two pure imaginary roots, all the other roots are simple and have negative real parts.

3. EXAMPLE. Consider the equation

$$\dddot{u}+a\ddot{u}+\dot{u}+au = \varepsilon(bu+c\dot{u}^3),$$

where $a>0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ are real constants and ε is small real parameter. In this case we have

$$\hat{\sigma}(x, \varepsilon) = b\,(x_1+x_3)+c(-x_2-ax_3)^3 =$$
$$= bx_1-cx_2^3-3\,acx_2^2\,x_3-3\,a^2\,cx_2\,x_3^2-a^3\,cx_3^3+bx_3.$$

From the two conditions

$$F(k_1^\circ) = 0 \text{ and } \frac{\partial F(k_1^\circ)}{\partial k_1^\circ} \neq 0$$

we obtain

$$k_1^\circ = \sqrt{\frac{4b}{3ac}}, \quad \nu_0 = \frac{\pi b}{a}.$$

Thus if

$$bc>0, \quad k_1^\circ = 2\sqrt{\frac{b}{3ac}}$$

and $|\varepsilon|$ is sufficiently small, then there is a unique non-constant periodic solution $\alpha(t, \varepsilon)$ of period $T(\varepsilon) = 2\pi+\delta(\varepsilon)$, such that

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha(t, \varepsilon) = 2\sqrt{\frac{b}{3ac}}\cos t$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\pi b}{a}$$

(see Theorem 1). According to Theorem 2 $T(\varepsilon)$ and $\alpha(t, \varepsilon)$ have been determined as follows:

$$T(\varepsilon) = 2\pi + \varepsilon \frac{b\pi}{a} + o(\varepsilon),$$

$$\alpha(t, \varepsilon) = 2\sqrt{\frac{b}{3ac}} \cos t + \varepsilon b \sqrt{\frac{b}{3ac}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left[\frac{1}{a} + \frac{5a^4 + 158a^2 + 69}{12a(a^2+1)^2(a^2+9)} - \frac{2(a^2+7)(a^2+8)}{\pi(a^2+1)^2(a^2+9)^2}(1 - e^{-2\pi a}) \right] \cos t - \right.$$

$$- \frac{2(a^2+8)}{(a^2+1)(a^2+9)} \sin t + \frac{1}{a} t \sin t + \frac{a^2 - 15}{3a(a^2+1)(a^2+9)} \cos^3 t +$$

$$\left. + \frac{1}{3(a^2+9)} \sin^3 t - \frac{2(a^2+8)}{a(a^2+1)(a^2+9)} e^{-at} \right\} + o(\varepsilon).$$

By Theorem 3 the solution $\alpha(t, \varepsilon)$ is orbitally asymptotically stable for $|\varepsilon|$ sufficiently small and $\varepsilon b < 0$. For more detailed exposition of this paper see [4]. The author wishes to express his thanks to Prof. M. FARKAS for many valuable suggestions.

References

[1] CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N., *Theory of ordinary differential equations*, New York, Mc Graw – Hill, 1955.

[2] АНДРОНОВ, А. А., ВИТТ, А. А. и ХАЙКИН, С. Э. *Теория коледаний*, Физматгиз, Москва, 1959.

[3] FARKAS, M., Determination of controllably periodic perturbed solutions by Poincarè's method, *Studia Sci. Math. Hung.*, **7** (1972), 259–268.

[4] GIAP, T. V., Másodrendű és harmadrendű differenciálegyenletek perturbációiról, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1973.

ÜBER GEWISSEN MAXIMALOPERATOREN

Von

F. SCHIPP

II. Lehrstuhl für Analysis der Eötvös Loránd Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. Oktober 1974)

Es sei $B = (b_{ij})_{i,j\in N}$ eine Matrix, $(\lambda_i)_{i\in N}$[1] eine positive Zahlenfolge mit folgenden Eigenschaften:

(B) $$0 \leq b_{ij} \leq 2^{-\lambda_i} \quad (i,j\in N).$$

Es sei weiterhin $A = (a_{ij}^n)_{i,j,n\in N}$ und für $i,j\in N$ setzen wir

$$\alpha_{ij} = \sup_{n<j} a_{ij}^n, \quad \beta_{ij} = \sup_{n\geq j} 2^n a_{ij}^n \quad (i,j\in N).$$

In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, daß A den folgenden Bedingungen genügt:

1° $$a_{ij}^n \geq 0 \quad (i,j,n\in N),$$

(A) 2° $$\sup_n \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}^n = K_1 < \infty,$$

3° $$\sup_m \sum_{\lambda_i\leq m} \sum_{j=m}^{\infty} (\alpha_{ij} + 2^{-j}\beta_{ij}) = K_2 < \infty.$$

Führen wir noch die Bezeichnungen

$$f_n(x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}^n D_{2^j}(x \dot{+} b_{ij}) \quad (n\in N)$$

ein, wobei D_{2^j} die 2^j-te Walsh-Dirichletsche Kernfunktion und $\dot{+}$ die FINE-sche Operation bezeichnet (vergl [1]), d.h.:

$$D_{2^j}(x) = \sum_{n=0}^{2^j-1} \psi_n(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (1+\psi_{2^k}(x)) = \begin{cases} 2^j & (0 \leq x < 2^{-j}), \\ 0 & (2^{-j} \leq x < 1). \end{cases}$$

[1] $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Konvergenz der Operatorfolge

$$(T_n f)(x) = (f_n * f)(x) = \int_0^1 f(t) f_n(x \dot{+} t)\, dt \quad (n \in N).$$

Wir beweisen den folgenden

SATZ. *Genügen A und B den Bedingungen* (A) *und* (B), *so ist der Operator*

$$(Tf)(x) = \sup_n |(T_n f)(x)|$$

vom Typ (∞, ∞) *und von schwachem Typ* $(1, 1)$, *d.h.*

a) *für* $f \in L^\infty(0, 1)$ *gilt*

$$\|Tf\|_\infty \leq K_1 \|f\|_\infty,^2$$

b) *für* $f \in L(0, 1)$ *und* $y > 0$ *gilt*

$$\text{mes}\{x : (Tf)(x) > y\} \leq M \|f\|_1 / y, \tag{1}$$

wobei $M = (4K_2 + 1) 2K_1$ *ist und* $K_i (i = 1, 2)$ *die Konstante der Bedingung* (A) *bedeutet.*

Aus dem Satz, durch Anwendung eines Satzes von MARCINKIEWICZ (vergl. [2], Seite 111) ergibt sich

KOROLLAR 1. Für $f \in L^p(0, 1)$ gilt

$$\|Tf\|_p \leq K(p) \|f\|_p \quad (1 < p \leq \infty),$$

wobei $K(p)$ eine von f unabhängige Konstante ist. Durch Anwendung des Satzes ergibt sich das folgende

KOROLLAR 2. Es bezeichne $\sigma_n(f)$ die n-te $(C, 1)$-Mittel der Walsh-Fourier-Entwicklung von $f \in L(0, 1)$. Dann

a) ist der Operator

$$(\sigma f)(x) = \sup_n |(\sigma_n f)(x)| \tag{2}$$

vom Typ (∞, ∞) und von schwachem Typ $(1, 1)$,

b) für $f \in L^p(0, 1)$ $(1 < p \leq \infty)$ gilt

$$\|\sigma f\|_p \leq C(p) \|f\|_p,$$

wobei $C(p)$ eine von f unabhängige Konstante ist,

c) für $f \in L(0, 1)$ gilt in fast allen $x \in (0, 1)$

$$\lim_{n \to \infty} (\sigma_n f)(x) = f(x).$$

[2] $\| \|_p$ bezeichnet die Norm in $L^p(0, 1)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Die Behauptung *c)* hat N. J. FINE [3] bewiesen. Eine andere Anwendung des Satzes ist in [4] gegeben.

Beweis des Satzes

Zum Beweis des Satzes benutzen wir einen Hilfssatz von Calderon-Zygmund Typ (Vergl. [5], Hilfssatz III.).

HILFSSATZ 1. Es sei $f \in L(0,1)$ und $y > \|f\|_1$. Dann gibt es ein System $(I_k, k = 1, 2, \ldots)$ von dyadischen Intervallen und zwei funktionen φ_0 und φ derart, daß die folgenden Relationen gelten:

a) $$f = \varphi_0 + \varphi, \quad \|\varphi_0\|_\infty \leq 2y,$$

(3) b) $$I_i \cap I_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes } I_i \leq \|f\|_1 / y,$$

c) $$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i, \ \text{supp } \varphi_i \subset I_i, \ \int_0^1 \varphi_i = 0, \ \|\varphi\|_1 \leq 4\|f\|_1.$$

BEWEIS DES SATZES. *a)* Da $\|T_n f\|_\infty \leq \|f_n\|_1 \|f\|_\infty$ ist, deshalb gilt

$$\|Tf\|_\infty \leq (\sup_n \|f_n\|_1) \|f\|_\infty.$$

und so genügt es zu zeigen, daß

(4) $$\sup_n \|f_n\|_1 \leq K_1$$

ist. Auf Grund der Relationen $D_{2^j}(x) \geq 0$, $\int_0^1 D_{2^j}(t)\,dt = 1$ $(x \in (0,1), j \in N)$ und nach (A) 2° ergibt sich

$$\|f_n\|_1 = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}^n \leq K_1 \quad (n \in N),$$

womit (4) bewiesen ist.

Zum beweis der Ungleichung (1) benutzen wir Hilfssatz 1. Es sei mes $I_k = 2^{-m_k}$ $(m_k \in N)$, $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, und $H' = [0,1) - H$. Ist $j \leq m_k$, oder $x \notin I_k$ so gilt auf Grund von (3) c) $(\varphi_k * D_{2^j})(x) = 0$. Da im Falle $x \notin I_k$ und $\lambda_i > m_k$ auch $x \dotplus b_{ij} \notin I_k$ ist, deshalb gilt

$$(\varphi_k * D_{2^j})(x \dotplus b_{ij}) = 0 \quad (j \leq m_k, \text{ oder } x \notin I_k \text{ und } \lambda_i > m_k)$$

und so ist für $x \notin I_k$

$$|(f_n * \varphi_k)(x)| = \left| \sum_{\lambda_i \leqq m_k} \sum_{j=m_k}^{\infty} a_{ij}^n (D_{2^j} * \varphi_k)(x \dot{+} b_{ij}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\lambda_i \leqq m_k} \left(\sum_{j=m_k}^{n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \right) (a_{ij}^n (D_{2^j} * \varphi_k)(x \dot{+} b_{ij})) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\lambda_i \leqq m_k} \sum_{j=m_k}^{\infty} (\beta_{ij} (\chi_j * |\varphi_k|)(x \dot{+} b_{ij}) + \alpha_{ij} (D_{2^j} * |\varphi_k|)(x \dot{+} b_{ij})) \quad (n \in N)$$

wobei $\chi_i = 2^{-j} D_{2^j}$ gesetzt wird.

Daraus folgt

$$(T \varphi_k)(x) \leq \sum_{\lambda_i \leqq m_k} \sum_{j=m_k}^{\infty} (\beta_{ij} (\chi_j * |\varphi_k|)(x \dot{+} b_{ij}) + \alpha_{ij} (D_{2^j} * |\varphi_k|)(x \dot{+} b_{ij}))$$
$$(x \notin I_k)$$

und so gilt auf Grund der Ungleichungen $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, $\|D_{2^j}\| = 1$, $\|\chi_j\|_1 = 2^{-j}$ und nach (A)

$$\|\chi_{H'} T \varphi_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \sum_{\lambda_i \leqq m_k} \sum_{j=m_k}^{\infty} (\alpha_{ij} + 2^{-j} \beta_{ij}) \leq K_2 \|\varphi_k\|_1 .^3$$

Daraus nach (3) *b), c)* ergibt sich

$$\|\chi_{H'} T \varphi\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\chi_{H'} T \varphi_k\|_1 \leq K_2 \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_1 \leq 4K_2 \|f\|_1 .$$

Hiraus bekommen wir

$$\operatorname{mes} \{x \in H' : (T \varphi)(x) > y\} \leq 1/y \, \|\chi_{H'} T \varphi\|_1 \leq (4K_2/y) \|f\|_1$$

und so gilt nach (3) b)

$$\operatorname{mes} \{x : (T \varphi)(x) > y\} \leq \operatorname{mes} H + \operatorname{mes} \{x \in H' : (T \varphi)(x) > y\} \leq$$
$$\leq (4K_2 + 1)/y \|f\|_1 .$$

Da nach (3) a) und nach Teil *a)* des Satzes $\operatorname{mes} \{x : (T \varphi_0)(x) > 2K_1 y\} = 0$ ist, deshalb gilt

$$(5) \qquad \operatorname{mes} \{x : (Tf)(x) > (2K_1 + 1) y\} \leq \operatorname{mes} \{x : (T \varphi_0)(x) > 2K_1 y\} +$$
$$+ \operatorname{mes} \{x : (T \varphi)(x) > y\} \leq (4K_2 + 1)/y \, \|f\|_1 .$$

Offensichtlich ist (5) für $y < \|f\|_1$ auch richtig. Die Behauptung (1) folgt nun schon aus (5) (mit der Konstante $M = (4K_2 + 1)(2K_1 + 1)$).

Damit haben wir den Satz bewiesen.

[3] $\chi_{H'}(x) = 0$ $(x \in H)$, $\chi_{H'}(x) = 1$ $(x \in H')$.

Beweis von Korollar 2

Zum beweis von Korollar 2 führen wir den Operator (vergl. [6])

$$(d_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1}\left(f(x) - f(x \dot{+} e_k)\right)$$

$$(e_k = 2^{-k-1},\ f \in L(0,1),\ x \in (0,1))$$

ein. Da für die m-te Walsh-Paley-Funktion

$$\psi_m(x) = (-1)^{\sum_{k=0}^{\infty} m_k x_k}$$

gilt, für $m < 2^n$ ist

$$(d_n \psi_m)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1}\left(\psi_m(x) - \psi_m(x \dot{+} e_k)\right) =$$

$$= \psi_m(x) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k\left(1-(-1)^k\right)/2 = \psi_m(x)\left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k 2^k\right) = m\,\psi_m(x).$$

Daraus für die Walsh-Fejérsche Kernfunktion K_m im Falle $2^{n-1} \leq m < 2^n$ ergibt sich die folgende Darstellung:

$$K_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)\psi_k = D_m - \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} k\,\psi_k = D_m - \frac{1}{m} d_n D_m, \tag{6}$$

wobei

$$D_m = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k$$

die m-te Walsh-Dirichletsche Kernfunktion bedeutet. Wir benutzen den folgenden

HILFSSATZ 2. Für $2^{n-1} \leq m < 2^n$ gilt

$$|K_m(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-n} \sum_{i=j}^{n-1}\left(D_{2^j}(x) + D_{2^j}(x \dot{+} e_i)\right) \quad (x \in (0,1)).$$

BEWEIS VON HILFSSATZ 2. Hat $k \in N$ die dyadische Darstellung

$$k = \sum_{j=0}^{\infty} k_j 2^j \quad (k_j \in \{0,1\}),$$

so gilt (vergl. [7])

$$D_k = \psi_k \sum_{j=0}^{\infty} k_j \psi_{2^j} D_{2^j},$$

woraus sich für $m K_m$ auf Grund von

$$m K_m(x) = \psi_m(x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} m_i 2^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} m_j \psi_{2^j}(x) D_{2^j}(x)\right) -$$

$$-\psi_m(x)\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \sum_{j=0}^{n-1} m_j \psi_{2^j}(x)\left(D_{2^j}(x) - \psi_m(e_i)\psi_{2^j}(e_i) D_{2^j}(x \dot{+} e_i)\right) =$$

$$= \psi_m(x)\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}(x)$$

ergibt. Da

$$D_{2^j}(x \dot{+} e_i) = D_{2^j}(x)\,(i \geq j),\ \psi_{2^j}(e_i) = 1\,(i > j)$$

und

$$(1-\psi_m(e_i))/2 = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{m_i}\right) = m_i$$

sind, deshalb ist $c_{ij}(x) = 0 \quad (j<i,\ x \in (0,1))$ und so gilt

$$m\,|K_m(x)| \leq 1/2 \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \sum_{j=i}^{n-1} \left(D_{2^j}(x) + D_{2^j}(x \dot{+} e_i)\right).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Beweis von Korollar 2. Es sei $a_{ij}^n = 2^{i-n}$ für $0 \leq i \leq j < n$ und $a_{ij}^n = 0$ sonst, $b_{ij} = 0$, und $c_{ij} = e_j\,(i, j \in N)$ und führen wir die Bezeichnungen

$$f_n^1(x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}^n D_{2^j}(x \dot{+} b_{ij}), \quad f_n^2(x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}^n D_{2^j}(x \dot{+} c_{ij})$$

ein. Dann gilt nach Hilfssatz 2 für $2^{n-1} \leq m < 2^n$

$$|K_m(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-n} \sum_{j=i}^{n-1} \left(D_{2^j}(x) + D_{2^j}(x \dot{+} e_i)\right) = f_n^1(x) + f_n^2(x).$$

Die Matrizen $(b_{ij})_{i,j \in N}$, $(c_{ij})_{i,j \in N}$ mit $\lambda_i = i\,(i \in N)$ genügen der Bedingung (B). Da

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}^n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-n} \sum_{j=i}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\,2^{-n+i} < \sum_{k=0}^{\infty} k\,2^{-k} = K_1 < \infty$$

ist genügt A der Bedingung (A) 2°. Da endlich $\alpha_{ij} = 0$, $\beta_{ij} = 2^i\,(i, j \in N)$ und

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j}\beta_{ij} = \sum_{i=0}^{m} 2^i \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-m+1} \sum_{i=0}^{m} 2^i < 4 \quad (m \in N)$$

ist, sind die Bedingungen (A) 1° und 3° auch erfüllt. Auf Grund des Satzes sind die Operatoren

$$(T^i f)(x) = \sup_n |(f_n^i * f)(x)| \quad (i = 1, 2)$$

vom Typ (∞, ∞) und von schwachem Typ (1,1) und auf Grund der Ungleichung

$$(\sigma f)(x) = \sup_m |(f * K_m(x)| \leq T^1(|f|)(x) + T^2(|f|)(x)$$

dasselbe gilt für σ.

Damit ist die Behauptung *a)* bewiesen. Die Behauptungen *b)* und *c)* kann man auf Grund von *a)* mit wohlbekannten Methoden beweisen.

Literaturverzeichnis

[1] N. J. FINE, On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372–414.
[2] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Vol. II. (Cambridge, 1959).
[3] N. J. FINE, Cesàro summability of Walsh-Fourier series, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **41** (1955), 588–591.
[4] F. SCHIPP, Über einen Ableitungsbegriff von P. L. BUTZER und H. J. WAGNER *Mat. Balkanika*, 4 (1974), 541–546.
[5] F. SCHIPP, Über die starke Summation von Walsh-Fourierreihen, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 77–87.
[6] P. L. BUTZER–H. J. WAGNER, Walsh-Fourier series and the concept of a derivative, *Applicable Analysis*, **3** (1973), 29–46.
[7] F. SCHIPP, Über die Größenordnung der Partialsummen der Entwicklung integrierbarer Funktionen nach *W*-Systemen, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 123–134.

SOME LOCAL CHARACTERIZATION OF BOUNDEDNESS AND OF C^*-EQUIVALENT ALGEBRAS

By

Z. SEBESTYÉN

II. Depertment of Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received February 15, 1973)

1. §. Introduction

Let A be a complex unital Banach algebra with involution. The function defined by the square root of the spectral radius of the element $x^* x$

$$p(x) = |x^* x|_\sigma^{1/2} \qquad (x \in A) \tag{1}$$

is used in a recent paper [8] of V. PTÁK in the theory of hermitian algebras and their connections with C^*-algebras. Here a Banach algebra over the field of complex numbers, with involution, is said to be hermitian if the spectrum of any selfadjoint element is purely real (in other words if the involution is hermitian).

PTÁK proved that $p(x)$ is always continuous in hermitian algebras (see Lemma (8. 2) of [8]). He also proved a result on uniqueness of the function $p(x)$ says that $p(x)$ is the only algebra pseudonorm $w(x)$ extending the spactral radius on selfadjoint elements which assumes the value 1 either on unitary elements or on elements of the form $x = \exp(ih)$; $h = h^*$ (see Theorem (10. 10) in [8]).

For

$$w(x) \leqq p(x) \qquad (x \in A) \tag{2}$$

it is assumed in [8] that

$$(\exp(ih)) = 1 \tag{3}$$

holds for all selfadjoint h, and

$$w(r) = 0 \qquad (r \in R) \tag{4}$$

is satisfied also, where R denotes the Jacobson radical in A. (see (10. 9) of [8]). In addition it is assumed only that

$$w(h) \geqq p(h) \tag{5}$$

holds for any selfadjoint element h for the identity of the function $p(x)$ and $w(x)$ (see [8], (10. 5)).

We shall prove in this note that an algebra pseudonorm $w(x)$ satisfying some natural conditions is necessarily equivalent to the pseudonorm $p(x)$ (see Theorem 1 below).

These conditions together give the boundedness of the pseudonorm $w(x)$ on $E = \{\exp(ih) : h \in H\}$, where H denotes the selfadjoint part of A. In other words

$$w(\exp(ih)) \leqq C_0 \qquad (h \in H) \tag{6}$$

holds for some constant $C_0 > 0$. The method of proof is similar to the proof of uniform boundedness of pointwise bounded set of continuous mappings on Banach space, the Banach – Steinhaus theorem.

It is well known, that the existence of a norm equivalent to the original one, under which the Banach algebra A is a C^*-algebra, implies that it must be $p(x)$. Any such algebra is called a C^*-equivalent algebra.

Concerning this question H. BEHNCKE investigated in [1] complex Banach algebras with involution all maximal abelian selfadjoint subalgebra of which are B^*-equivalent (or the same C^*-equivalent) algebras. He called such an algebra an LB^*-algebra. The question that any Banach algebra every maximal abelian selfadjoint subalgebra of which is C^*-algebra is itself a C^*-algebra, was answered by Behncke in [1]. (This yields a sharpened form of the Gelfand-Naimark theorem.) Behncke conjectured also that any LB^*-algebra is a C^*-equivalent algebra.

We give an affirmative answer to this problem in case if the LB^*-algebra satisfies some natural additional property (see Corollary 2 and Theorem 4 below).

If the involution is hermitian in a Banach algebra, the problem is exactly to find some conditions which ensure that the norm as function is continuous with respect to the pseudonorm $p(x)$ at least on selfadjoint part of the algebra. In connection with this question the work [10] of B. YOOD should be mentioned.

We replace the condition mentioned above with the continuity of the norm as function with respect to the pseudonorm $p(x)$ on each commutative real Banach algebra generated by any selfadjoint element and the unit element of the algebra (see Corollary 5)

The abstract version of the above problem is the homeomorphic and *-isomorphic characterization of C^*-algebras by means of the norm only, without any assumption on the existence of the involution. For this see the work [2] of E. BERKSON.

The Vidav-Palmer Theorem gives isometric characterization of C^*-algebras as follows: The complex unital Banach algebra A satisfying the decomposition

$$A = H(A) + i\,H(A)$$

with

$$H(A) = \{h \in A : \|\exp(i\,\alpha\,h)\| \equiv 1 \ \ (\alpha \text{ real number})\} \tag{7}$$

where $H(A)$ represents the Hermitian part of the algebra A, is isometrically *-isomorphic with a C^*-algebra. The involution is given here by the Vidav's map

$$h+ik \to h-ik \qquad (h, k \in H(A)). \tag{8}$$

For details see [6], [7], [3] Theorem (6. 9).

We give some homeomorphic *-isomorphic characterization of C^*-algebras in Theorem 6 below using the previous results and results of papers [9] and [2]. It was introduced by G. LUMER in [5] the notion of an element which becomes Hermitian with respect to some equivalent norm on A. He called such an element to be Hermitian-equivalent.

An element $h \in A$ is Hermitian-equivalent if and only if the group $\{\exp(i \alpha h) : \alpha \text{ real}\}$ is bounded in A (as a simple application of [3, Lemma (2. 7)] shows). This means that soon in Theorem 1 of the present paper, the selfadjoint elements are Hermitian-equivalent with respect to the algebra pseudonorm $w(x)$. In any other case below the selfadjoint elements of the algebra are at the same time Hermitian-equivalents. We end with some weaker form of the LB^*-conjecture of H. BEHNCKE in Question 7. Except the norm the notation of the excellent paper [8] will be used. The exponential series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ is denoted by $\exp x$.

2. §. The main result

We begin with a result giving sufficent conditions for an algebra pseudonorm $w(x)$ to be bounded with respect to the relevant pseudonorm $p(x)$ or to be qeuivalent to this.

THEOREM 1. *Let A be unital Banach algebra with involution over the field of the complex numbers. Assume that the involution is hermitian. Let further $w(x)$ be an algebra pseudonorm on the algebra A which satisfies the following conditions*

1° $w(r) = 0$ *for each* $r \in R$ ((4) *above*),
2° $w(\exp(ih)) > 0$ *for any* $h \in H$,
3° $r(h) = \sup\{w(\exp(i \alpha h)) : \alpha \text{ real}\} < \infty$ *for every* $h \in H$,
4° $w(\exp i(h+k)) \leq C\, w(\exp(ih))\, w(\exp(ik))$ *for all* $h, k \in H$ *where* $C > 0$ *is a constant not depending on* h *and* k.

Then there exists a constant C_0 *such that*

$$w(x) \leq Cp(x) \qquad (x \in A) \tag{9}$$

holds.

Moreover, if the additional condition

$$5° \qquad p(h) \leq Kw(h) \qquad (h \in H) \tag{10}$$

holds with some constant K, then

$$p(x) \leq C_0 \cdot K \cdot w(x) \qquad (x \in A) \tag{11}$$

is satisfied. Thus in this case $p(x)$ and $w(x)$ are equivalent.

PROOF. The main ambition of our argument is to ensure that the given pseudonorm $w(x)$ is bounded (above) by C_0 on the selfadjoint part of the algebra A. The method of proof is the application of the "slidding hump" technique, which is fruitful in this case as well as in the proof of uniform boundedness theorems of pointwise bounded continuous mappings on Banach spaces. In the remainder part of the proof we are going on the line of proofs in [8].

Let us first show that

$$6^\circ \qquad C_0 = \sup \{w(\exp(ih)) : h \in H\} < \infty \tag{12}$$

holds. The functions

$$q_\alpha(h) = \log w(\exp(i\,\alpha\, h)) \ (\alpha \text{ real}, h \in H) \tag{13}$$

are immediately satisfy the following four conditions for every reals α, β and for any selfadjoint h and k (in H):

(i) $q_\alpha(h+k) \leq q_\alpha(h) + q_\alpha(k) + \log C$,
(ii) $q_\alpha(\beta h) = q_{\alpha\beta}(h)$,
(iii) $M(h) = \sup \{q_\alpha(h) : \alpha \text{ real}\} < \infty$,
(iv) $q_\alpha(h) \leq |\alpha| \cdot \|h\|$.

Now assume indirectly, that

$$M = \sup \{M(h) : h \in H\} = \infty \tag{14}$$

holds. Then there exist sequences $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ of H and of real numbers resp., such that condition

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \|h_n\| < 2^{-n} && \text{for all } n = 1, 2, \ldots \\ &\text{(b)} \quad |\alpha_m| \, \|h_n\| < 2^{-n} && \text{for every } n > m \\ &\text{(c)} \quad q_{\alpha_n}(h_n) > n^2 + 1 + \sum_{m=1}^{n-1} M(h_m) \end{aligned} \tag{15}$$

is fulfilled. To show this, we choose first an element $k_1 \in H$ $(k_1 \neq 0)$ with $M(k_1) > 3$ which implies that $q_{\beta_1}(h_1) > 2$ for some real number $\beta_1 (\beta_1 \neq 0)$ so that $h_1 = 2^{-1} \|k_1\|^{-1} \cdot k_1$ and $\alpha_1 = k_1 \cdot 2 \cdot \beta_1$ are appropriate elements for the first step. Now we may assume that $\{h_m\}_{m=1}^{n-1}$ and $\{\alpha_m\}_{m=1}^{n-1}$ are choosen. By our assumption there exists a $k_n \in H (k_n \neq 0)$ with

$$M(k_n) > n^2 + 2 + \sum_{m=1}^{n-1} M(h_m) \quad (k_n \neq 0).$$

This implies at once that

$$q_{\beta_n}(k_n) > n^2 + 1 + \sum_{m=1}^{n-1} M(h_m)$$

for some $\beta_n \neq 0$ holds. Write

$$\gamma_n = \max\{1; |\alpha_m| : m = 1, \ldots, n-1\} \cdot 2^n \cdot \|k_n\|$$

then $h_n = \gamma_n^{-1} k_n$ and $\alpha_n = \gamma_n \beta_n$ are also appropriate elements for the next step. Thus by induction we can define as well as an element $k = \sum_{m=1}^{\infty} h_m$ of the form $h+r$, where $h \in H$ and $r \in R$.

If Q denotes the canonical quotient map modulo R and $w^Q(x)$ ist the induced pseudonorm on A/R, the quotient algebra modulo the radical, then we have $Qk = Qh$ and

$$w(\exp(i\alpha_n h)) = w^Q(Q\exp(i\alpha_n h)) = w^Q(\exp(i\alpha_n Q h)) =$$

$$= w^Q\left(\exp\left(i\alpha_n \sum_{m=1}^{\infty} Q h_m\right)\right) = w^Q\left(Q\exp\left(i\alpha_n \sum_{m=1}^{\infty} h_m\right)\right) =$$

$$= w\left(\exp\left(i\alpha_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} h_m\right)\right)$$

since Q and the involution are continuous, the algebra A/R being also hermitian and semisimple (see [8] (8. 1)).

It follows now that

$$q_{\alpha_n}(h_n) = q_{\alpha_n}\left(h - \sum_{m=1}^{n-1} h_m - \sum_{m=n+1}^{\infty} h_m\right) \leq q_{\alpha_n}(h) + \sum_{m=1}^{n-1} q_{-\alpha_n}(h_m) +$$

$$+ q_{-\alpha_n}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} h_m\right) + n\log C \leq q_{\alpha_n}(h) + \sum_{m=1}^{n-1} M(h_m) + |\alpha_n| \sum_{m=n+1}^{\infty} h_m + n\log C.$$

Thus we have for every $n > 2$

$$M(h) \geq q_{\alpha_n}(h) \geq q_{\alpha_n}(h_n) - \sum_{m=1}^{n-1} M(h_m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-m} - n\log C =$$

$$= n^2 - n\log C \to \infty$$

as n tends to infinity, contradicting (iii). This implies that 6° holds with $C_0 = \log M$, as was claimed.

The theorem will be proved in two steps (as in (10. 9) of [8]). For sake of completeness we reproduce here the proof.

To show the inequality

$$w(h) \leq C\,|h|_\sigma \qquad (h \in H) \tag{16}$$

consider an element $h\in H$ with $|h|_\sigma<1$. Then there exists a $k\in H$ commuting with h and such that $h^2+k^2=1$ (see [8] (1. 5)). Set $u=h+ik$ so that u is unitary and $\sigma(u)$, the spectrum of that does not contain the number 1. Using [8] (9. 3) it follows that expressions

$$u=\exp il_1+r_1 \text{ and } u^*=\exp il_2+r_2$$

holds for some l_1, $l_2\in H$ and r_1 $r_2\in R$. Thus

$$h=\frac{1}{2}(\exp il_1+\exp il_2)+r \quad \text{with } r\in R,\ r=r_1+r_2.$$

We have by 1° and 6°,

$$w(h)\leq\frac{1}{2}(w(\exp il_1)+w(\exp il_2))\leq C_0$$

which proves the desired inequality (16) $w(h)\leq C_0|h|_\sigma$ fo any $h\in H$.

Let us prove now the continuity of $w(x)$. Given $x\in A$ in the form $x=h+ik$ with h, $k\in H$ we have by (16)

$$w(x)\leq w(h)+w(k)\leq C_0\,(|h|_\sigma+|k|_\sigma)\leq 2\,C_0\,p(x)\leq 2\,C_0\,\beta^{1/2}\,\|x\|,$$

if $\|Qx^*\|\leq\beta\|Qx\|(x\in A)$ holds for some $\beta>0$ implying

$$p(x)\leq\beta^{1/2}\,\|x\| \qquad (x\in A) \tag{17}$$

since $|h|_\sigma\leq p(x)$ and $|k|_\sigma\leq p(x)$ are satisfied. (see [8], (8. 2), (5. 7))

Let us now prove the inequality (9).

Given an $x\in A$ with $p(x)<1$, we have by [8, (9. 7)] that

$$x\in(\text{conv } E+R)^-$$

the closure of (conv $E+R$), where $E=\{\exp ih : h\in H\}$ and conv E denotes the convex hull of E. According to our conditions 1°, 6°, and the continuity of $w(x)$ we have that $w(x)\leq C_0$ which proves the above inequality.

Assume now the condition 5°. As was in [8, (10. 5)], we have then. for each $x\in A$ that

$$w(x)^2\leq C_\circ^2\,p(x)^2=C_\circ^2\,|x^*x|_\sigma=C_\circ^2\,p(x^*x)\leq C_\circ^2\,K\cdot w(x^*x)\leq C_\circ^2\,Kw(x^*)\,w(x)$$

from which $w(x)\leq C_\circ^2\,Kw(x^*)$ so that at once

$$w(x)^2\leq C_\circ^2\,p(x)^2\leq C_\circ^2\,K^2\,w(x)^2$$

follows. This proves the required inequality (11) completing the proof.

3. §. Applications

We give conditions which ensure that a complex unital Banach algebra is homeomorphically *-isomorphic to a C^*-algebra. In particular an LB^*-algebra with some further natural property is C^*-equivalent.

COROLLARY 2. Let A be a complex unital Banach algebra with involution satisfying the following two conditions:

(I) $r(h) = \sup \{\|\exp(i\,\alpha\,h)\| : \alpha \text{ real}\} < \infty\ (h \in H)$,

(II) there exists a constant $C > 0$ satisfying the inequality

$$\|\exp i\,(h+k)\| \leq C\|\exp(ih)\|\,\|\exp(ik)\|\quad (h, k \in H).$$

Then A is a C^*-algebra for some norm equivalent to the original one.

PROOF. To prove first that the involution is hermitian, consider an $h \in H$ and suppose $\alpha + i\,\gamma \in \sigma(h)$, the spectrum of h, for α, γ real numbers, such that $\gamma \neq 0$.

Let $k = \gamma^{-1}.\,(h - \alpha)$ so that $k \in H$ and $i \in \sigma(k)$. Given any $\beta > 0$, the element $\exp(-i\,\beta\,k)$ has $\exp\beta$ in its spectrum. It follows that

$$\exp\beta \leq \|\exp(-i\,\beta\,k)\|$$

for any $\beta > 0$, which contradicts the condition (I).

To show A is a semi-simple it suffices to establish that any selfadjoint element of R must be 0, since R is invariant under the involution. But every element of H is Hermitian-equivalent by (I) and the only quasinilpotent member of H is 0 by [5, Lemma 14]. But the radical is a topological nil ideal, every selfadjoint element of which will be quasinilpotent, at the same time 0.

Apply now Theorem 1 with $w(x) = \|x\|$ $(x \in A)$ to show that the norm is equivalent to the pseudonorm $p(x)$. Thus the algebra A is C^*-algebra with the norm $p(x)$ equivalent to the original norm.

REMARK. Every complex unital Banach algebra A with involution is an LB^*-algebra provided A satisfies the condition (I). Indeed, any commutative subalgebra automatically satisfies condition (II) with $C = 1$ (see [2, Corollary (3. 4)]).

The following result shows that for Banach algebras with involution which satisfy condition (I) of Corollary 2, some weaker condition, implies the important condition (II) ibidem.

LEMMA 3. Let A be a complex unital Banach algebra with involution satisfying the condition

(I) $r(h) = \sup \{\|\exp(i\,\alpha\,h)\| : \alpha \text{ real}\} < \infty\ (h \in H)$.

Assume that there exists a constant K satisfying

(III) $r(h+k) \leq K\,r(h)\,r(k) \qquad (h, k \in H)$.

Then the condition

(II) $\|\exp i(h+k)\| \leq C\|\exp(i\,h)\| \cdot \|\exp(i\,k)\|$

holds also with some constant C.

PROOF. Assuming the contrary let $\{h_n, k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ be sequences such that the inequalities

$$\|\exp i(h_n+k_n)\| \geq k(n)\|\exp ih_n\| \|\exp ik_n\| \quad (n>1) \tag{18}$$

are hold with

$$k(n) = \exp\left[nr\left(-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right)\right] \quad (n>1) \tag{19}$$

where $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ is sequence of real numbers such that

$$\alpha_m = \max\{1, |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{m-1}|\}\, 2^m(\|h_m\|+\|k_m\|) \tag{20}$$

holds for any $m = 2, 3, \ldots$.

Let now

$$h = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\alpha_n}, \quad k = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{\alpha_n}.$$

Then since A is hermitian and semi-simple by condition (1) us as was showed in the proof of Corollary 2, then involution is automatically contiouous so that the elements h and k defined above are selfadjoint. Further it follows that for any $n>1$

$$k(n) \leq \|\exp i(h_n+k_n)\| = \left\|\exp i\alpha_n\left(h+k-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}-\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right)\right\|.$$

If write s_n for

$$h+k-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}$$

and $\|\cdot\|_n$ for the norm equivalent to the original norm under which s_n is Hermitian, then by the Trotter-product exponential formula

$$k(n) \leq r(s_n)\lim_{j\to\infty}\left\|\left[\exp\frac{i\alpha_n}{j}s_n\exp\frac{i\alpha_n}{j}\left(-\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right)\right]^j\right\|_n \leq$$

$$\leq r(s_n)\lim_{j\to\infty}\left\|\exp i\frac{\alpha_n}{j}s_n\right\|_n^j\left\|\exp i\frac{\alpha_n}{j}\left(-\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right)\right\|_n^j \leq$$

$$\leq r(s_n)\exp\left\|i\alpha_n\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right\|_n \leq r(s_n)\exp r(s_n) \leq \exp(2r(s_n))$$

since

$$\left\|i\alpha_n\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right\|_n \leq r(s_n)\left\|i\alpha_n\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right\| \leq r(s_n)$$

by (20). This shows by (19) and by condition (III) that

$$nr\left(-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right)\leq 2\,r(s_n)\leq 2\,Kr(h+k)\,r\left(-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h_m+k_m}{\alpha_m}\right)$$

showing

$$r(h+k)\geq\frac{n}{2\,K}\qquad\text{for}\qquad n=2,\,3,\,\ldots$$

which contradicts condition (I). This completes the proof.

REMARK. The conditions (II) and (III) for Banach algebras with involution satisfying the condition (I) are equivalent. This is indeed, since (II) implies (III) immediately by (I). Thus we have the following result.

THEOREM 4. *Let A be a complex involutory Banach algebra, with unit such that the conditions* (I) *and* (III) *are satisfied. Then A is a C^*-equivalent algebra.*

We include a proof which use Baire category argument and suggested by a proof of [5]. Consider H in itself as a real Banach space in which the subsets

$$R(n)=\{h\in H: r(h)\leq n\}\qquad(n=1,\,2,\,\ldots)\tag{21}$$

are closed. Indeed, if $h\in H$ such that $h=\lim_{n\to\infty}h_n$ with $h_n\in R(n)$ then we have for any $n=1,\,2,\,\ldots$

$$\|\exp(i\,\alpha\,h)\|\leq\|\exp(i\,\alpha\,h_n)\|+\|i\,\alpha\,h-i\,\alpha\,h_n\|\exp(\max\|\alpha\,h\|,\,\|\alpha\,h_n\|)\tag{22}$$

since

$$\|\exp h-\exp h_n\|\leq\sum_{j=1}^{\infty}(j!)^{-1}\sum_{k=1}^{j}\|h^{j-k}(h-h_n)\,h_n^{k-1}\|\leq$$

$$\leq\|h-h_n\|\cdot\exp(\max\{\|h\|,\,\|h_n\|\})$$

holds for any $h,\,h_n\in H$. It follows that for any $\varepsilon>0$

$$\|\exp(i\,\alpha\,h)\|<r(h_n)+|\alpha|\,\|h-h_n\|\exp\left(|\alpha|\,(1+\|h\|)\right)\leq n+\varepsilon$$

s satisfied for fixed α if $\|h_n\|\leq\|h\|+1$ and

$$\|h-h_n\|<\varepsilon\,|\alpha|^{-2}\exp\left[-|\alpha|\,(1+\|h\|)\right]$$

holds.

This shows $\|\exp(i\,\alpha\,h)\|\leq n$ for any α i. e. the desired inequality $r(h)\leq n$. Since $H=\bigcup_{n=1}^{\infty}R(n)$, there exists an index n_0 such that $R(n_0)$ contains a nontrivial sphere Z of center h_0. Thus any $h\in H$ has a form $h=-\alpha\,h_0+\alpha\,h'$, with some $h'\in Z$, α real; showing by (I) that $r(h)\leq K\cdot r(h_0)\;r(h')\leq$

$\leq K \cdot r(h_0)\ n_0$. We have thus the result using the spectral radius for the characterization.

COROLLARY 5. Let A be a complex unital Banach algebra with hermitian involution. Suppose that A satisfies together with condition (III) the following:

$$(23) \qquad (\mathrm{I})' \quad s(h) = \sup \{\|a\| : |a|_\sigma = 1,\ a \in A(h)\} < 1 \quad (h \in H)$$

condition, where $A(h)$ denotes the real commutative Banach algebra generated by h and the unit element.

Then A is a C^*-equivalent algebra.

PROOF. It suffices to prove that the algebra A satisfies condition (I). Given any $h \in H$ and a real number α we have

$$\|\exp(i\,\alpha\,h)\| \leq 2 \max \{\|\cos \alpha\, h\|,\ \|\sin \alpha\, h\|\} \leq$$

$$2\, s(h) \max \{|\cos \alpha\, n|_\sigma,\ |\sin \alpha\, h|_\sigma\} \leq 2\, s(h)\ |\exp(i\,\alpha\,h)|_\sigma = 2\, s(h)$$

which shows $r(h) \leq 2\ s(h)$ for any $h \in H$ as was required by (I) since the spectrum of the element $\exp(i\,\alpha\,h)$ has modulus one the involution being hermitian.

REMARK. The condition (I)′ is a weakened version of the condition

$$(24) \qquad \sup \{\|h\| : |h|_\sigma = 1,\ h \in H\} < \infty$$

for which see [10, Corollary 1], [2, Theorem (3. 6)] or [8, Theorem (8. 4)] At the same time condition 3° in Theorem 1 above may be replaced by (I)′.

Some homeomorphic *-isomorphic characterization gives the following result for C^*-equivalent algebras in abstract form.

THEOREM 6. *Let A be a complex Banach algebra with unit element which satisfirs the following conditions*

(i) $A = H_e(A) + i\ H_e(A)$ *with*
$H_e(A) = \{h \in A : r(h) = \sup \{\|\exp(i\,\alpha\,h)\| : \alpha \text{ real}\} < \infty\}$
where $H_e(A)$ is the set of Hermitian-equivalent elements in A,

(ii) $\sup \{\|g\| : g \in G(h, k)\} < \infty\ (h, k \in H_e(A))$
where $G(h, k)$ denotes the semi-group generated by $\exp(i\,\alpha\,h)$, $\exp(i\,\beta\,k)$ *for reals* α, β,

(iii) $r(h+k) \leq K\ r(h)\ r(k)\ (h, k \in H_e(A))$ *with some contant K not depending on h, k.*

Then A is a C^*-algebra with some norm equivalent to the original norm, the involution of which is defined by (8).

PROOF. It suffices now to prove that A has an involution for which the selfadjoint part of A equals $H_e(A)$. For this we use the conditions (i), (ii) and Hilfssatz 2 of [9] showing that $H_e(A)$ is real linear manifold in A such that

$$i(h\,k - k\,h) \in H_e(A) \qquad (h, k \in H_e(A))$$

holds. Indeed, condition (ii) says in consequence of Lemma (2.7) of [3] that h, k is Hermitian with some joint norm equivalent to the original

norm such that [2, Theorem (3. 1)]proves our statement. The condition (iii) is necessary by the method of proof of Theorem 3 above.

We conjecture that condition (iii) is superfluous in Theorem 6, This means that the following question is a more weaker version of the LB^*-conjecture of H. BEHNCKE.

QUESTION 7. Let A be a complex Banach algebra with unit element satisfying the conditions (i), (ii) of Theorem 6. Is A a C^*-algebra with some norm equivalent to the original norm?

References

[1] BEHNCKE, A note on the Gelhand-Naimark conjecture, *Comm. Pure and Applied Math.*, **23** (1970), 189–200.
[2] BERKSON, E., Prehermitian Elements and B^*-algebras, *Math. Annalen*, **195** (1972), 192–198.
[3] BONSALL, F. F. – DUNCAN, T., *Numerical Ranges*, London Math. Soc Lecture Note Series No. 2. (1971).
[4] LENARD, A., Probabilistic version of Trotter's exponential product formula in Banach algebras, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **32** (1971), 101–107.
[5] LUMER, G., Spectral operators, hermitian operators and bounded groups, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **25** (1964), 75–85.
[6] PALMER, T. W., Characterization of C^*-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 538–540.
[7] PALMER, T. W., Characterization of C^*-algebras II., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **143** (1970), 577–588.
[8] PTAK, V., Banach algebras with involution, *Manuscripta Math.*, **6** (1972), 245–290.
[9] VIDAV, I., Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren, *Math. Z.*, **66** (1956), 121–128.
[10] YOOD, B., On axioms for B^*-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 80–82,

ON A PROBLEM OF ARAKI AND ELLIOTT

By

Z. SEBESTYÉN

II. Department for Analysis of the Eötvös Loránd University, Budapest

(Received February 15, 1973)

In a recent a paper [1] H. ARAKI and G. A. ELLIOTT proved the following theorem concerning the definition of C^*-algebras (see [1], Theorem 2):

Let A be an involutory algebra over the field of complex numbers with a complete linear space norm such that for all x in A

$$\|x^* x\| = \|x^*\| \cdot \|x\| . \tag{1}$$

Suppose that the involution $x \to x^*$ is norm-continuous. Then A is a C^*-algebra.

Here we mean under a C^*-algebra a complex involutory Banach-algebra, the norm of which satisfies for every $x \in A$ (1) and

$$\|x^*\| = \|x\| . \tag{2}$$

The authors raised in [1] the following problems:

a) Is it necessary to assume the norm-continuity of the involution in the theorem stated above?

b) Is it enough to assume (1) only for normal x, i.e. for which $x^* x = x x^*$ holds?

The last question is answered in the negative by the author in [10] showing a counter example. It should be noted, that there exists a more simple such an example. Namely, any full algebra $B(H)$ of bounded operators on a Hilbert space H, with the numerical radius as a linear space norm defined for $T \in B(H)$ as follows

$$w(T) = \sup \{|(Te, e)| : e \in H, \|e\| = 1\}, \tag{3}$$

is not a C^*-algebra. Indeed, as well-known, for any $T \in B(H)$

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\| \tag{4}$$

holds and $w(T)$ differs from $\|T\|$ in general. But they agree for normal T as desired. Thus any maximal commutative selfadjoint subalgebra of $B(H)$ is a C^*-algebra with the norm given by (3) and the whole algebra is not at all a C^*-algebra whenewer the dimension of H exceeds one (for details see [2], [4]).

The purpose of this note is to answer the questions *a)*, *b)* in case of algebras in which the spectral radius does not exceed the norm (at least for normal elements). We obtain also a generalization of ARAKI and ELLIOTT theorem mentioned above.

The algebra A denotes throughout this paper an algebra with involution (i.e. with an involutory automorphism (*) of period two) over the field of the complex numbers. All norms are to be assumed only a linear space norm, not at all an algebra norm, which known satisfies the submultiplicative property $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ for any x, y in A. It follows that the multiplication is not norm-continuous in general.

In the hope of an affirmative answer to the problem *b)* the above example suggests to the author that

$$\|x^* x\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \tag{5}$$

must be satisfied for any x in A. We see first that under this assumption A is a normed algebra with continuous involution (see Lemma 2 below) pointing out that multiplication with selfadjoint components is norm-continuous in this case.

In the first paragraph we prove lemmas necessary for later and a theorem on a complex *-algebra with linear space norm to be a pre-C^*-algebra, under the norm defined for $x \in A$ as follows

$$\|x\|_0 = \|x^* x\|^{1/2} \tag{6}$$

The second paragraph contains the main rasults about the questions raised by ARAKI and ELLIOTT in [1]. We use the notation of the RICKART's monograph [9].

1. §. Lemmas and preliminary results

The first lemma gives sufficent condition under which a complex involutory algebra may be a pre-C^*-algebra with an appropriate norm given by (6), which agrees with the original norm for selfadjoint elements. Here a pre-C^*-algebra signifies a normed algebra, the norm completion of which is a C^*-algebra. The condition (i) and (ii) below are suggested by (3.3) Lemma in PALMER's [6] and by PTÁK's ([8] (5. 7)). The involution is called proper if $x^* x = 0$ implies $x = 0$ for any $x \in A$.

LEMMA 1. Let A be a complex *-algebra with proper involution and with a linear space norm such that the following conditions are satisfied for x, y, h in A

(i) $\|xy\| \leq \|yx\|$ whenever $xy\,(= y^*x^*)$ selfadjoint,
(ii) $\|x^*y + y^*x\| \leq 2\|x^*x\|^{1/2}.\|y^*y\|^{1/2}$,
(iii) $\|x^*xy\,y^*\| \leq \|x^*x\|\,\|y\,y^*\|$,
(iv) $\|h^2\| = \|h\|^2$ whenever $h\,(= h^*)$ selfadjoint.

Then A is a pre-C^*-algebra with the norm given by (6).

PROOF. Since for any x in A we have by (iv) that

$$\|x^*x\|_0 = \|x^*x\,x^*x\|^{1/2} = \|x^*x\| = \|x\|_0^2; \tag{7}$$

we need show only that $\|\cdot\|_0$ is an algebra norm: immediately homogeneous and norm preserving for the involution because of (i), since

$$\|x\|_0 = \|x^*x\|^{1/2} \leq \|x\,x^*\|^{1/2} = \|(x^*)^*x^*\|^{1/2} = \|x^*\|_0$$

implies

$$\|x\|_0 = \|x^*\|_0 \quad (x \in A). \tag{8}$$

The submultiplicativity of $\|\cdot\|_0$ is seen as follows: in view of (i), (iii) and (8) we have for any $x, y \in A$ that

$$\|xy\|_0 = \|y^*(x^*x\,y)\|^{1/2} \leq \|x^*x\,y\,y^*\|^{1/2} \leq \|x^*x\|^{1/2}\,\|y\,y^*\|^{1/2} = \|x\|_0 \cdot \|y\|_0. \tag{9}$$

It remains still the proof of the subadditivity: using (iii) we have for any x, y in A:

$$\|x+y\|_0^2 = \|(x^*+y^*)(x+y)\| \leq \|x^*x\| + \|y^*y\| + \|x^*y + y^*x\| \leq$$
$$\leq \|x\|_0^2 + \|y\|_0^2 + 2\|x\|_0 \cdot \|y\|_0$$

which gives the desired inequality

$$\|x+y\|_0 \leq \|x\|_0 + \|y\|_0.$$

Finally $\|x\|_0 = 0$ means $x^*x = 0$ implying $x = 0$ as was claimed. The identity $\|h\|_0 = \|h\|$ $(h = h^*)$ follows immediately from (iv).

REMARKS. 1. The condition, that for any x in A

$$\|x + x^*\| \leq 2\|x^*x\|^{1/2} \tag{ii)*}$$

holds, is a stronger version of Lemma 1 (ii) in case if A has not an identity. It implies automatically that the involution is proper. Indeed, assumming (ii)* we have for any x in A that

$$\|x\| = \frac{1}{2}\|x + x^* + i\,((ix) + (ix)^*)\| \leq \|x^*x\|^{1/2} + \|(ix)^*(ix)\|^{1/2} = 2\|x\|_0. \tag{10}$$

2. If we assume also (5), then for any $x \in A$ we have

$$\|x\|_0 = \|x^* x\|^{1/2} \leq (\|x^*\| \, \|x\|)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(\|x^*\| + \|x\|) \leq \max(\|x^*\|, \|x\|) . \tag{11}$$

In this case the norm-continuity the involution implies the equivalence between $\|\cdot\|_0$ and the original norm.

We prove in the followings that (5) implies the existence of an algebra norm on A equivalent to the original norm for selfadjoint elements, under which the involution is continuous.

LEMMA 2. Let A be a *-algebra with a linear space norm satisfying (5). Then A is a normed algebra with continuous involution.

PROOF. We prove first that for any selfadjoint h, k in A

$$\|h\,k\| \leq 4\,\|h\|\,\|k\| \tag{12}$$

holds. To see this consider the identity [1], (3) with $x, y \in A$; c, d complex numbers

$$4\,cdxy = \sum_{n=0}^{3} i^n (dy^* + \overline{c}\,x)(dy + i^n cx^*) \tag{13}$$

for $x = h$, $y = k$, $c = \|h\|^{-1}$, $d = \|k\|^{-1}$ (if $h \neq 0$, $k \neq 0$). Using (5) and the triangle inequality we obtain immediately (12) as was claimed. We can so define for A a linear space norm as follows. Let $x = h + ik$, with selfadjoint h, k, be a general element of A. Then

$$\|h + ik\|_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sup \{\|h \cos t - k \sin t\| + \|h \sin t + k \cos t\| : t \text{ real number}\} \tag{14}$$

defines a linear space norm, which satisfies

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|h\| + \|k\|) \leq \|h + ik\|_1 \leq \|h\| + \|k\| , \tag{15}$$

$$\|h\|_1 = \|h\| .$$

For details see [9] p. 7, where this norm is used for the complexification of a real Banach space. Easy to see that the involution is isometry under this norm. Further on, with $y = l + im$; l, m selfadjoints; we have by (12)

$$\|xy\|_1 \leq \|hl - km\| + \|hm + kl\| \leq 4(\|h\| + \|k\|)(\|l\| + \|m\|) \leq$$

$$\leq 8\,\|x\|_1\,\|y\|_1 . \tag{16}$$

This shows that the multiplication is continuous with respect to the 1-norm. It follows that the norm of the extended left regular representation on A with the 1- norm, defined for x in A as

$$\|x\|_2 = \sup \{\|\lambda x + y\|_1 : \lambda \text{ comlex number}, \; y \in A; \; |\lambda| + \|y\|_1 = 1\} \tag{17}$$

is an algebra norm equivalent to the 1-norm. The following easy inequalities

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq 8\|x\|_1 \quad \text{for} \quad x \in A \tag{18}$$

show this together with the norm-continuity of the involution under the 2-norm. The proof is complete.

We shall denote by $\sigma_A(x)$ the spectrum of an element x of the algebra A. The spectral radius $\nu_A(x)$ is defined then by

$$\nu_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ complex number}, \lambda \in \sigma_A(x)\}.$$

The 2-norm gives us now an other spectral radius for $x \in A$ as

$$\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|_2^{1/n}. \tag{19}$$

This later spectral radius agrees with $\nu_{\tilde{A}}(x)$, where $\tilde{A}$ is the 2-norm completion of the algebra A. It follows that for any $x \in A$

$$\nu(x) \leq \nu_A(x) \tag{20}$$

holds.

Now the following theorem is obtained by the preceding lemmas. This yields an answer to the question *a)* under natural additional condition on the spectral radius, which holds automatically in case of an algebra norm.

THEOREM 3. *Let A be a complex *-algebra with linear space norm satisfying* (1) *for every $x \in A$. Suppose further that*

$$\nu_A(x) \leq \|x\|$$

holds for any $x \in A$. Then A is a pre-C-algebra.*

PROOF. We have from (20) by the assumption

$$\nu(x) \leq \|x\| \tag{21}$$

for any $x \in A$.

On the other hand the above spectral radius under (19) can be computed for any selfadjoint element $h\,(= h^*)$ in A as follows

$$\nu(h) = \lim \|h^{2^n}\|_2^{2^{-n}} = \lim \|h^{2^n}\|_1^{2^{-n}} = \|h\|, \tag{22}$$

since Lemma 1, (iv) gives by induction for any $n = 1, 2, \ldots$ and for selfadjoint h

$$\|h^{2^n}\| = \|h\|^{2^n}. \tag{23}$$

Now Lemma 1, (i) is seen as follows: let $h = xy$ the selfadjoint element, then using (21), (22) we have the desired inequality

$$\|yx\| \geq \nu(yx) = \nu(xy) = \nu(h) = \|h\| = \|xy\|.$$

To prove Lemma 1, (iii) we show first that the following inequality

$$\|(x^* x)^{2^{(n-1)}} (yy^*)^{2^{(n-1)}}\| \geq \|xy\|_0^{2^n}. \tag{24}$$

holds for any x, y in A and for every $n = 1, 2, \ldots$.

For the case $n = 1$ Lemma 1, (i) gives

$$\|(x^* x)(y y^*)\| \geq \|y^* (x^* x y)\| = \|x y\|_0^2.$$

Thus using also (1) and (8) we have by induction

$$\begin{aligned}\|(x^* x)^{2^n} (y y^*)^{2^n}\| &\geq \|(x^* x)^{2^{(n-1)}} (y y^*)^{2^{(n-1)}} (y y^*)^{2^{(n-1)}} (x^* x)^{2^{(n-1)}}\| = \\ &= \|(x^* x)^{2^{(n-1)}} (y y^*)^{2^{(n-1)}}\| \cdot \|(y y^*)^{2^{(n-1)}} (x^* x)^{2^{(n-1)}}\| \geq \\ &\geq \|xy\|_0^{2^n} \cdot \|y^* x^*\|_0^{2^n} = \|xy\|_0^{2^{(n+1)}}\end{aligned}$$

which was claimed. It follows, using Lemma 1, (iv) beside aboves, finally that

$$\begin{aligned}4\|x\|_0^{2^n} \|y\|_0^{2^n} &= 4\|(x^* x)^{2^{(n-1)}}\| \|(yy^*)^{2^{(n-1)}}\| \geq \\ &\geq \|(x^* x)^{2^{(n-1)}} (yy^*)^{2^{(n-1)}}\| \geq \|xy\|_0^{2^n}\end{aligned}$$

holds for any $n = 1, 2, \ldots$, which implies after all (9) $\|xy\|_0 \leq \|x\|_0 \|y\|_0$ and so Lemma 1, (iii).

Finally we need show Lemma 1, (ii). To see this we use a slightly modified ergument of Palmer used in the proof of ([6] (3.5) Lemma) showing first the inequality

$$\|(x^* y)^{2^{(n-1)}} (y^* x)^{2^{(n-1)}}\| \leq \|x\|_0^{2^n} \|y\|_0^{2^n} \quad (x, y \in A) \tag{25}$$

for any $n = 1, 2, \ldots$. Since by Lemma 1, (i), (iii) for $n = 1$

$$\|x^* y y^* x\| \leq \|y y^* x x^*\| \leq \|x x^*\| \|y y^*\| = \|x\|_0^2 \|y\|_0^2$$

holds, we have by induction also

$$\begin{aligned}\|(x^* y)^{2^n} (y^* x)^{2^n}\| &\leq \|[(x^* y)^{2^{(n-1)}} (y^* x)^{2^{(n-1)}}] [(y^* x)^{2^{(n-1)}} (x^* y)^{2^{(n-1)}}]\| \leq \\ &\leq \|(x^* y)^{2^{(n-1)}} (y^* x)^{2^{(n-1)}}\| \|(y^* x)^{2^{(n-1)}} (x^* y)^{2^{(n-1)}}\| \leq \\ &\leq \|x\|_0^{2^n} \|y\|_0^{2^n} \|y\|_0^{2^n} \|x\|_0^{2^n} = \|x\|_0^{2^{n+1}} \cdot \|y\|_0^{2^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,\end{aligned}$$

which shows our statement.

Now we conclude from (21) by (1) and using that, as well-known (with continuous involution), $\nu(x) = \nu(x^*)$ holds, that for any $x \in A$

$$\nu(x) = (\nu(x^*) \nu(x))^{1/2} \leq (\|x^*\| \|x\|)^{1/2} = \|x^* x\|^{1/2} = \|x\|_0. \tag{26}$$

This implies, using that for any $\varepsilon > 0$ there exists an n such that

$$\|(x^* y)^{2^n}\|_2 \leq \left(\nu(x^* y)^2 + \varepsilon\right)^{2^{(n-1)}},$$

and

$$\|(y^* x)^{2^n}\|^2 \leq \left(\nu(y^* x)^2 + \varepsilon\right)^{2^{(n-1)}},$$

from (18), (26) and (25) the inequalities

$$\begin{aligned}\|(x^* y)^{2^n}\|_2 &\leq \left(\nu(x^* y)^2 + \varepsilon\right)^{2^{(n-1)}} \leq (\|y^* x\, x^* y\| + \varepsilon^{2^{(n-1)}} \leq \\ &\leq (\|x\|_0^2 \|y\|_0^2 + \varepsilon)^{2^{(n-1)}}, \\ \|(y^* x)^{2^n}\|_2 &\leq (\|x\|_0^2 \|y\|_0^2 + \varepsilon)^{2^{(n-1)}}.\end{aligned}$$

These give by (25) and by (18)

$$\begin{aligned}&\|(x^* y)^{2^{(n-1)}} + (y^* x)^{2^{(n-1)}}\|^2 = \\ &= \|(x^* y)^{2^n} + (y^* x)^{2^n} + (x^* y)^{2^{(n-1)}} (y^* x)^{2^{(n-1)}} + (y^* x)^{2^{(n-1)}} (x^* y)^{2^{(n-1)}}\| \leq \\ &\leq \|(x^* y)^{2^n} + (y^* x)^{2^n}\|_2 + 2\|x\|_0^{2^n} \cdot \|y\|_0^{2^n} \leq 4(\|x\|_0^{2^n} \cdot \|y\|_0^{2^n} + \varepsilon)^{2^{(n-1)}},\end{aligned}$$

and using induction

$$\|(x^* y)^{2^k} + (y^* x)^{2^k}\| \leq 2(\|x\|_0^2 \|y\|_0^2 + \varepsilon)^{2^{(k-1)}}$$

for $k = n, n-1, \ldots, 2, 1$. The $k = 1$ case gives

$$\|(x^* y)^2 + (y^* x)^2\| \leq 2\|x\|_0^2 \|y\|_0^2 \tag{27}$$

since ε was arbitrary positive number previously. Thus (27) allows us to prove (ii) in Lemma 1 using Lemma 1 (iv) as follows:

$$\begin{aligned}&\|x^* y + y^* x\| = \|(x^* y)^2 + (y^* x)^2 + (x^* y)(y^* x) + (y^* x)(x^* y)\|^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\|(x^* y)^2 + (y^* x)^2\| + \|(x^* y)(y^* x)\| + \|(y^* x)(x^* y)\|\right)^{1/2} \leq 2\|x\|_0 \|y\|_0.\end{aligned}$$

We conclude so in consequence of Lemma 1 that A is a pre-C*-algebra with norm given by (6). It suffices now alredy to prove that the original norm agrees with this norm. For normal x it is seen as follows: $\|x\|_0$, as the spectral radius of x with respect to the $\|\cdot\|_0$-norm completion B of A, satisfies by the assumption

$$\|x\|_0 \leq \nu_A(x) \leq \|x\|. \tag{28}$$

The easy conclusion $\|x^*\| \leq \|x\|$ gives at once $\|x^*\| = \|x\|$ and so

$$\|x\|_0 = \|x\|$$

for any normal $x \in A$. In contrast to (28) we shall prove

$$\|x\| \leq \|x\|_0 \quad \text{for any} \quad x \in A \tag{29}$$

which gives also equality here in an analogous manner.

Let $x \in A$ and $\varepsilon > 0$ be given. Since B is a C^*-algebra, we can take a unital C^*-algebra B_1 containing B isometrically *-isomorphically as a subalgebra, if B does not contain a unit. We have then by ([6], (3.7) Corollary) the following expression for the norm of $x \in A$

$$\|x\|_0 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| : x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \; u_j \in B_1, \; u_j u_j^* = u_j^* u_j = 1 ; \right.$$

$$\left. \lambda_j \text{ complex number } (j = 1, 2, \ldots, n); \; n = 1, 2, \ldots \right\} \tag{30}$$

where B_1 denotes also B if B is a unital algebra.

It follows that $v_j = 1 - u_j$ $(j = i, \ldots, n)$ are normal elements in B such that

$$x = \sum_{j=1}^{n} (-\lambda_j) v_j ,$$

being

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0 ,$$

if B has not a unit. Suppose that

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \|x\|_0 + \varepsilon$$

holds with some $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n; u_1, \ldots, u_n\}$ in (30). Choose now normal $x_j \in A$ such that

$$\|x_j\|_0 = 1 \quad \text{and} \quad \|x_j - u_j\|_0 < \varepsilon/(\|x\|_0 + \varepsilon) \quad \text{or} \quad \|x_j - v_j\|_0 < \varepsilon/(\|x\|_0 + \varepsilon)$$

are satisfied for $j = 1, 2, \ldots, n$. We have then by (10)

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| \leq 2 \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\|_0 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \{ \|x_j - u_j\|_0 \text{ or } \|x_j - v_j\|_0 \} < 2\varepsilon$$

so that

$$\|x\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\| + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \cdot \|x_j\| < 2\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \|x_0\| + 3\varepsilon$$

holds since $\|x_j\| = \|x_j\|_0 = 1$ here for $j = 1, 2, \ldots, n$. This shows (29) completting the proof.

REMARKS 1. Since A is a pre-C^*-algebra with the norm given by (6), in place of Lemma 1 (ii) we have (ii)* (more general see [8, (5.7)]) by (22).

2. The continuity of the involution in the form

$$\|x^*\| \leq K\|x\| \quad (x \in A), \quad K > 0 \text{ const.}$$

implies by (10) and (11) at once

$$(1/2)\|x\| \leq \|x\|_0 \leq (1+K)\|x\| \quad \text{for } x \in A \tag{31}$$

showing the equivalence between these norm. This was almost the Part I. of the proof of [1], Theorem 2.

2. §. Main results

We obtain first a result under a metric type condition (26), which is more weaker than the previous natural condition on the spectral radius.

COROLLARY 4. Let A be a complex *-algebra with complete linear space norm satisfying (1) and (26) for every $x \in A$. Then A is a C^*-algebra.

PROOF. We shall show first that A is a C^*-algebra with an equivalent norm defined by (6). Since (1) implies that the involution is proper and isometric with the norm $\|\cdot\|_0$, we need prove the submultiplicative and the subadditive property of this norm. Let x, y be in A given. We have then by (26), (22)

$$\|xy\|_0^2 = \|y^* x^* x y\| = \nu\big(y^*(x^* x y)\big) = \nu(x^* x y y^*) \leq$$
$$\leq \|x^* x y y^*\|_0 = \|y y^* (x^* x)^2 y y^*\|^{1/2}.$$

Suppose now that for some n

$$\|x y\|_0^2 \leq \|(y y^*)^{2^{(n-1)}} (x^* x)^{2^n} (y y^*)^{2^{(n-1)}}\|^{2^{-n}} \tag{32}$$

then again

$$\|x y\|_0^2 \leq \nu\big((y y^*)^{2^{(n-1)}} (x^* x)^{2^n} (y y^*)^{2^{(n-1)}}\big)^{2^{-n}} =$$
$$= \nu\big((x^* x)^{2^n} (y y^*)^{2^n}\big)^{2^{-n}} \leq \|(x^* x)^{2^n} (y y^*)^{2^n}\|_0^{2^{-n}} =$$
$$= \|(y y^*)^{2^n} (x^* x)^{2^{(n+1)}} (y y^*)^{2^n}\|^{2^{-(n+1)}}.$$

An induction argument proves (32) for any $n = 1, 2, \ldots$. It follows by (1) and (12) that

$$\|x y\|_0^2 \leq \|[(y y^*)^{2^{(n-1)}} (x^* x)^{2^{(n-1)}}]\,[(x^* x)^{2^{(n-1)}} (y y^*)^{2^{(n-1)}}]\|^{2^{-n}} =$$
$$= \|(y y^*)^{2^{(n-1)}} (x^* x)^{2^{(n-1)}}\|^{2^{-n}} \|(x^* x)^{2^{(n-1)}} (y y^*)^{2^{(n-1)}}\|^{2^{-n}} \leq$$
$$\leq 4^{2^{-n}} \|(y y^*)^{2^{n-1}}\|^{2^{-n}} \cdot \|(x^* x)^{2^{n-1}}\|^{2^{-n}} \cdot$$
$$\cdot 4^{2^{-n}} \|(x^* x)^{2^{(n-1)}}\|^{2^{-n}} \|(y y^*)^{2^{(n-1)}}\|^{2^{-n}} = 4^{2^{(-n+1)}} \|x\|_0^2 \cdot \|y\|_0^2$$

holds for any n giving the desired $\|xy\|_0 \leq \|x\|_0 \cdot \|y\|_0$. To see the subadditivity let us show (25) for any $n = 1, 2, \ldots$.

First (26), (22) and (9) gives

$$\|x^* y y^* x\| = \nu(x^* y y^* x) \leq \|x^* y y^* x\|_0 \leq$$
$$\leq \|x^*\|_0 \|y\|_0 \|y^*\|_0 \|x\|_0 = \|x\|_0^2 \cdot \|y\|_0^2$$

assumming now (25) we have by (22) and (1)

$$\|(x^* y)^{2^n} (y^* x)^{2^n}\| = \nu\left((x^* y)^{2^n} (y^* x)^{2^n}\right) =$$
$$= \nu\left([(x^* y)^{2^{(n-1)}} (y^* x)^{2^{n-1}}] \cdot [(y^* x)^{2^{(n-1)}} (x^* y)^{2^{(n-1)}}]\right) =$$
$$= \|(x^* y)^{2^{(n-1)}} (y^* x)^{2^{(n-1)}}\| \cdot \|(y^* x)^{2^{(n-1)}} (x^* y)^{2^{(n-1)}}\| \leq$$
$$\leq \|x\|_0^{2^n} \cdot \|y\|_0^{2^n} \|y\|_0^{2^n} \|x\|_0^{2^n} = \|y\|_0^{2^{(n+1)}} \|x\|_0^{2^{(n+1)}},$$

and induction applies to have (25) for $n = 1, 2, \ldots$. We can go on the line of the proof of Theorem 3 to show the desired subadditive property. We need also only show that the norm $\|\cdot\|_0$ agrees with the original norm for every normal element of A and the proof of Theorem 3 gives the desired assertation. But since $\|\cdot\|_0$ is a pre-C^*-norm,

REMARKS. 1. after Theorem 3 shows (ii)* and (10), which implies by (1)

$$\|x^*\| \leq 2\|x\| \tag{33}$$

and so

$$\|x\| \leq 2\|x\|_0 \leq 4\|x\| \tag{34}$$

for every $x \in A$, giving the desired equivalence. Then ([1] Theorem 2) gives the assertation.

2. The assumption (26) means in other words (by (22))

$$\nu(x) \leq \nu(x^* x)^{1/2} \quad \text{for} \quad x \in A$$

which characterizes the hermitian *-algebras, i.e. complex involutory algebras every selfadjoint element of which has purely real spectrum (see PTÁK's [8]). This shows also that (26) is an algebraic condition in $\tilde{A}$, the 2-norm comletion of A.

We conclude with a theorem, which generalizes all known theorem concerning definition of C^*-algebras with the B^*-condition (1).

THEOREM 5. *Let A be a complex *-algebra with complete linear space norm satisfying*

$$\|x^* x\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \quad \textit{for each } x \in A, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \|x^* x\| &= \|x^*\| \cdot \|x\| \qquad (1) \\ \nu(x) &\leq \|x\|_0 \qquad (26) \end{aligned}\right\} \textit{for every normal } x \in A.$$

Then A is a C^*-algebra.

PROOF. The first step is the proof of the statement for any maximal commutative selfadjoint subalgebra C of A. The proof of Corollary 4 shows that C is a pre-C^*-algebra with the equivalent norm given by (6) so that (33) and (34) holds for any normal $x\in A$. We give also a direct proof of (9) and (ii)* for $x, y\in C$ (giving (33)–(34) for normal x).

First we have by (26)

$$\|xy\|_0 = \|y^* x^* xy\|^{1/2} = \nu(y^* x^* xy)^{1/2} \leq \nu(x^* x)^{1/2}\nu(y^* y)^{1/2} = \|x\|_0 \cdot \|y\|_0,$$

and also by (23)

$$\|x+x^*\| = \|x^2+(x^*)^2+2x^* x\|^{1/2} \leq \left(2\nu(x)^2+2\|x\|_0^2\right)^{1/2} \leq 2\|x\|_0.$$

It follows that C closed in A, being the multiplication continuous in C as a consequence of

$$\|xy\| \leq 4\cdot 3^3 \|x\|\,\|y\| \quad \text{for} \quad x, y\in C \tag{35}$$

which follows from [10, (14)]. Thus Corollary 4 or ([1] Theorem 2) implies that C is a C^*-algebra.

We show secondly that A is a pre-C^*-algebra. This is done in consaquence of ([7] 12 Corollary) by showing that the set

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (i\tilde{h})^n/n! : \tilde{h}\in\tilde{A}, \quad \tilde{h}^* = \tilde{h}\right\} \tag{36}$$

is bounded in $\tilde{A}$, the completion of A in the 2-norm given by (17). Since for any normal $x\in A$ we have by (15) and (ii)*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\| \leq \|x\|_2 \leq 8\left(\left\|\frac{x+x^*}{2}\right\| + \left\|\frac{x-x^*}{2}\right\|\right) \leq$$

$$\leq 16\|x\|_0 = 16\|x\|, \tag{37}$$

thus for any selfadjoint $h\in A$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(ih)^n/n!\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(ih)^n/n!\right\|_2 \leq 16\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(ih)^n/n!\right\| \leq 32$$

holds, being the C^*-norm of a quasi-unitary element less or equals 2.

Then an ergument of the proof of Theorem 4 in [7] given 32 for bound of the set in (36).

The norm under which A is a pre-C^*-algebra, must be agree for $x\in A$ with $\nu(x^* x) = \|x\|_0$, as well-known. To see that this agrees also with the original norm on A, we show (29) as before in the proof of Theorem 3. In case if A has an identity, the pre-C^*-norm can be computed by the following expression

$$\|x\|_0 = \inf\left\{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| : x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \exp(i\tilde{h}_j),\ \tilde{h}_j \in \tilde{A},\ \tilde{h}_j = \tilde{h}_j^*\right.$$

$$\left.(j = 1, 2, \ldots, n) \quad n = 1, 2, \ldots\right\} \tag{38}$$

for $x \in A$, as ([6] (3.7) Corollary) ensures. Thus for arbitrary $\varepsilon > 0$, if

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \|x\|_0 + \varepsilon/2$$

holds for some $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \tilde{h}_j, \ldots, \tilde{h}_n\}$ in (38), and normal $x_j \in A$ are choosen such that

$$\|x_j\| = \|x_j\|_0 = 1,\ \|x_j - \exp(i\tilde{h}_j)\|_2 < \varepsilon/2\sqrt{2} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

are satisfied, we have

$$\|x\| \leq \left\|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right\| \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|\exp(i\tilde{h}_j) - x_j\|_2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|\exp(i\tilde{h}_j) - x_j\|_2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \|x\|_0 + \varepsilon$$

showing the desired $\|x\| \leq \|x\|_0$ being ε arbitrary positive number. In case if A has not an identity, similarly

$$\|x\|_0 = \inf\left\{\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| : x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{m=1}^{\infty} (i\tilde{h}_j)^m/m!;\ \tilde{h}_j \in \tilde{A};\ \tilde{h}_j = \tilde{h}_j^*\right.$$

$$\left.(j = 1, 2, \ldots, n) \quad n = 1, 2, \ldots\right\}$$

holds and (29) can be proved analogously. The proof is complete.

REMARKS. 1. Theorem 5 yields a weakening of the definition of C^*-algebras, generalising the GLIMM–KADISON theorem [3] and its extension to the nonunital case by ELLIOTT [5].

2. This generalizes also the ARAKI–ELLIOTT theorem, since the locally continuity of the involution (see [9]) gives by (1)

$$\nu_A(x) \leq \|x\|_0$$

for any normal $x \in A$ giving by (20) also (26). Indeed, the locally continuity of the involution implies by (5) and (13) the continuity of the

multiplication in any maximal commutative selfadjoint subalgebra C of A, as was seen generally in [10]. Then

$$\nu_A(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \tag{39}$$

holds for any normal $x \in A$. But for normal $x \in A$ by (1)

$$\|(x^*)^{2^n}\| \, \|x^{2^n}\| = \|x\|_0^{2^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

holds, implying

$$\nu_A(x^*)\,\nu_A(x) = \|x\|_0^2 \quad \text{for normal} \quad x \in A, \tag{40}$$

Since $\nu_A(x^*) = \nu_A(x)$ holds known, we have from (40) by (39) then the desired $\nu_A(x) \leq \|x\|_0$ for any normal $x \in A$.

References

[1] H. Araki – G. A. Elliott, On the definition of C^*-algebras, *Publ. Res. Inst. for Math. Sci. Kyoto Univ.*, **9** (1973), 93 – 112.

[2] F. F. Bonsal – J. Duncan, Numerical Ranges, *London Math. Soc. Lecture Notes* **2** (1971).

[3] J. G. Glimm – R. V. Kadison, Unitary operators in C^*-algebas, *Pacific Journal of Math.*, **10** (1960), 547 – 556.

[4] P. R. Halmos, *A Hilbert space Problem Book* (D. Van Nostrand, 1967).

[5] G. A. Elliott, A weakening of the Axioms for a C^*-algebra *Math. Annalen*, **189** (1970), 257 – 260.

[6] T. W. Palmer, Characterizations of C^*-algebras II., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148** (1970,) 577 – 588.

[7] T. W. Palmer, The Gelfand-Naimark pseudonorm on Banach *-algebras, *Journal London Math. Soc.*, **3** (1971), 59 – 66.

[8] V. Pták, Banach algebras with involution, *Manuscripta Math.* **6** (1972), 245 – 281.

[9] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras* (D. Van Nostrand, 1960).

[10] Z. Sebestyén, Remarks on the paper of Araki and Elliott "On the definition of C^*-algebras", *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica, **17** (1974), 35 – 39.

INDEX

ASAAD, M., On the supersolvability of finite groups, I 3

ASAAD, M., On the supersolvability of finite groups, II 9

ASAAD, M., Generalization of a theorem of Deskins 177

CHARALAMBOUS, M. G., Two new inductive dimension functions for topological spaces 15

CSÁKÁNY, B., Congruences and subalgebras 37

ЧОКА, Г., О числе конгруэнтных шаров, закрывающих данный шар 55

ЧОКА, Г., О плотнейшей упаковке шаров в цилиндрах гиперболического пространства 61

GIAP, T. V., On the existence and stability of periodic solutions of a certain third-order differential equation 181

GUZMÁN, J. G., Über ein lineares Fluchtproblem 45

HAMBURG, P., Teilfolgen in topologischen Räumen 117

HOLLAI, M., Doppelgitterförmige Lagerungen inkongruenter Kreise und Kugeln 75

HOLLAI, M., Lagerungen inkongruenter Kugeln. II 101

HORTOBÁGYI, I., Über die auf Scheibenklassen bezügliche Newtonsche Zahl der konvexen Scheiben 123

ХОРВАТ, Й., О плотнейшей упаковке единичных шаров в 3-мерных и 4-мерных слоях 171

KÁTAI, I., Maximum of number-theoretical functions in short intervals 69

MÁRKI, L., STEWART, P. N. and WIEGANDT, R., Radicals and decomposability of semigroups and rings 27

MOLNÁR, E., Begründung der Möbiusschen Kreisebene aus dem Speigelungsbegriff 143

MOLNÁR, J., Sur les empilements optimaux des sphères dans une sphère de l'espace à courbure costante à n dimensions 87

PÁL, J., On the connection between the concept of a derivate defined on the dyadic field and the Walsh-Fourier transform 49

SCHIPP, F., Über gewissen Maximaloperatoren 189

SEBESTYÉN, Z., Some local characterization of boundedness and of C^*-equivalent algebras 197

SEBESTYÉN, Z., On a problem of Araki and Elliott 209

STEWART, P. N., MÁRKI, L. and WIEGANDT, R., Radicals and decomposability of semigroups and rings 27

SZÉKELY, G. J., A classification of means 129

ТЕМЕШВАРИ, А., О минимуме суммы ν-степеней сторон n-угольников вписанных в окружность 135

WIEGANDT, R., MÁRKI, L. and STEWART, P. N., Radicals and decomposability of semigroups and rings 27

Technikai szerkesztő:
SCHARNITZKY VIKTOR
A kiadásért felelős: az Eötvös Loránd Tudományegyetem rektora
A kézirat nyomdába érkezett: 1975. április. Megjelent: 1976. augusztus
Terjedelem: 19.5 A/5 ív. Példányszám: 900
Készült mono- és kéziszedéssel, íves magasnyomással,
az MSZ 5601–59 és MSZ 5602–55 szabványok szerint

75.676. Állami Nyomda, Budapest